

Corrigé du partiel de géométrie différentielle

Nous noterons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^n et (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n .

(1) Considérons l'application $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $(a, b, c, d) \mapsto (a^2 + b^2 + c^2 + d^2, ac - bd)$, qui est polynomiale, donc C^∞ . On a $f(1, 0, 0, 0) = (1, 0)$ et

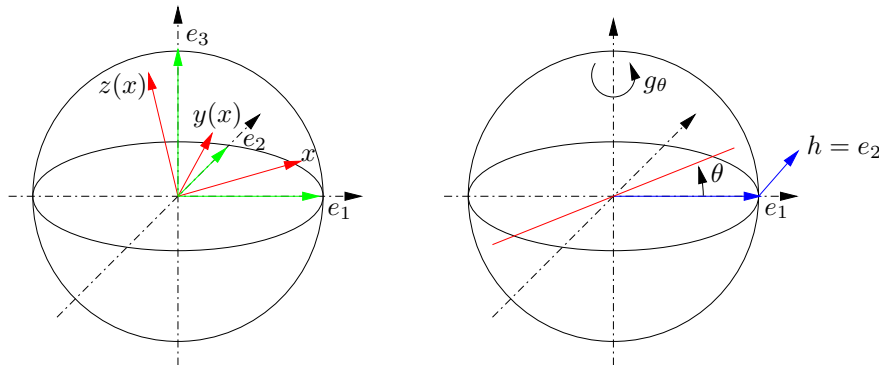
$$df_{(a,b,c,d)} : (x, y, z, t) \mapsto (2ax + 2by + 2cz + 2dt, az + cx - bt - dy).$$

Montrons que $df_{(a,b,c,d)}$ est surjective pour tout (a, b, c, d) dans M_1 , donc f sera une submersion au voisinage de tout point de $M_1 = f^{-1}(1, 0)$. Par le théorème des submersions, ceci montrera que M_1 , qui est non vide, est une sous-variété de \mathbb{R}^4 de dimension $4 - 2 = 2$, contenue dans la sous-variété \mathbb{S}_3 , donc est une sous-variété de \mathbb{S}_3 .

Soit donc $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ et $ac - bd = 0$. Il suffit de montrer que le noyau de $df_{(a,b,c,d)}$ est de dimension 2. L'un des a, b, c, d est non nul, et parce que le groupe des permutations de coordonnées préservant les deux polynômes $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ et $ac - bd$ agit transitivement sur les coordonnées, nous pouvons supposer que $a \neq 0$. L'espace des solutions du système d'équations $ax + by + cz + dt = 0$ et $az + cx - bt - dy = 0$ est de dimension 2 : c'est immédiat si $a \neq \pm c$ en considérant le système de deux équations d'inconnues x et z ; si $a = \epsilon c$ avec $\epsilon \in \{\pm 1\}$, alors $b \neq 0$ car $ac = bd$, donc le résultat est acquis symétriquement si $b \neq \pm d$; sinon, comme $ac = bd$, on a aussi $b = \epsilon d$, et le système d'équations s'écrit $a(x + \epsilon z) + b(y + \epsilon t) = 0$, $a(x + \epsilon z) - b(y + \epsilon t) = 0$, dont l'espace des solutions est bien de dimension 2.

[Voici une autre méthode, plus courte. L'application $f : \mathbb{S}_3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $(a, b, c, d) \mapsto (a^2 + b^2 + c^2 + d^2, ac - bd)$ est C^∞ , comme restriction d'application C^∞ à une sous-variété de \mathbb{R}^4 . Pour tout $x = (a, b, c, d)$ dans \mathbb{S}_3 , son application tangente $T_x f$ est la restriction à $T_x \mathbb{S}_3$ de la forme linéaire $\ell : (w, y, z, t) \mapsto az + cw - bt - dy$. Comme $(-c, d, -a, b) \in T_x \mathbb{S}_3 = x^\perp$ si $(a, b, c, d) \in \mathbb{S}_3$ et $\ell(-c, d, -a, b) = -1 \neq 0$, l'application $T_x f$ est surjective si $x \in M_1$, donc f est une submersion en tout point de M_1 . Par le théorème des submersions, $M_1 = f^{-1}(1, 0)$, qui est non vide, est une sous-variété de \mathbb{S}_3 de dimension $3 - 1 = 2$.]

(2) a) Montrons que f est une immersion C^∞ . Comme ceci est local, il suffit de le vérifier au voisinage de tout point $x_0 \in \mathbb{S}_2$. Pour tout g dans $\text{SO}(3)$ et x dans \mathbb{S}_2 , la conjugaison par g de la rotation d'axe $\mathbb{R}x$ et d'angle π est la rotation d'angle π et d'axe $\mathbb{R}g(x)$, donc $f(g(x)) = gf(x)g^{-1}$. Donc par transitivité, nous pouvons supposer que $x_0 = e_1$.



Pour x proche de $x_0 = e_1$ dans \mathbb{S}_2 , le triplet (x, e_2, e_3) est encore une base directe de \mathbb{R}^3 , que l'on orthonormalise par le procédé de Gramm-Schmidt pour obtenir une base orthonormée directe $(x, y(x), z(x))$, avec $x \mapsto y(x)$ et $x \mapsto z(x)$ de classe C^∞ sur un voisinage de x_0 . Soit P_x la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^3 à la base $(x, y(x), z(x))$, qui

est dans $SO(3)$, et vérifie $P_{x_0} = \text{id}$. Alors par définition, $f(x) = P_x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P_x^{-1}$

donc f est C^∞ . De plus, pour tout h dans $T_{x_0}\mathbb{S}_2 - \{0\}$, montrons que $T_{x_0}f(h)$ est non nul. Le vecteur non nul h est tangent à un unique grand cercle passant par x_0 . Quitte à conjuguer par des rotations, on peut supposer que c'est le grand cercle horizontal, et que la direction de h est celle du sens trigonométrique. Quitte à normaliser, on peut aussi sup-

poser que h est de norme 1. Bref $h = e_2$. Si $g_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $T_{x_0}f(h) =$

$\frac{d}{d\theta}|_{\theta=0} g_\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} g_\theta^{-1}$. Un petit calcul montre que $T_{x_0}f(h) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

qui est non nul.

[Voici deux autres méthodes pour vérifier que f est une immersion C^∞ .

Pour la première, on vérifie que $f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1^2 - 1 & 2x_1x_2 & 2x_1x_3 \\ 2x_1x_2 & 2x_2^2 - 1 & 2x_2x_3 \\ 2x_1x_3 & 2x_2x_3 & 2x_3^2 - 1 \end{pmatrix}$ en notant

$x = (x_1, x_2, x_3)$, donc f est C^∞ . Si $f_{ij} = f_{ji}$ est le coefficient (i, j) de f , alors $\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} = 0$ si $k \notin \{i, j\}$, et $\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} = 4x_i$ si $i = j$, ou $= 2x_i$ sinon. Donc $T_x f : (v_1, v_2, v_3) \mapsto \left(\sum_k \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} v_k \right)_{1 \leq i, j \leq 3}$ est injective (comme le montre une petite discussion sur l'annulation des x_i , sachant que $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$), et f est une immersion.

Pour la seconde (la plus courte), pour tout x dans \mathbb{S}_2 , comme $f(x)$ vaut id sur $\mathbb{R}x$ et $-\text{id}$ sur x^\perp , on a $f(x) : y \mapsto 2\langle x, y \rangle x - y$. Or une application d'une variété C^∞ à valeurs dans $\text{End}(\mathbb{R}^n)$ est C^∞ si et seulement si son évaluation en tout vecteur de \mathbb{R}^n est C^∞ , donc f est C^∞ . De plus, par restriction, pour tout h dans $T_x\mathbb{S}_2$, l'application linéaire $T_x f(h)$ est $y \mapsto 2\langle h, y \rangle x + 2\langle x, y \rangle h$, qui en $y = x$ vaut $2h$, donc $T_x f(h)$ est non nul si $h \neq 0$, et $T_x f$ est injective, d'où f est une immersion.]

Maintenant, comme une rotation est déterminée par son axe et son angle, $f(x) = f(y)$ si et seulement si $x = \pm y$. Donc l'application $f : \mathbb{S}_2 \rightarrow SO(3)$ passe au quotient en une application injective $\bar{f} : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{S}_2/\{\pm \text{id}\} \rightarrow SO(3)$, qui est une immersion C^∞ car la projection canonique $\mathbb{S}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ est un C^∞ -difféomorphisme local. Comme $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ est compact, \bar{f} est un plongement C^∞ , et son image, qui est aussi l'image de f , est bien une sous-variété C^∞ de $SO(3)$, difféomorphe par \bar{f} à $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

b) Toute matrice de $SO(3)$ est conjuguée à une matrice $g_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

donc est de trace $1 + 2\cos \theta$ où θ est l'angle de la rotation. Si $c \notin [-1, 3]$, alors N_c est vide, donc est une sous-variété de $SO(3)$. Si $c = -1$, alors N_c est l'ensemble des rotations d'angle $\theta = \pi$, qui est une sous-variété par a). Si $c = 3$, alors $N_c = \{\text{id}\}$, car toute matrice conjuguée à l'identité est l'identité, donc N_c est une sous-variété. Si $c \in]-1, 3[$, montrons que N_c est une sous-variété C^∞ de dimension 2 de $SO(3)$. Comme le problème

est local, et que la conjugaison par un élément de $\text{SO}(3)$ est un C^∞ -difféomorphisme de $\text{SO}(3)$ préservant N_c , il suffit par transitivité de montrer que N_c est une sous-variété C^∞ au voisinage de g_θ dans $\text{SO}(3)$ si $1 + 2 \cos \theta = c$. L'application $\text{tr} : \text{SO}(3) \rightarrow \mathbb{R}$ est restriction à une sous-variété d'une application linéaire, donc elle est C^∞ et son application tangente en un point x de $\text{SO}(3)$ est la restriction de l'application linéaire tr au sous-espace tangent $T_x \text{SO}(3)$. La courbe $c : t \mapsto g_{\theta+t}$ est une courbe C^∞ tracée sur $\text{SO}(3)$ telle que $c(0) = g_\theta$, et $\text{tr}(\dot{c}_0) = 2 \sin \theta \neq 0$. Donc tr est une submersion en g_θ , et $N_c = \text{tr}^{-1}(c)$ est une sous-variété de dimension $3 - 1 = 2$ au voisinage de g_θ .

(3) a) Comme M est une sous-variété C^∞ de \mathbb{R}^n de dimension p , pour tout y dans M , il existe un voisinage ouvert U de y dans \mathbb{R}^n , un voisinage ouvert V de 0 dans \mathbb{R}^p et une immersion f de classe C^∞ de V dans \mathbb{R}^n , telle que $f : V \rightarrow U \cap M$ soit un homéomorphisme. Considérons l'application $\phi : U \times \mathbb{S}_{p-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ définie par

$$(x, v) \mapsto \left(f(x), \frac{df_x(v)}{\|df_x(v)\|} \right).$$

Pour x fixé, l'application $g : v \mapsto \frac{df_x(v)}{\|df_x(v)\|}$ de \mathbb{S}_{p-1} dans \mathbb{R}^n est immersive, car en notant ℓ l'application linéaire df_x , on a par un calcul immédiat pour tout $h \in T_v \mathbb{S}_{p-1}$,

$$T_v g(h) = \frac{\ell(h)}{\|\ell(v)\|} - \frac{\ell(v)\langle \ell(h), \ell(v) \rangle}{\|\ell(v)\|^3} = \frac{\ell\left(\|\ell(v)\|^2 h - \langle \ell(h), \ell(v) \rangle v\right)}{\|\ell(v)\|^3}.$$

Comme ℓ est injective, $T_v g(h)$ ne peut s'annuler que si $\|\ell(v)\|^2 h - \langle \ell(h), \ell(v) \rangle v = 0$, ce qui est impossible si $h \neq 0$, car alors $h \in T_v \mathbb{S}_{p-1}$ et $v \in \mathbb{S}_{p-1}$ ne sont pas colinéaires (ils sont non nuls et orthogonaux!).

Comme f est une immersion, l'application linéaire df_x est injective, donc l'application ϕ est bien définie, et est de classe C^∞ . Elle est immersive, car sa différentielle est triangulaire supérieure par blocs, de bloc en haut à gauche injectif car f est une immersion, et de bloc en bas à droite injectif par ce qui précède.

Par définition de $T^1 M$ et de la structure de variété de TM , l'application Φ est une bijection de $V \times \mathbb{S}_{p-1}$ dans $(U \times \mathbb{R}^n) \cap T^1 M$.

Comme \mathbb{S}_{p-1} est compacte et $f : V \rightarrow U \cap M$ propre, l'application $\Phi : V \times \mathbb{S}_{p-1}$ dans $(U \times \mathbb{R}^n) \cap T^1 M$ est propre, c'est donc une immersion C^∞ qui est un homéomorphisme sur son image, et $T^1 M$ est bien une sous-variété C^∞ . De plus, Φ est une trivialisatation locale C^∞ de π au-dessus de $U \cap M$ de fibre \mathbb{S}_{p-1} , car $\pi \circ \Phi = \text{pr}_1$, et donc π est une fibration C^∞ de fibre \mathbb{S}_{p-1} .

b) Pour tout g dans $\text{SO}(3)$, l'application $g : \mathbb{S}_2 \rightarrow \mathbb{S}_2$ est restriction de l'application linéaire de matrice g , donc pour tout x dans $\text{SO}(3)$, l'application $T_x g : T_x \mathbb{S}_2 \rightarrow T_{gx} \mathbb{S}_2$ est aussi restriction de cette application linéaire, qui préserve la norme euclidienne. Donc $Tg : (x, v) \mapsto (gx, T_x g(v) = gv)$ envoie $T^1 \mathbb{S}_2$ dans lui-même.

Pour tout $(x, v) \in T^1 \mathbb{S}_2$, notons $x \wedge v$ l'unique vecteur de \mathbb{R}^3 tel que $(x, v, x \wedge v)$ soit une base orthonormée directe, et soit $P_{x,v}$ la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^3 à la base $(x, v, x \wedge v)$, qui est bien un élément de $\text{SO}(3)$. Posons $\Phi : (x, v) \mapsto P_{x,v}$. Alors $\Phi \circ Tg(x, v) = \Phi(gx, gv) = g\Phi(x, v)$ car $(gx) \wedge (gv) = g(x \wedge v)$ et par composition des matrices de passages. L'application Φ est C^∞ , car les coefficients de $P_{x,v}$ dépendent de manière C^∞ de ceux de x, v , et elle est bijective car il existe un et un seul élément de $\text{SO}(3)$ envoyant une base orthonormée directe sur une autre. L'application $g \mapsto (ge_1, ge_2)$

de $SO(3)$ dans $T^1\mathbb{S}_2$, où e_1, e_2 sont les deux premiers vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^3 , est restriction d'une application polynomiale, donc est C^∞ . C'est clairement l'inverse de Φ , donc Φ est un C^∞ -difféomorphisme.

(4) a) L'action de G préserve \mathbb{S}_3 , car $|\epsilon w|^2 + |\eta z|^2 = |w|^2 + |z|^2$, ainsi que C_1 et C_2 . Tout élément de G agit par une application C^∞ (car restriction d'une application linéaire à une sous-variété) sur l'ouvert $\mathbb{S}_3 - (C_1 \cup C_2)$ de la variété \mathbb{S}_3 . Le groupe G est fini (d'ordre 4), et agit librement sur $\mathbb{S}_3 - (C_1 \cup C_2)$, car si $(\epsilon w, \eta z) = (w, z)$ et $w \neq 0, z \neq 0$, alors $\epsilon = \eta = 1$. Le résultat découle alors de la définition de la structure de variété quotient.

b) On vérifie que $\langle (w, z), (iw, \pm iz) \rangle = 0$, donc X et Y sont bien à valeurs dans $T\mathbb{S}_3$ (et même dans $T^1\mathbb{S}_3$ car $\|(iw, \pm iz)\| = |w|^2 + |z|^2 = 1$). De plus, X et Y sont C^∞ , comme restrictions d'applications polynomiales. Comme \mathbb{S}_3 est compact, les champs de vecteurs X et Y sont complets. Par séparation des variables, comme $[Z, \pm Z] = 0$, on a $[X, Y] = 0$.

c) Les vecteurs unitaires $X(w, z)$ et $Y(w, z)$ sont linéairement dépendants sur \mathbb{R} si et seulement s'il existe λ dans $\{\pm 1\}$ tel que $X(w, z) = \lambda Y(w, z)$. Si $\lambda = 1$, ceci implique que $(w, z) \in C_1$ et si $\lambda = -1$, ceci implique que $(w, z) \in C_2$. Donc Δ est bien un champ de plans sur $\mathbb{S}_3 - (C_1 \cup C_2)$. Comme il est engendré en tout point par des champs de vecteurs C^∞ , il est C^∞ . Comme le crochet des champs de vecteurs X et Y engendrant Δ est en tout point dans Δ (car nul!), le champ de plans Δ est intégrable par le théorème de Frobenius.

d) Considérons les deux applications $(t, (w, z)) \mapsto (e^{it}w, e^{it}z)$ et $(t, (w, z)) \mapsto (e^{it}w, e^{-it}z)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{S}_3$ dans \mathbb{C}^2 , d'images clairement dans \mathbb{S}_3 . Alors leurs dérivées par rapport au temps t sont respectivement les applications $(t, (w, z)) \mapsto (ie^{it}w, ie^{it}z) = X(e^{it}w, e^{it}z)$ et $(t, (w, z)) \mapsto (ie^{it}w, -ie^{-it}z) = Y(e^{it}w, e^{it}z)$. Par unicité du flot local des champs de vecteur, la première application est donc le flot local de X et la seconde celui de Y . L'application $f_{w,z}$ est donc $(s, t) \mapsto (e^{i(s+t)}w, e^{i(s-t)}z)$. Quitte à faire un changement de coordonnées linéaire à la source, ce qui ne change pas l'image, il suffit donc de montrer que l'application $g_{w,z} : (s, t) \mapsto (e^{is}w, e^{it}z)$ est d'image une sous-variété C^∞ -difféomorphe à \mathbb{T}^2 .

L'application $g_{w,z}$ est clairement C^∞ , et immersive (car son application tangente en tout point est la multiplication par i dans chacun des deux facteurs).

De plus, comme une rotation est déterminée par son axe et son angle, $g_{w,z}(s, t) = g_{w,z}(s', t')$ si et seulement si $(s, t) - (s', t') \in 2\pi\mathbb{Z}^2$. Donc l'application $g_{w,z} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}_3$ passe au quotient en une application injective $\overline{g_{w,z}} : \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{S}_3$, qui est une immersion C^∞ car la projection canonique $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ est un C^∞ -difféomorphisme local. Comme \mathbb{T}^2 est compact, $\overline{g_{w,z}}$ est un plongement C^∞ , et son image, qui est aussi l'image de $g_{w,z}$, est bien une sous-variété C^∞ de \mathbb{S}^3 , difféomorphe par $\overline{g_{w,z}}$ à \mathbb{T}^2 .

(5) a) L'application $x \mapsto (x, X(x))$ est C^∞ , car X l'est, et immersive injective car sa première composante l'est, donc bijective sur son image, de bijection réciproque une restriction d'une application linéaire, donc continue. Donc cette application, en tant qu'immersion C^∞ injective qui est un homéomorphisme sur son image est un plongement C^∞ .

b) Soit U un voisinage ouvert de x dans \mathbb{R}^n , V un voisinage ouvert de 0 dans \mathbb{R}^p et $f : V \rightarrow U \cap M$ un paramétrage local C^∞ de M . On sait que $\varphi : V \times \mathbb{R}^p \rightarrow (U \times \mathbb{R}^n) \cap TM$ définie par $(x, v) \mapsto (f(x), df_x(v))$ est un paramétrage local de TM . Un calcul immédiat par blocs, utilisant le fait que la différentielle d'une application linéaire est elle-même, montre que pour tous $h, k \in \mathbb{R}^p$,

$$d\varphi_{(x,v)}(h, k) = \left(df_x(h) + d^2f_x(v, k), df_x(k) \right).$$

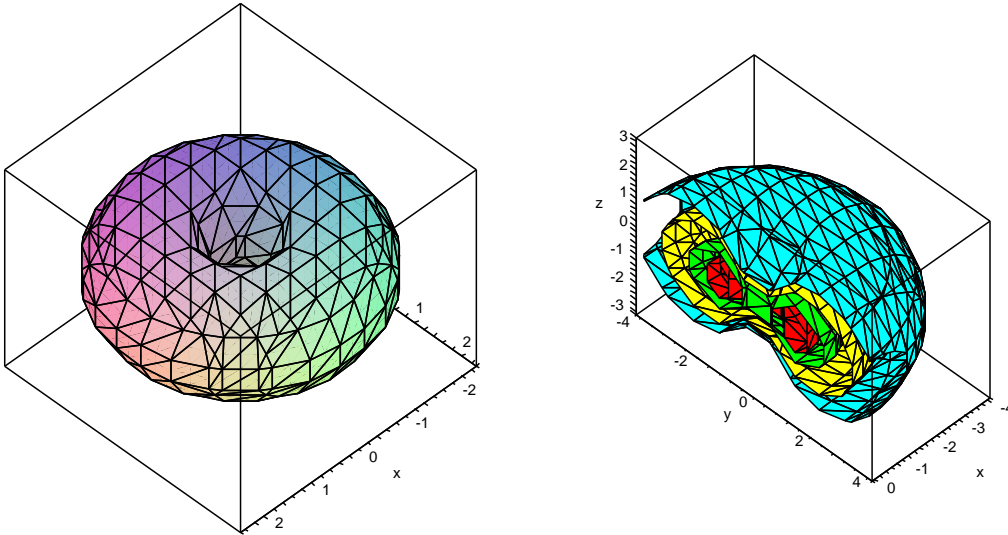
Comme $T_{(x,v)}TM$ est l'image de la différentielle en (x, v) du paramétrage local φ , le résultat en découle.

c) Par compacité, il suffit de montrer que les points d'intersection de A et B sont isolés. En prenant une carte locale, on peut supposer que $M = \mathbb{R}^p$. Or si A et B sont transverses en un point d'intersection x , alors on peut écrire au voisinage de x la sous-variété B comme le graphe d'une application de l'espace tangent à B en x à valeurs dans l'espace tangent à A en x . Ce graphe ne rencontre A , dans un voisinage de x , qu'en ce point x .

d) Pour tout champ de vecteurs X , soit $g_X : M \rightarrow TM$ l'application qui à x associe $(x, X(x))$. Notons que $T_x g_X : T_x M \rightarrow T_{(x, X(x))}TM$ est l'application $h \mapsto (h, T_x X(h))$. Comme g_X est un plongement d'image N_X , le sous-espace vectoriel $T_{(x, X(x))}N_X$ de l'espace tangent $T_{(x, X(x))}TM$ est l'image de l'application linéaire $T_x g_X$. En particulier, pour tout x dans M tel que $X(x) = 0$, on a $T_{(x,0)}N_0 = T_x M \times \{0\}$, et donc $T_{(x,0)}N_0$ et $T_{(x,0)}N_X = \{(h, T_x X(h)) : h \in T_x M\}$ sont supplémentaires si et seulement si $T_x X$ est surjective.

e) L'application X est restriction d'application linéaire, donc est de classe C^∞ , et son application tangente en tout point x de \mathbb{S}_2 est la restriction à $T_x \mathbb{S}_2$ de cette application linéaire. Comme $\langle (a, b, c), (0, -c, b) \rangle = 0$, le vecteur $X(x)$ appartient à $T_x \mathbb{S}_2 = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle x, v \rangle = 0\}$ pour tout x dans \mathbb{S}_2 . Les zéros de X sont les triplets (a, b, c) de \mathbb{S}_2 tels que $b = c = 0$, donc sont $(\pm 1, 0, 0)$. En ces points, les sous-espaces tangents à \mathbb{S}_2 sont égaux au plan des deux dernières coordonnées : $T_{(\pm 1, 0, 0)}\mathbb{S}_2 = \{0\} \times \mathbb{R}^2$. Comme $T_{(\pm 1, 0, 0)}X : T_{(\pm 1, 0, 0)}\mathbb{S}_2 \rightarrow T_{(\pm 1, 0, 0)}\mathbb{S}_2$ est l'application $(0, b, c) \mapsto (0, -c, -b)$ qui est surjective, le résultat découle de la question précédente.

Remarque. Soit $R : \mathbb{S}_3 \rightarrow \mathbb{S}_3$ la rotation définie par $R : (w, z) \mapsto \left(\frac{w+\bar{z}}{\sqrt{2}}, \frac{w-\bar{z}}{\sqrt{2}}\right)$.



Le dessin de gauche ci-dessus est l'image par la projection stéréographique de pôle $(1, 0, 0, 0)$ du tore $R^{-2}(M_{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}}) = R^{-1}(M_1)$. Le dessin de droite est l'image par cette projection stéréographique du feuilletage $R^{-2}(\mathcal{F})$ de feuilles $R^{-2}(\mathcal{F}_{(w,z)}) = R^{-2}(M_{w,z})$. Pour expérimenter sur MAPLE, voici des instruction possibles.

```
with(plots) : a :=(x^2+y^2+z^2-1)/(x^2+y^2+z^2+1) : b :=2*x/(x^2+y^2+z^2+1) :
c :=2*y/(x^2+y^2+z^2+1) : d :=2*z/(x^2+y^2+z^2+1) : p :=(a+c)*(a-c)-(b+d)*(b-d) :
implicitplot3d(p,x=-2.4..2.4,y=-2.4..2.4,z=-2..2, scaling=constrained,
```

```
axes=boxed)); implicitplot3d([p-0.6,p-0.4,p,p+0.4],x=-4..0,y=-4..4,z=-3..3,  
color=[cyan,yellow,green,red], scaling=constrained, axes=boxed));
```