École Normale Supérieure – Année 2012-2013
T.D. de Topologie, Analyse et Calcul différentiel

Corrigé de la feuille d'exercices n°1

---

1. Espaces l^p, $1 \leq p < \infty$.

Voir correction faite en TD ou attendre patiemment son cours d'intégration.

---

2. Distance SNCF

1. Que d soit une distance ne présente aucune difficulté (il suffit de distinguer soigneusement les cas pour montrer l'inégalité triangulaire).

2. On note $B_d(x,r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r pour la distance SNCF d, et $B(x,r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r pour la distance usuelle. Si x est l'origine, alors $B_d(x,r) = B(x,r)$ pour tout $r > 0$. Si x n'est pas l'origine, alors pour $r \leq \|x\|$, la boule $B_d(x,r)$ est le segment ouvert $S(x,r)$ de la droite passant par x et l'origine, centré en x, de longueur $2r$. Pour $r > \|x\|$, la boule $B_d(x,r)$ est la réunion du segment $S(x,r)$ et de la boule $B(0, r - \|x\|)$.

La distance SNCF n'est pas équivalente à la distance usuelle. En effet, la boule B_d centrée en $(1,0)$ de rayon 1 est incluse dans l'axe des abscisses. Or aucune boule pour la distance usuelle de rayon strictement positif n'est incluse dans cet axe, donc dans B_d.

Par contre, on voit facilement qu'en tout point x, toute boule pour la distance usuelle centrée en x contient une boule pour d centrée en x (en effet si $x \neq 0$, pour $\varepsilon > 0$ suffisament petit, la boule $B'(x,\varepsilon)$ est un segment ouvert centré sur x). Donc, la topologie induite par la distance SNCF est plus fine que la topologie usuelle du plan.

3. Par définition même de d, la distance induite par d sur une droite passant par l'origine est la distance usuelle. La distance induite sur le cercle unité est la distance "constante égale à 2" : la distance entre deux points distincts est toujours égale à 2.

4. On vérifie facilement que si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une similitude qui ne préserve pas l'origine, elle ne peut pas être continue pour la topologie induite par la distance SNCF. En effet, le segment $]f(0)/2, 3f(0)/2[$ est un voisinage ouvert de $f(0)$. Sa pré-image par f est un segment centré en 0 qui ne peut donc pas être ouvert pour d.

Il ne reste plus qu'à considérer les similitudes directes préservant l'origine, c'est à dire les rotations et les homothéties de centre 0. Comme ces applications transforment une droite passant par 0 en une droite passant par 0, il est facile de voir qu'elles sont continues (et même lipschitziennes).

5. On peut raisonner par l'absurde en supposons qu'il existe une norme $|\cdot|$ qui engendre la même topologie. Fixons $x, y \in \mathbb{R}^2$ tels que $0, x, y$ ne sont pas alignés. Regardons alors le comportement de la suite de terme général:

$$x_n := x + \frac{1}{n+1} y.$$

On a $|x_n - x| \to 0$ mais $d(x_n, x) \geq \|x\| > 0$...

Remarque. Cet exemple n'est pas si artificiel que cela. En effet, le plan muni de la distance SNCF est un des exemples les plus simples de ce qu'on nomme un *arbre réel*.

---

3. Distance de Hausdorff

1. Il est évident que δ est symétrique, et satisfait l'inégalité triangulaire. La seule chose à vérifier est donc que, si $\delta(K_1, K_2) = 0$ alors $K_1 = K_2$. Supposons $\delta(K_1, K_2) = 0$. Alors, pour tout $x_1 \in K_1$, on a $\phi_{K_2}(x_1) = 0$. Mais $\phi_{K_2}(x_1) = \inf_{x_2 \in K_2} d(x_1, x_2)$, et par compacité, l'infimum est atteint en un point $x_2^* \in K_2$. Ceci montre que $x_1 \in K_2$. Comme ceci est vrai pour tout $x_1 \in K_1$, on a donc $K_1 \subset K_2$. Et comme K_1 et K_2 jouent des rôle symétriques, on a aussi $K_2 \subset K_1$.

Par ailleurs, δ est seulement une semi-distance sur l'ensemble des parties non-vides de $\mathbb{R}^n$ (on a $\delta(A, \overline{A}) = 0$)...

2. Supposons $\delta(K_1, K_2) \leq \epsilon$. Alors, pour tout $x_1 \in K_1$, on a $\Phi_{K_2}(x_1) = \inf_{x_2 \in K_2} d(x_1, x_2) \leq \epsilon$. Par compacité, l'infimum est atteint en un point $x_2^* \in K_2$, ce qui montre que l'on a $x_1 \subset B(x_2^*, \epsilon) \subset V_\epsilon(K_2)$. Par conséquent, $K_1 \subset V_\epsilon(K_2)$. Et comme K_1 et K_2 jouent des rôle symétriques, on a aussi $K_2 = V_\epsilon(K_1)$.

Réciproquement, supposons $K_1 \subset V_\epsilon(K_2)$ et $K_2 \subset V_\epsilon(K_1)$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Il existe un point $x_1^* \in K_1$ tel que $\Phi_{K_1}(x) = \inf_{x_1 \in K_1} d(x_1, y) = d(x_1^*, x)$. Comme $K_1 \subset V_\epsilon(K_2)$, il existe $x_2^* \in K_2$ tel que $d(x_1^*, x_2^*) \leq \epsilon$.

$$\Phi_{K_2}(x) \leq d(x, x_2^*) \leq d(x, x_1^*) + \epsilon = \Phi_{K_1}(x) + \epsilon.$$

On montre de même que $\Phi_{K_1}(x) \leq \Phi_{K_2}(x) + \epsilon$. Comme ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on en déduit que $\delta(K_1, K_2) := \|\phi_{K_1} - \phi_{K_2}\|_\infty \leq \epsilon$.

3. D'après la question précédente, il suffit de montrer que, pour toute partie compacte K de $\mathbb{R}^n$, et tout réel $\epsilon > 0$, on peut trouver un sous-ensemble fini A de K tel que

$$K \subset \bigcup_{x \in A} B(x, \epsilon). \tag{1}$$

Fixons donc une partie compacte (ou même un borné) K de $\mathbb{R}^n$ et un réel $\epsilon > 0$. Si on sait ce qu'est un compact dans un espace topologique général, on obtient très facilement l'existence d'une partie finie A de K vérifiant l'inclusion (1) : il suffit de considérer le recouvrement ouvert

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, \epsilon),$$

d'en extraire un sous-recouvrement fini (qui existe par compacité de K), et de définir A comme l'ensemble des centres des boules constituant ce recouvrement fini. Si on est moins savant (par exemple, si on sait simplement que les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont bornés), on peut constuire la partie A comme suit : on choisit un entier M tel que $K \subset B(0, M)$ et un entier q tel que $\frac{1}{q} < \frac{\epsilon}{2}$; on considère l'ensemble fini $E \subset \mathbb{R}^n$ formé des points de $B(0, M)$ dont les coordonnées sont de la forme $(\frac{p_1}{q}, \ldots, \frac{p_n}{q})$ avec $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{Z}$; pour chaque tel point $z \in E$, si $B(z, \frac{\epsilon}{2}) \cap K$ est non-vide, on choisit un point z' dans cette intersection ; la collection des points z' ainsi obtenu est la partie A recherchée.

---

4. Quelques questions sur intérieur, adhérence et frontière

1. Soient A et B deux parties d'un espace topologique X.

   a. $\mathring{A}$ est un ouvert contenu dans A, et $\mathring{B}$ est un ouvert contenu dans B. On en déduit que $\mathring{A} \cup \mathring{B}$ est un ouvert contenu dans $A \cup B$, ce qui montre l'inclusion $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$. L'inclusion réciproque est fausse : prendre par exemple $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

   b. L'égalité est vraie. En effet, $\overline{A \cup B}$ est un fermé qui contient A et B, ce qui montre l'inclusion $\overline{A \cup B} \supset \overline{A} \cup \overline{B}$. Réciproquement, $\overline{A}$ est un fermé contenant A et $\overline{B}$ est un fermé contenant B ; par suite, $\overline{A} \cup \overline{B}$ est un fermé contenant $A \cup B$, ce qui montre l'inclusion $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

   c. L'égalité est vraie. En effet, $A \overset{\circ}{\cap} B$ est un ouvert contenu dans A et dans B, ce qui montre l'inclusion $A \overset{\circ}{\cap} B \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}$. Réciproquement, $\mathring{A}$ est un ouvert contenu dans A et $\mathring{B}$ est un ouvert contenu dans B ; par suite, $\mathring{A} \cap \mathring{B}$ est un ouvert contenu dans $A \cap B$, ce qui montre l'inclusion $A \overset{\circ}{\cap} B \supset \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

d. $\overline{A}$ est un fermé contenant A et $\overline{B}$ est un fermé contenant B ; par suite, $\overline{A} \cap \overline{B}$ est un fermé contenant $A \cap B$, ce qui montre l'inclusion $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. L'inclusion réciproque est fausse : prendre à nouveau $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

e. En écrivant $\partial E = \overline{E} \setminus \mathring{E} = \overline{E} \cap (X \setminus \mathring{E}) = \overline{E} \cap \overline{X \setminus E}$ pour $E = A$, B et $A \cup B$, et en utilisant les points b. et d., on voit que l'inclusion $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$ est vraie, mais que l'inclusion réciproque est fausse en général.

f. Aucune des deux inclusions n'est vraie en général. Pour le voir, on peut prendre par exemple $X = \mathbb{R}$, $A = ([0,1] \cap \mathbb{Q}) \cup [2,4]$ et $B = ([0,1] \setminus \mathbb{Q}) \cup [3,5]$.

2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit B une boule ouverte de centre $x \in E$ et de rayon $r > 0$, et B' la boule fermée de centre x et de rayon r.

La boule B' est un fermé qui contient B, ce qui montre que B' contient l'adhérence de B. De plus, si $y \in B'$, et si on pose $y_n := x + \frac{n-1}{n}(y - x)$, on vérifie immédiatement que (y_n) est une suite de points de B qui tend vers y ; ainsi la boule B' est contenue dans l'adhérence de B.

La boule B est un ouvert contenu dans B', ce qui montre que B est contenu dans l'intérieur de B'. De plus, si y est dans le complémentaire de B, et si on pose $y_n := x + \frac{n+1}{n}(y - x)$, on vérifie immédiatement que (y_n) est une suite de points du complémentaire de B' qui tend vers y ; ainsi le complémentaire de B est contenu dans l'adhérence du complémentaire de B', autrement dit, B contient l'intérieur de B'.

Dans un espace métrique, ces deux assertions sont en général fausses. Ainsi, si on considére un ensemble X muni de la distance d définie par $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$, alors :

- l'adhérence de la boule ouverte de centre x et de rayon 1 est réduite au point x, qui n'est pas la boule fermée de centre x et de rayon 1 ;
- l'intérieur de la boule fermée de centre x et de rayon 1 est l'ensemble X tout entier, qui n'est pas la boule ouverte de centre x et de rayon 1.

3. Commençons par l'implication directe; supposons que f est continue. Soit $y \in f(\overline{A})$: cela signifie qu'il existe $x \in \overline{A}$ tel que $y = f(x)$. Soit U un ouvert contenant y. La fonction f étant continue, $f^{-1}(U)$ est un ouvert contenant x, donc nécessairement il existe $z \in A$ tel que $z \in f^{-1}(U)$, ce qui signifie que $f(z) \in U$, i.e. $U \cap f(A)$ n'est pas vide. D'où la conclusion.

Réciproquement, on suppose que pour tout sous-ensemble A, on a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. Soit F un fermé de Y; montrons que $f^{-1}(F) := G$ est un fermé de X. On a $f(\overline{G}) \subset \overline{f(G)}$. Or, remarquons que $f(G) = F$. Donc $\overline{G} \subset f^{-1}(F) = G$. Donc G est fermé.

4. Soit $y = (y_\alpha)$ un point de $\prod \overline{Y_\alpha}$. Montrons que $y \in \overline{\prod Y_\alpha}$. Soit $U = \prod U_\alpha$ un élement de la base pour la topologie produit, contenant y. Comme pour tout α, $y_\alpha \in \overline{Y_\alpha}$, pour tout α, il existe $z_\alpha \in Y_\alpha \cap U_\alpha$. D'où le résultat.

Réciproquement, soit $y = (y_\alpha) \in \overline{\prod Y_\alpha}$. Fixons $\alpha \in A$; soit U_α un ouvert contenant y_α. Or $V := \prod_{\alpha' \in A} U_{\alpha'}$, où $U_{\alpha'} = X_{\alpha'}$ si $\alpha' \neq \alpha$, est un ouvert contenant y. Donc il existe $z = (z_{\alpha'}) \in \prod Y_{\alpha'} \cap V$. En particulier $z_\alpha \in U_\alpha \cap Y_\alpha$. Autrement dit, $y_\alpha \in \overline{Y_\alpha}$. D'où le résultat.

5. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Montrons que les seules parties dont la frontière est vide sont l'ensemble vide et E tout entier. Soit donc A une partie de E différente de $\emptyset$ et de E. Soit $x \in A$ et $y \in E \setminus A$. Soit $t_0 = \sup\{t \in [0,1] \mid x + t(y - x) \in A\}$. Alors $x + t_0(y - x)$ est accumulé par des points de A (de la forme $x + t(y - x)$ avec $t < t_0$) et par des points de $E \setminus A$ (de la forme $x + t(y - x)$ avec $t > t_0$) ; ce point est donc situé dans la fontière de A, qui est par conséquent non-vide.

---

5. Distance sur la sphère

1. Il découle facilement des définitions que d est symétrique. Pour montrer l'inégalité triangulaire, il suffit de remarquer qu'en concaténant un chemin C^1 par morceaux joignant un point p à un point q et un chemin

C^1 par morceaux joignant q à un point r, on obtient un chemin C^1 par morceaux joignant p à r. Enfin, si p et q sont deux points de $\mathbb{S}^2$ tels que $d(p,q)=0$, alors, *a fortiori*, la distance entre p et q dans $\mathbb{R}^3$ est nulle, et, par suite, $p=q$.

2. Si p et q sont deux points de $\mathbb{S}^2$, alors $d(p,q)$ est plus grand que $\|p-q\|$ (la distance entre p et q dans $\mathbb{R}^3$), et plus petit que la longueur de l'arc de grand cercle $\gamma_{p,q}$. On en déduit facilement que

$$\|p-q\| \leq d(p,q) \leq \frac{\pi}{2}\|p-q\|.$$

Il en découle immédiatement que la topologie définie par d sur $\mathbb{S}^2$ coïncide avec la topologie induite par la topologie usuelle (*i.e.* la topologie définie par la norme $\|\cdot\|$) sur $\mathbb{R}^3$.

3. On travaille en coordonnées sphériques (θ,ϕ). Comme la sphère $\mathbb{S}^2$ et la distance d sont invariantes sous l'action des isométries vectorielles de $\mathbb{R}^3$, on peut faire agir une isométrie afin de ramener les points p et q sur le méridien $\theta=0$. Les points p et q ont des coordonnées $(0,\phi_0)$ et $(0,\phi_1)$. On considère un chemin $\gamma:[0,1]\to\mathbb{S}^2$, de classe C^1 par morceaux, joignant p à q ; et on écrit $\gamma(t)=(\theta(t),\phi(t))$. Supposons pour simplifier que γ est C^1. La longueur du chemin γ satisfait alors

$$L(\gamma)=\int_0^1 \sqrt{(\dot\phi(t))^2+\sin^2(\phi(t))(\dot\theta(t))^2}\,dt \geq \int_0^1 \left|\dot\phi(t)\right| dt = |\phi(0)-\phi(1)| = |\phi_0-\phi_1|.$$

Ceci montre que la longueur du chemin γ est supérieure à celle de l'arc de méridien (*i.e.* de l'arc de grand cercle) joignant p à q.

Dans le cas général C^1 par morceaux, il faut faire un peu de découpage...

Remarque. Quand un avion va de Paris à New-York, il prend (en gros) le chemin le plus court. Par conséquent, il suit le grand cercle qui passe par Paris et New-York, plutôt que le parallèle qui passe par ces deux villes. C'est pour cela il “monte” vers le pôle nord.

---

6. Distances ultramétriques.

1. Considérons un ensemble X muni d'une distance ultramérique d.

a. Soit x,y,z un triangle de X. Si $d(x,y)=d(y,z)$, alors le triangle x,y,z est isocèle. Sinon, quitte à renommer les points, on peut supposer

$$d(x,y)<d(y,z).$$

Alors le caractère ultramétrique donne

$$d(y,z)\leq \max[d(x,y),d(x,z)].$$

donc $\max[d(x,y),d(x,z)]=d(x,z)$ et $d(y,z)\leq d(x,z)$. Mais comme par ailleurs le caractère ultramétrique donne aussi

$$d(x,z)\leq \max[d(x,y),d(y,z)]=d(y,z),$$

nous obtenons $d(x,z)=\max[d(x,y),d(y,z)]=d(y,z)$. Donc le triangle x,y,z est isocèle.

b. Considérons une boule (ouverte, pour fixer les idées) $B(x,r)$, et un point y de cette boule. Alors pour tout point $z\in B(y,r)$, on a

$$d(x,z)\leq \max[d(x,y),d(y,z)]<r,$$

et donc $z\in B(x,r)$. Ceci montre que $B(y,r)\subset B(x,r)$. On remarque maintenant que x est un point de la boule $B(y,r)$; on peut donc échager les rôle de x et y dans les lignes ci-dessus, ce qui donnera l'inclusion $B(x,r)\subset B(y,r)$. Ainsi, on a l'égalité $B(x,r)=B(y,r)$; autrement dit, y est un centre de la boule $B(x,r)$.

Le cas d'une boule fermée se traite de même.

c. Considérons deux boules (ouvertes, pour fixer les idées) de centres respectifs z et z', et de rayons respectifs r et r'. Quitte à échanger les noms, supposons que $\max(r, r') = r$. Alors nous avons l'alternative suivante : son intersection est vide ou ne l'est pas. Si l'intersection est non vide, on considère z dans l'intersection, z est un centre de chacune de ces boules, et donc $B(z, r') \subset B(z, r)$ permet d'établir qu'une boule est incluse dans l'autre.

Le cas de boules fermées se traite de même.

d. Montrons qu'une boule ouverte est fermée. Pour ce faire, montrons que le compémentaire F de la boule ouverte centrée en x de rayon $r > 0$, est ouvert. Soit $y \in F$, donc $d(x, y) \geq r$. Montrons que $B(y, r) \subset F$: soit $z \in B(y, r)$; la relation ultramétrique donne :

$$r \leq d(x, y) \leq \max[d(x, z), d(y, z)],$$

avec $d(y, z) < r$. Donc $\max[d(x, z), d(y, z)] = d(x, z) \geq r$. Donc $z \in F$. Puis si $y \in B(x, r)$, alors pour tout $z \in B(y, r)$ on a $d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(x, z)) < r$, donc $B(y, r) \subset B(x, r)$, et l'égalité suit de la symétrie des rôles de x et y.

Montrons maintenant que la boule fermée centrée en x de rayon $r > 0$, est ouverte.

Soit $y \in \bar{B}(x, r)$, donc $d(x, y) \leq r$. Montrons que $B(y, r) \subset \bar{B}(x, r)$: soit $z \in B(y, r)$; avec la relation ultramétrique on a :

$$d(x, z) \leq \max[d(x, y), d(y, z)] \leq r,$$

Donc $z \in \bar{B}(x, r)$.

Remarque. Attention, la boule ouverte de centre x et de rayon r est fermée, mais en général, ce n'est pas la boule fermée de centre x et de rayon r !

e. Soit (x_n) une suite de points de X. Quels que soient $p < q$, l'inégalité ultramétrique, appliquée de manière répétée, donne

$$\begin{aligned} d(x_p, x_q) &\leq \max[d(x_p, x_{p+1}), d(x_{p+1}, x_{p+2}), \ldots, d(x_{q-1}, x - q)] \\ &\leq \sup_{r \geq p} d(x_r, x_{r+1}) \end{aligned}$$

Ceci implique clairement que (x_n) est de Cauchy dès que $d(x_n, x_{n+1})$ tend vers 0.

2. Les vérifications sont immédiates.

3. On vérifie d'abord aisément que la définition est cohérente (ne dépendant pas du choix du représentant de a/b), puis que $v_p(rs) = v_p(r) + v_p(s)$ pour r et s rationnels. La propriété ultramétrique — la seule non évidente — suit de la relation supplémentaire

$$v_p(x - y) \geq \min(v_p(x), v_p(y)).$$

Dans le cas d'entiers, cette relation est évidente, car en posant $k = \min(v_p(x), v_p(y))$, on a p^k qui divise à la fois x et y, donc $x - y$. Pour le cas général de rationnels, on introduit q un dénominateur commun. On applique la relation précédente à qx et qy et la relation établie plus haut sur la valuation du produit, et on obtient la relation recherchée.

Bien sûr, cette distance n'a rien à voir avec la distance usuelle (calculer $d(p^k, p^{k+1})$...).

En considérant des rationnels de la forme: $p^k a/(p^k b + 1)$ avec a et b entiers naturels, on voit rapidement que tout voisinage p-adique de 0 est dense dans $\mathbb{Q}$ pour la distance usuelle.

4. Comme dans la question précédente, on vérifie que $v(ST) = v(S) + v(T)$ et que $v(S - T) \geq \min(v(S), v(T))$. Le résultat en découle.

---

7. Théorème de plongement d'Arens-Fells.

On vérifie (en utilisant l'inégalité triangulaire) que $F : x \mapsto f_x$ va bien de X dans $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ et que cette application est isométrique.

Prouvons maintenant que l'image de l'application F est fermée dans un sous-espace de $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ (muni de la norme induite), à savoir le sous-espace

$$E := \mathrm{Vect}\big\{f_x,\ x \in X \setminus \{a\}\big\}.$$

Soit $g \in E$ tel que $g \neq f_x$ quel que soit x. Alors g est de la forme

$$g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_{x_i},$$

avec aucun α_i nul, et de plus $n \geq 2$ ou $\alpha_1 \neq 0, 1$. On note au passage que la famille f_x $(x \neq a)$ est libre et que l'écriture précédente est unique. Montrons que pour ε assez petit, la boule ouverte $B(g, \varepsilon)$ ne contient aucun f_x, ce qui prouvera que le complémentaire de l'image de F dans E est ouverte, et donc cela permettra de conclure. Considérons f_x tel que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_{x_i} - f_x \right\|_\infty < \varepsilon.$$

- Si $n \geq 2$, soit $1 \leq k \leq n$; on considère $A = \{x, a, x_i \text{ pour } i \neq k\}$. L'inégalité ci-dessus donne

  $$|\alpha_k| d(x_k, A) < \varepsilon.$$

  Pour ε assez petit, on a $d(x_k, A) = d(x_k, x)$ (car $d(x_i, x_j)$ pour $i \neq j$ a une valeur fixée qui ne peut être arbitrairement petite). On doit donc avoir

  $$|\alpha_k| d(x_k, x) < \varepsilon,$$

  et cela, pour chaque $k \in \{1, \ldots, n\}$. On voit que c'est impossible dès que ε est assez petit.

- Si $n = 1$, on utilise $A = \{a\}$. On obtient alors $|\alpha_1 d(x_1, a) - d(x, a)| < \varepsilon$. On voit déjà que $\alpha_1 < 0$ entraine une absurdité, pour ε assez petit (faire un dessin).

  Avec $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_1 d(x_1, x) < \varepsilon$, on voit que cela sera impossible pour ε assez petit indépendant de x.

  En effet, on peut distinguer les cas $\alpha_1 > 1$ et $\alpha_1 < 1$. Si $\alpha_1 > 1$, on écrit:

  $$\begin{aligned} d(x_1, a) &\leq \left| d(x_1, a) - \frac{d(x, a)}{\alpha_1} \right| + \frac{d(x, a)}{\alpha_1} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_1} \left(d(x, x_1) + d(x_1, a) \right), \end{aligned}$$

  puis

  $$\left(1 - \frac{1}{\alpha_1}\right) d(x_1, a) \leq \frac{\varepsilon}{\alpha_1} + \frac{\varepsilon}{\alpha_1^2},$$

  ce qui est impossible pour ε assez petit.

  Si $|\alpha_1| < 1$, on peut procéder de manière similaire, ce que je vous laisse le soin de faire.