

## Géométrie Différentielle, Partiel du 14 mars 2008, durée 2 heures

*Documents et calculatrices interdits. Barème approximatif : 7,3,10 Les questions sont souvent indépendantes. Ne pas hésiter, quand on peine sur une question, à passer aux suivantes.*

1. Foire aux questions. Répondre par OUI/NON et donner une brève justification. \_\_\_\_\_

- 1- L'ensemble  $\mathbb{Z}$  des entiers est-il une sous-variété de  $\mathbb{R}$  ?
- 2- L'ensemble  $\mathbb{Z}\sqrt{2}$  des multiples entiers de  $\sqrt{2}$  est-il une sous-variété de  $\mathbb{R}$  ?
- 3- Soit  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  la projection de la droite vers le cercle. L'image  $\pi(\mathbb{Z}\sqrt{2})$  est-elle une sous-variété de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  ?
- 4- Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^\infty$ . On suppose que  $f^{-1}(0)$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^2$ . Peut-on affirmer que  $f$  est une submersion au-dessus de 0 ?
- 5- Deux droites projectives distinctes du plan projectif se coupent-elles en deux points ?
- 6- Deux droites projectives distinctes du plan projectif sont-elles toujours transverses ?
- 7- Si je déplace continûment une droite projective  $D$  du plan projectif, son point d'intersection avec une droite fixe  $D_0$  varie-t-il continûment ?
- 8- Soit  $TS^2$  le fibré tangent à la sphère unité. Soit  $P_0$  un plan vectoriel fixé. La famille des droites  $x \mapsto T_x S^2 \cap P_0$  forme-t-elle un fibré vectoriel sur  $S^2$  ?

### Solution :

- 1- Oui. Tout entier  $n$  possède un voisinage, à savoir  $V_n = ]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}[$ , dans lequel il est le seul point de  $\mathbb{Z}$ . La translation de  $-n$  est un difféomorphisme qui envoie  $V_n \cap \mathbb{Z} = \{n\}$  sur  $\{0\}$  qui est un sous-espace vectoriel de dimension 0. Donc  $\mathbb{Z}$  est une sous-variété de dimension 0 de  $\mathbb{R}$ .
- 2- Oui. L'application linéaire  $x \mapsto x\sqrt{2}$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ , donc envoie sous-variétés sur sous-variétés.
- 3- Non. On raisonne par l'absurde. Supposons que  $\pi(\mathbb{Z}\sqrt{2})$  est une sous-variété. Comme il est dénombrable, sa dimension est nulle. Il existe donc un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  qui ne contient qu'un point de  $\pi(\mathbb{Z}\sqrt{2})$ . Comme la différence de deux éléments de  $\pi(\mathbb{Z}\sqrt{2})$  appartient encore à  $\pi(\mathbb{Z}\sqrt{2})$ , cela entraîne que  $\pi(\mathbb{Z}\sqrt{2})$  est fini, donc qu'il existe un entier  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $n\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$ , contradiction.
- 4- Non. Exemple :  $f(x, y) = x^2$ .
- 5- Non, en un seul point. En effet, une droite projective, c'est  $p(P)$  où  $P$  est un plan de  $\mathbb{R}^3$ . L'intersection de deux plans distincts étant une droite, l'intersection de deux droites projectives distinctes est un point.

- 6– Oui. Dans une carte affine, une droite projective devient une droite affine. Deux droites affines distinctes du plan sont transverses.
- 7– Oui, tant que  $D$  reste distincte de  $D_0$ . C'est une conséquence de la transversalité. Autre façon de le voir : dans une carte affine. Les droites affines possèdent cette propriété (c'est d'ailleurs l'un des axiomes d'Euclide).
- 8– Non. Les fibres d'un fibré vectoriel ont une dimension constante. Or la dimension de  $T_x\mathbb{S}^2$  vaut en général 1, mais avec deux exceptions, aux points de  $\mathbb{S}^2$  qui sont les vecteurs unitaires normaux à  $P_0$ .

## 2. Un fibré vectoriel.

---

Soit  $\ell$  une droite vectorielle de  $\mathbb{R}^3$ . On note  $\ell^\perp$  le plan orthogonal à  $\ell$ . Montrer que les plans  $\ell \mapsto \ell^\perp$  constituent un fibré vectoriel sur le plan projectif. Autrement dit, munir l'ensemble  $\coprod_{\ell \in P^2(\mathbb{R})} \ell^\perp$  d'une structure de fibré vectoriel.

### Solution :

Notons  $E$  la réunion disjointe des  $\ell^\perp$ ,  $\ell \in P^2(\mathbb{R})$ . Dans la carte affine  $\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\varphi_1^{-1}(x, y) = [1 : x : y]$ , le vecteur  $(1, x, y)$  est un vecteur directeur de la droite  $\ell = \varphi_1^{-1}(x, y)$ . Par conséquent, l'équation de  $\ell^\perp$  est  $X_1 + xX_2 + yX_3 = 0$ . Pour avoir une base de  $\ell^\perp$ , il suffit de résoudre ce système linéaire. On trouve que les vecteurs  $e_1(\ell) = (-x, 1, 0)$  et  $e_2(\ell) = (-y, 0, 1)$  sont des solutions indépendantes. Cela fournit une carte  $\Phi_1 : U_1 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow E|_{U_1}$ ,  $(\ell, s, t) \mapsto (\ell, se_1(\ell) + te_2(\ell))$ .

Dans la carte affine  $\varphi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\varphi_2^{-1}(x', y') = [x' : 1 : y']$ , le même procédé fournit la base  $e'_1(\ell) = (1, -x', 0)$  et  $e'_2(\ell) = (0, -y', 1)$ . D'où la carte  $\Phi_2 : U_2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow E|_{U_2}$ ,  $(\ell, s, t) \mapsto (\ell, se'_1(\ell) + te'_2(\ell))$ .

Le même point  $\ell = [1 : x : y] = [1 : 1/x' : y'/x']$  est représenté par les coordonnées  $x' = 1/x$  et  $y' = y/x$  dans la carte  $\varphi_2$ . Comme  $e'_1(\ell) = (1, -1/x, 0)$  et  $e'_2(\ell) = (0, -y/x, 1)$ , on constate que  $e_1(\ell) = -xe'_1(\ell)$  et  $e_2(\ell) = -ye'_1(\ell) + e'_2(\ell)$ . La matrice de passage  $\begin{pmatrix} -x & -y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  est  $C^\infty$  en  $(x, y)$ . Autrement dit,  $\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1} : U_1 \cap U_2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow U_1 \cap U_2 \times \mathbb{R}^2$

est donné par  $(\ell, s, t) \mapsto (\ell, -xs - yt, t) = \begin{pmatrix} -x & -y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ , avec une matrice dépendant différemment du point. La vérification pour les deux autres changements de cartes est similaire.

## 3. Champ de vecteurs et fonction sur le plan projectif.

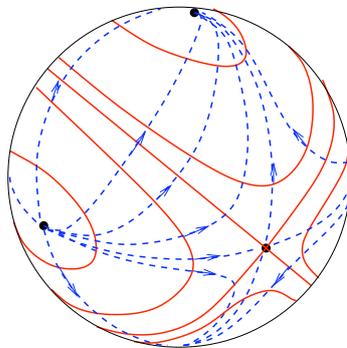
---

Le groupe linéaire  $GL_3(\mathbb{R})$  envoie droite vectorielle sur droite vectorielle de  $\mathbb{R}^3$ , donc agit sur  $P^2(\mathbb{R})$ . A chaque matrice  $M$  est donc associé un champ de vecteur  $\xi_M$  sur  $P^2(\mathbb{R})$ , dont le flot coïncide avec l'action des éléments  $e^{tM}$  de  $GL_3(\mathbb{R})$ . On rappelle que les cartes

affines de  $P^2(\mathbb{R})$  sont données par

$$\varphi_1^{-1}(x, y) = [1 : x : y], \quad \varphi_2^{-1}(x', y') = [x' : 1 : y'], \quad \varphi_3^{-1}(x'', y'') = [x'' : y'' : 1].$$

- 1– Soit  $M$  une matrice  $3 \times 3$ . En quels points le champ de vecteurs  $\xi_M$  s'annule-t'il ?
- 2– Soit  $D = \text{diag}(a, b, c)$  la matrice diagonale de coefficients diagonaux  $a, b$  et  $c$ . Calculer l'action de  $e^{tD}$  dans chacune des cartes  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ . Dériver par rapport à  $t$  et en déduire l'expression du champ de vecteurs  $\xi$  dans les trois cartes.
- 3– On suppose désormais que  $a < b < c$ . Dessiner sommairement les trajectoires des trois champs de vecteurs obtenus, en indiquant le sens de parcours. Mettre des signes distinctifs permettant de retrouver la même ligne intégrale sur les trois cartes.
- 4– On note  $S$  (resp.  $S'$ , resp.  $S''$ ) le point du plan projectif qui correspond à l'origine dans la carte  $\varphi_1$  (resp.  $\varphi_2$ , resp.  $\varphi_3$ ). Combien y a-t'il de trajectoires dont l'adhérence contient  $S$  et  $S'$  (resp.  $S$  et  $S''$ , resp.  $S'$  et  $S''$ ) ?
- 5– Le groupe  $GL_3(\mathbb{R})$  agit aussi sur l'espace des demi-droites vectorielles de  $\mathbb{R}^3$ . On identifie cet espace à la sphère  $\mathbb{S}^2$ . On note  $\eta_M$  le champ de vecteurs sur  $\mathbb{S}^2$  dont le flot coïncide avec l'action de  $e^{tM}$ . Vérifier que si  $v \in \mathbb{S}^2$ ,  $\eta_M(v)$  est la projection orthogonale de  $Mv$  sur le plan orthogonal à  $v$ .
- 6– Quel est le rapport entre  $\eta_M$  et  $\xi_M$  ?
- 7– Vérifier que la fonction définie sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  par  $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  passe au quotient en une fonction  $\bar{f}$  de classe  $C^\infty$  sur  $P^2(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\mathcal{L}_{\xi_D} \bar{f} \geq 0$ . En quels points l'égalité a-t-elle lieu ?
- 8– Décrire l'ensemble  $\bar{f}^{-1}(b)$ . Soit  $\varepsilon > 0$  assez petit pour que  $a < b - \varepsilon < b < b + \varepsilon < c$ . Soit  $T = \{\ell \in P^2(\mathbb{R}) \mid b - \varepsilon < \bar{f}(\ell) < b + \varepsilon\}$ . La variété  $T$  est-elle orientable ? Dessiner un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3$  qui est homéomorphe à  $T$ .
- 9– Pour quelles valeurs de  $z \in \mathbb{R}$  l'ensemble  $\bar{f}^{-1}(z)$  est-il une sous-variété de dimension 1 ?
- 10– Commenter la figure suivante. Qu'y voit-on (points, champ de vecteurs, lignes de niveau,...) ? En utilisant cette figure, déterminer le nombre de composantes connexes de chaque ensemble  $\bar{f}^{-1}(z)$ , pour  $z \in \mathbb{R}$ .



**Solution :**

- 1– Les zéros de  $\xi_M$  correspondent aux points fixes par tous les  $e^{tM}$ . Or une droite fixée par les  $e^{tM}$ , c'est une droite propre commune aux  $e^{tM}$ , donc une droite propre de  $M$ . En dimension 3,  $M$  possède toujours au moins une valeur propre réelle, donc  $\xi_M$  a au moins un point singulier. Les points singuliers sont ou bien isolés (valeurs propres réelles simples), ou forment des droites projectives (espaces propres de dimension 2), ou bien remplissent tout le plan projectif (matrices proportionnelles à l'identité).
- 2– Comme  $\varphi_1([x_1 : x_2 : x_3]) = (\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1})$ , l'expression de  $\varphi_1 \circ e^{tD} \circ \varphi_1^{-1}$  est

$$(x, y) \mapsto (1, x, y) \mapsto (e^{ta}, e^{tb}x, e^{tc}y) \mapsto (e^{t(b-a)}x, e^{t(c-a)}y).$$

En dérivant par rapport à  $t$ , on trouve l'expression de  $\xi_D$  dans la carte  $\varphi_1$ ,

$$(\varphi_1)_*\xi_D(x, y) = ((b-a)x, (c-a)y).$$

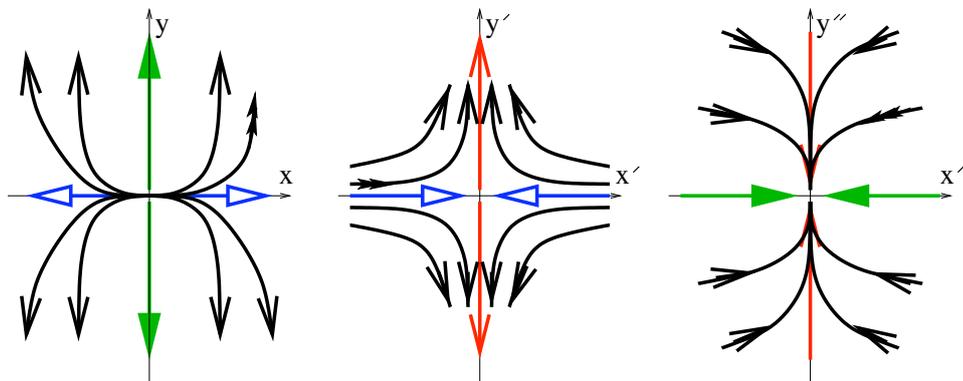
De même,

$$\varphi_2 \circ e^{tD} \circ \varphi_2^{-1}(x', y') = (e^{t(a-b)}x', e^{t(c-b)}y'), \quad \varphi_3 \circ e^{tD} \circ \varphi_3^{-1}(x'', y'') = (e^{t(a-c)}x'', e^{t(b-c)}y''),$$

d'où

$$(\varphi_2)_*\xi_D(x', y') = ((a-b)x', (c-b)y'), \quad (\varphi_3)_*\xi_D(x'', y'') = ((a-c)x'', (b-c)y'').$$

- 3– On obtient les figures classiques pour des champs linéaires dans le plan : noeud non dégénéré répulsif, col, noeud non dégénéré attractif. Les trajectoires rectilignes sont portées par des droites projectives reliant les trois points singuliers (elles forment un triangle dont un côté est à l'infini dans chaque carte).



- 4– 2 (resp. 2, resp. une infinité).

- 5– On note  $(M, v) \mapsto M \odot v$  l'action de  $GL_3(\mathbb{R})$  sur la sphère. Alors  $M \odot v = \frac{1}{|Mv|}Mv$ , où  $|\cdot|$  désigne la norme euclidienne. On calcule

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{tN} \odot v|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{|e^{tN}v|^2}} e^{tN} v|_{t=0} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{2Nv \cdot v}{|v|^3} v + \frac{1}{|v|} v \\ &= v - (Nv \cdot v)v = (Nv)^{\perp v}, \end{aligned}$$

où  $w \mapsto w^{\perp v}$  est le projecteur orthogonal sur le plan orthogonal à  $w$ .

- 6– L'espace projectif est le quotient de l'espace des demi-droites par le groupe à deux éléments  $\{\pm 1\}$ . La projection obtenue  $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow P^2(\mathbb{R})$  est un difféomorphisme local. Le champ  $\eta_M$  est obtenu en tirant  $\xi_M$  en arrière par  $\pi$ .

- 7– Comme  $f$  est homogène de degré 0, elle passe au quotient. Dans la carte  $\varphi_1$ , on a  $\bar{f} \circ \varphi_1^{-1}(x, y) = \frac{a + bx^2 + cy^2}{1 + x^2 + y^2}$ . Dans la carte  $\varphi_2$ ,  $\bar{f} \circ \varphi_2^{-1}(x', y') = \frac{ax'^2 + b + cy'^2}{x'^2 + 1 + y'^2}$ .

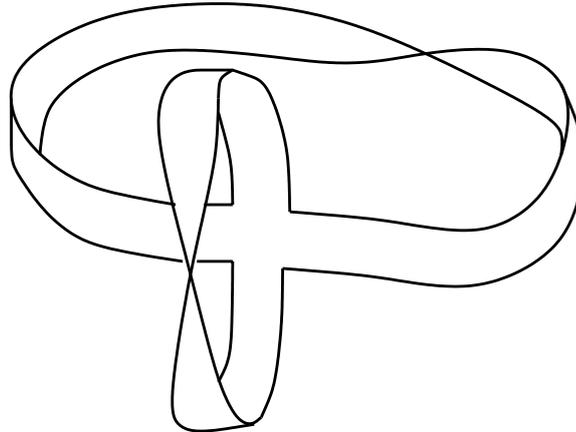
Dans la carte  $\varphi_3$ ,  $\bar{f} \circ \varphi_3^{-1}(x'', y'') = \frac{ax''^2 + by''^2 + c}{x''^2 + y''^2 + 1}$ . Ces trois fonctions sont  $C^\infty$ . Cela prouve que  $\bar{f}$  est de classe  $C^\infty$  sur  $P^2(\mathbb{R})$ . Pour dériver  $\bar{f}$ , on calcule

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\xi_M} \bar{f}(\mathbb{R}v) &= \frac{d}{dt} f(e^{tD}v)|_{t=0} \\ &= \frac{(a^2x_1^2 + b^2x_2^2 + c^2x_3^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2)^2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2}. \end{aligned}$$

Le numérateur est positif ou nul en raison de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Le cas d'égalité a lieu lorsque les vecteurs  $v = (x_1, x_2, x_3)$  et  $Dv = (ax_1, bx_2, cx_3)$  sont colinéaires, i.e. aux points  $S$ ,  $S'$  et  $S''$ .

- 8–  $f(x_1, x_2, x_3) = b$  si et seulement si  $(a - b)x_1^2 + (c - b)x_3^2 = 0$ , i.e.  $-\sqrt{b - a}x_1 + \sqrt{c - b}x_3 = 0$  ou  $\sqrt{b - a}x_1 + \sqrt{c - b}x_3 = 0$ . Autrement dit,  $f^{-1}(b)$  est la réunion de deux plans vectoriels,  $\bar{f}^{-1}(b)$  est la réunion de deux droites projectives sécantes en  $S'$ .

- 9–  $T$  contient un petit voisinage d'une droite projective qui est difféomorphe à une bande de Möbius, qui n'est pas orientable, donc  $T$  n'est pas orientable.  $T$  est la réunion de deux bandes de Möbius qui se croisent, ce qui donne la figure suivante.



- 10– En tout point distinct de  $S$ ,  $S'$  et  $S''$ , il existe un vecteur tangent sur lequel la différentielle de  $\bar{f}$  est strictement positive. Par conséquent,  $\bar{f}$  est une submersion en ces points là. En particulier,  $\bar{f}$  est une submersion au-dessus de tout nombre  $z$  distinct de  $a$ ,  $b$  et  $c$ . Si  $z < a$  ou  $z > c$ ,  $\bar{f}^{-1}(z)$  est vide. Si  $z = a$  ou  $z = c$ ,  $\bar{f}^{-1}(z)$  est réduit à un point. Si  $a < z < b$  ou  $b < z < c$ ,  $\bar{f}^{-1}(z)$  est non vide, c'est une sous-variété de dimension 1. Reste le cas où  $z = b$ . La réunion de deux courbes transverses n'est pas une sous-variété.
- 11– On voit trois des six points singuliers du champ de vecteurs  $\eta_D$  (les trois autres, leurs antipodes, sont invisibles). On voit quelques trajectoires de  $\eta_D$  et quelques lignes de niveau de la restriction de  $f$  à la sphère unité, dont celle (deux grands cercles sécants) correspondant au niveau  $b$ . On voit qu'en dehors des points singuliers,  $\eta_D$  est transverse aux lignes de niveau. Les deux grands cercles divisent la sphère en 4 secteurs. La figure montre que lorsque  $a < z < b$  (resp.  $b < z < c$ ), l'ensemble de niveau comporte deux lignes, difféomorphes à des cercles, situées dans des secteurs opposés. Dans le plan projectif, ces lignes sont identifiées. Par conséquent,  $\bar{f}^{-1}(z)$  est connexe. C'est vrai aussi pour  $z = a$ ,  $b$  et  $c$ . On conclut que  $\bar{f}^{-1}(z)$  est toujours connexe.