École Normale Supérieure – Année 2012-2013
T.D. de Topologie, Analyse et Calcul différentiel

Corrigé de la feuille d'exercices n°10

---

1. Formes bilinéaires

1. Il faut vérifier que $dB_{(x,y)} \cdot (h,k) = B(x,k) + B(h,y)$ qui est bien linéaire et continue de norme $\leqslant \|B\|(\|x\|_E + \|y\|_F)$ si on munit $E \times F$ de la norme $\|(h,k)\| = \|h\|_E + \|k\|_F$. De plus cette différentielle est clairement linéaire en (x,y) et continue (de norme plus petite que $\|B\|$.)

2. On applique la question 1) et le théorème de composition des applications différentiables en écrivant Π comme la composée $\Omega \xrightarrow{(f,g)} E \times F \xrightarrow{B} G$. On trouve alors, pour tout $h \in E$ et $x \in \Omega$,

$$D\Pi_{(x)} \cdot (h) = B(Df_{(x)} \cdot (h), g(x)) + B(f(x), Dg_{(x)} \cdot (h)).$$

---

2. Différentiabilité des normes

1. Soit $(E, \| \, \|)$ un espace vectoriel normé. Soit $x \in E \setminus \{0\}$. On a $\|t\overrightarrow{x}\| = |t| \, \|\overrightarrow{x}\|$. D'où

$$\frac{\|t\overrightarrow{x}\| - 0}{t} \underset{t\to 0^+}{\rightarrow} \|\overrightarrow{x}\| \quad \text{et} \quad \frac{\|t\overrightarrow{x}\| - 0}{t} \underset{t\to 0^-}{\rightarrow} -\|\overrightarrow{x}\| \neq \|\overrightarrow{x}\|$$

si $\overrightarrow{u} \neq 0$. Ceci montre que la norme n'est pas différentiable en 0.

Soit maintenant $x \in E \setminus \{0\}$, tel que $\| \, \|$ est différentiable en x. Alors pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned} \|tx + h\| = t\|x + h/t\| &= t\|x\| + tD\| \, \|(x) \cdot \frac{h}{t} + t\frac{h}{t}o(h) \\ &= t\|x\| + D\| \, \|(x) \cdot h + ho(h) \end{aligned}$$

par linéarité de $D\| \, \|_{(x)}$. D'où, $\| \cdot \|$ est différentiable en tx (et sa différentielle coincide en ce point avec celle en x). Ceci montre que l'ensemble des points de différentiabilité est un demi-cône ouvert.

2. La fonction $x \mapsto N(x) := \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ est différentiable sur $H \setminus \{0\}$ d'aprés la question 1 de l'exercice 1 et le théorème de composition des applications différentiables.

3. Comme $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_2)$ est de Hilbert, on vient de voir que $\| \cdot \|_2$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

Montrons que $\| \cdot \|_1$ est exactement différentiable sur $\mathbb{R}^2$ privé de l'axe des abscisses et de l'axe des ordonnées. On a $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$. Si $\| \cdot \|_1$ était différentiable en $(x,0)$, alors la dérivée partielle

$$\frac{\partial \| \cdot \|_1}{\partial y}(x,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\|(x,t)\|_1 - \|(x,0)\|_1}{t}$$

serait bien définie. Mais

$$\frac{\|(x,t)\|_1 - \|(x,0)\|_1}{t} = \frac{|t|}{t} = 1 \text{ si } t > 0 \text{ et } -1 \text{ si } t < 0.$$

Donc $\| \cdot \|_1$ n'est pas différentiable au point $(x,0)$ (quel que soit $x \in \mathbb{R}$). Un argument similaire assure que $\| \cdot \|_1$ n'est pas différentiable en $(0,y)$ (quel que soit $y \in \mathbb{R}$). Montrons que $\| \cdot \|_1$ est différentiable partout ailleurs. Remarquons que $\mathbb{R}^2 - (\{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\})$ est une réunion de 4 ouverts disjoints.

En particulier si $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - (\{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\})$ alors il existe un voisinage ouvert U de (x,y) tel que pour tout $(h,k) \in U$, on a

$$\|(h,k)\| = h + k \text{ si } x > 0,\ y > 0, \qquad \|(h,k)\| = h - k \text{ si } x > 0,\ y < 0,$$

$$\|(h,k)\| = -h + k \text{ si } x < 0,\ y > 0, \qquad \|(h,k)\| = -h - k \text{ si } x < 0,\ y < 0.$$

Or les différentes expressions sont toutes polynomiales donc différentiables (et même $\mathcal{C}^\infty$). On en conclut que $\|\cdot\|_1$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2 - (\{(0,x) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\})$.

De manière similaire, on montre que $\|\cdot\|_\infty$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ privé des diagonales $x = \pm y$.

4. On montre que si la distance était différentiable, alors sa différentielle serait nulle (à l'aide de l'inégalité triangulaire); cela impliquerait que la distance est localement constante, ce qui est absurde.

En effet, soit $(x_0, y_0) \in \Omega^2$. Remarquons que $d(x_0, x_0) = 0$; le minimum est donc atteint, ce qui implique que $D_1 d(x_0, x_0) = D_2 d(x_0, x_0)$. Ensuite on écrit $d(x_0 + th, y_0) - d(x_0, y_0) \leq d(x_0 + th, x_0)$ et on fait tendre t vers 0, ce qui donne $D_1 d(x_0, y_0) = 0$. De même, on a $D_2 d(x_0, y_0) = 0$.

---

3. Dérivée directionnelle

1. Supposons f différentiable en x. Par définition

$$\begin{aligned} h'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{h(t) - h(0)}{t} &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\overrightarrow{u}) - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{Df(x)(t\overrightarrow{u}) + t\overrightarrow{u}\varepsilon(t)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{t(Df(x)(\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{u}\varepsilon(t))}{t} \\ &= \partial f_{(x)}(\overrightarrow{u}). \end{aligned}$$

On a utilisé la linéarité de $Df_{(x)}$ dans l'avant dernière ligne. Conclusion :

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(x) = Df(x)(\overrightarrow{u}). \tag{1}$$

On remarquera que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ est en particulier la dérivée directionnelle de f en x suivant le vecteur e_i de la base canonique.

2. f_{pq} étant une fraction rationnelle sur $\mathbb{R}^2 - (0,0)$ elle est de classe C^1 (et même C^∞) sur $\mathbb{R}^2 - (0,0)$. On écrit en coordonnés polaires $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ ($r > 0$ si (x,y) non nul). On a alors $f_{pq}(r,\theta) = r^{p+q-2}\cos^p(\theta)\sin^q(\theta)$. Donc $f_{pq}(r,\theta) \underset{r \to 0}{\longrightarrow} 0$ si et seulement si $p + q - 2 > 0$, c'est à dire $p + q \geq 3$ ($p, q \in \mathbb{N}$).

Montrons que f_{pq} est différentiable en $(0,0)$ si $p + q \geqslant 4$. On a

$$|f_{pq}(x,y) - f_{pq}(0,0)| = \left| \frac{x^p y^q}{x^2 + y^2} \right| \leqslant \|(x,y)\|_2^{p+q-2}$$

où$\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ est la norme euclidienne. Comme $p + q - 2 \geq 2$, f_{pq} est différentiable en $(0,0)$ et $Df(0,0) = 0$.

Pour $p + q = 3$ $p, q \neq 0$ (l'autre cas est symétrique), montrons que f_{pq} n'est pas C^1 en $(0,0)$. On vérifie immédiatement que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ s'annulent. Donc, si f était C^1, la différentielle serait nulle, ce qui n'est pas le cas car elle a des dérivées directionnelles non-nulles:

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{(\cos(\theta_0), \sin(\theta_0))}}(0,0) = \cos^p(\theta_0)\sin^q(\theta_0).$$

Si $p = 3, q = 0$ (ou symétriquement $p = 0, q = 3$), on peut montrer que les dérivées partielles ne sont pas continues en 0.

3. Un calcul aisé assure que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions et que ces dérivées sont nulles (f est donc Gatteaux-diff en 0). En revanche $f(x^4, x) = 1/x$ n'est pas borné quand x est au voisinage de 0.

---

4. Une fonctionnelle non linéaire

Corrigé en classe.

---

5. Fonctions homogènes et relations d'Euler

1. On considère la fonction réelle $t \mapsto f(tx)$ et on dérive la relation $f(tx) = t^n f(x)$ par rapport à t, en utilisant le théorème de composition des dérivées pour la fonction de droite:

$$\partial f_{(tx)} \cdot (x) = nt^{n-1} f(x)$$

ce qui pour $t = 1$ donne $\partial f_{(x)} \cdot (x) = nf(x)$. On fixe désormais $t > 0$ et on prend la différentielle par rapport à x dans la relation $f(tx) = t^n f(x)$. On obtient, pour tout $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^p$ et tout $h \in \mathbb{R}^p$,

$$Df(tx) \cdot (th) = t^n Df(x) \cdot (h) \Longleftrightarrow tDf(tx) \cdot (h) = t^n Df(x) \cdot (h)$$

par linéarité de $Df(tx)$. En divisant par $t > 0$, on obtient le résultat cherché.

2. Les calculs de la question précédente nous assurent que $x \mapsto Df(x)$ est elle-même homogéne de degré $k - 1$. On conclut alors par récurrence.

3. Cela n'est pas vrai en général : prendre $E = \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, $F = \mathbb{R}$, $k = 1$. On introduit une fonction ϕ telle que $\phi(\cdot + \pi) = -\phi(\cdot)$ et on pose $f(re^{i\theta}) = r\phi(\theta)$, qui en général n'est pas linéaire !

---

6. Déterminant

L'application $M \mapsto \det(M)$ est polynomiale en les coefficients m_{ij} de $M = (m_{ij})_{i,j=1\ldots n}$. Elle est donc de classe C^1 (et même analytique). Pour calculer sa différentielle, il suffit donc de calculer ses dérivées partielles (prises ans la base des E_{ij}, les matrices dont les coefficients $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$). Or $\mathrm{id} + tE_{ij}$ est toujours triangulaire; d'où $\det(\mathrm{id} + tE_{ij}) = 1 + t\delta_{ij}$. Par conséquent: $\frac{\partial \det}{\partial E_{ij}}(\mathrm{id}) = \delta_{ij}$. On conclut que, pour tout $H = (h_{ij}) = \sum_{i,j=1}^n h_{ij}\, E_{ij}$,

$$d \det{}_{(\mathrm{id})}(H) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \det}{\partial E_{ij}}(\mathrm{id})\, h_{ij} = \sum_{i=1}^n h_{ii} = \mathrm{trace}(H).$$

Soit M inversible et $\varphi : M(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(N) = \det(M^{-1}N)$. Par multiplicativité du déterminant, on a $\varphi(N) = \det(M^{-1}) \det(N)$ donc $D\varphi(N) \cdot (H) = \det(M^{-1})\, D \det(N) \cdot (H)$. En calculant la différentielle de φ comme une application composée on trouve aussi $D\varphi(N) \cdot (H) = D \det(M^{-1}N)\big(M^{-1}(H)\big)$. En identifiant les deux formules précédentes pour $N = M$, on obtient

$$\det(M^{-1})\, D \det(M) \cdot (H) = D \det(\mathrm{id})\big(M^{-1}H)\big)$$

d'où $D \det_{(M)}(H) = \det(M)\mathrm{trace}(M^{-1}H)$.

On a donc, pour tout M inversible, $D \det(M).(H) = \mathrm{trace}({}^t\mathrm{com}(M)H)$. Par densité des matrices inversibles, cette formule reste vraie pour tout M.

---

7. Exponentielle de matrice

1. Il suffit de développer la série entière (normalement convergente sur tout borné) et on obtient immédiatement $d\exp_0 = Id$.

2. Chaque terme de la série est la composée d'une application multilinéaire continue et de la diagonale $A \mapsto (A,\dots,A) \in M(n,\mathbb{R})^k$. Alors, par dérivation sous le signe somme on obtient que la différentielle en A est donnée par

$$D\exp(A)\cdot H = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\sum_{l=0}^{n-1} L_A^l R_A^{n-1-l} H.$$

3. On commence par établir la relation suivante

$$\begin{aligned}(-\operatorname{ad} A)^k H &= \sum_{p+q=k} \frac{(-1)^p (k+1)!}{p!(q+1)!} A^p \sum_{l=0}^{q} L_A^l R_A^{q-l} H \\ &= \sum_{p+q=k} (-1)^p \binom{k+1}{p} A^p \sum_{l=0}^{q} L_A^l R_A^{q-l} H \qquad (2)\end{aligned}$$

qui se démontre par récurrence. Pour $k = 1$ cette relation est évidente.

Le passage de k à $k+1$ se fait de la façon suivante :

- on écrit
$$(-\operatorname{ad} A)^{k+1} H = [(-\operatorname{ad} A)^k H]A - A[(-\operatorname{ad} A)^k H]. \qquad (3)$$
Notons I et II les termes de gauche et de droite (avec le signe moins inclus), respectivement de (3).
- On développe I et II avec (2). On regroupe les termes selon les puissances de A à gauche dans ce qu'on obtient. (Gardons à l'esprit que la somme des puissances de A à gauche et à droite fait $k+1$ dans tous les cas.)
- Si cette puissance est 0 le terme vient de I et si cette puissance est $k+1$ le terme vient de II. On vérifie dans le premier cas que le coefficient correspondant est 1 (correspond à $p = 0$, $q = k$ et $l = 0$ dans (2)). Dans le deuxième cas c'est
$$-\sum_{p+q=k} (-1)^p \binom{k+1}{p} = -(1-1)^{k+1} + (-1)^{k+1} = (-1)^{k+1},$$
(correspond à $l = q$ dans (2) et on multiplie par $-A$). Ils correspondent bien à ce qu'ils devraient dans la formule (2) au rang $k+1$.
- pour les autres termes : un terme $A^\mu H A^\nu$ provient de deux types d'origines :
  - d'un terme $(-1)^p\binom{k+1}{p} A^p A^l H A^{q-l}$ avec $p + l = \mu - 1$ de (2) qui a été multiplié à gauche par $-A$.
  - d'un terme $(-1)^p\binom{k+1}{p} A^p A^l H A^{q-l}$ de (2) avec $p + l = \mu$ qui a été multiplié à droite par A.

  Nous obtenons respectivement les termes
  - $(-1)^{\mu-l}\binom{k+1}{\mu-l-1} A^\mu H A^{k+1-\mu}$
  - $(-1)^{\mu-l}\binom{k+1}{\mu-l} A^\mu H A^{k+1-\mu}$

  Additionnons ces deux termes, la relation du triangle de Pascal donne :
$$(-1)^{\mu-l}\binom{k+2}{\mu-l} A^\mu H A^{k+1-\mu}$$
  Et donc la somme de tous les termes avec puissance μ à gauche (en sommant en l) est :
$$\sum_{l=0}^{\mu} (-1)^{\mu-l}\binom{k+2}{\mu-l} A^\mu H A^{k+1-\mu}.$$
  On vérifie alors que les coefficients correspondent à (2) à l'ordre $k+1$.

Ensuite il ne reste plus qu'à faire la somme en k pour obtenir la relation annoncée:

$$e^{-L_A} \circ D\exp(A) \cdot H = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!}(-\mathrm{ad}\, A)^k H.$$

4. Si A est diagonalisable, plaçons-nous dans une base de diagonalisation $(e_1, \ldots, e_n)$. On définit la matrice E_{ij} (dans cette base) comme matrice dont les termes $(E_{ij})_{kl}$ valent $\delta_{ik}\delta_{jl}$. En notant λ_i les valeurs propres, la matrice E_{ij} est alors vecteur propre de L_A et de R_A (associés aux valeurs propres λ_i, λ_j). Ces matrices forment donc une base de diagonlaisation de $(-\mathrm{ad}\, A)$ dont les n^2 valeurs propres sont les $\lambda_i - \lambda_j$.

Si A est nilpotent (par commutativité de L_A et R_A), $\mathrm{ad}\, A$ l'est aussi. Il suit que si on a une décomposition de Dunford $A = D + N$, alors $\mathrm{ad}\, A = \mathrm{ad}\, D + \mathrm{ad}\, N$ donne la décomposition de Dunford de $\mathrm{ad}\, N$ (la commutativité étant toujours respectée).

5. On reprend la formule $e^{-L_A} \circ d\exp(A)H = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!}(-\mathrm{ad}\, A)^k H$. Comme e^{-L_A} est inversible (d'inverse e^{L_A}), $d\exp(A)$ est inversible quand la série à droite l'est. On note $\varphi(z) = \frac{e^{-z}-1}{z}$, qui est une fonction holomorphe partout où elle ne s'annule pas. La série à droite est $\varphi(\mathrm{ad}\, A)$. On se place dans une base où $\mathrm{ad}\, A$ est triangulaire, on voit que la série est inversible quand les valeurs propres n'annulent pas φ. Ce qui a lieu quand les valeurs propres de $\mathrm{ad}\, A$ valent $k2i\pi$ avec $k \neq 0$.

Donc $d\exp(A)$ est inversible si et seulement si la différence entre deux valeurs propres de A n'atteint jamais $k2i\pi$, $k \neq 0$.

---

8. Distance à un fermé.

1. Il est clair que $\varphi_\varepsilon(y) \leq \varphi_0(y)$ pour tout y. Soit $\eta > 0$, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que tout point de F_ε est à distance au plus η de F_0 (raisonner par l'absurde et utiliser un argument de compacité). Il suit alors que pour de tels ε on a $\varphi_\varepsilon \geq \varphi_0 - 2\eta\|y\|$ pour tout y. Il suit que φ_ϵ converge vers φ_0 unifromément pour $y \in \mathbb{S}^{n-1}$.

2. Pour $x \in Ua$ et y dans $\mathbb{R}^n$, on introduit un z réalisant le minimun (qui existe bien par compacité), et on développe $\delta(x+y) \leq \|x+y-z\|^2 = \delta(x) + 2\langle y, x-z\rangle + \|y\|^2$. On prend le minimun en z et on obtient une première inégalité. Pour l'autre sens : pour chaque y on introduit un z_y réalisant le minimum de la distance de $x+y$ à F. Par le même argument de compacité que précédemment, on peut voir que $d(z_y, \{z \in F \mid \; d(x,z) = d(x,F)\}) = o(1)$ lorsque $y \to 0$. On a alors

$$\begin{aligned}
\delta(x+y) &= \|x+y-z_y\|^2 \\
&= \|x-z_y\|^2 + 2\langle y, x-z_y\rangle + \|y\|^2 \\
&\geq \delta(x)^2 + 2\langle y, x-z_y\rangle + \|y\|^2.
\end{aligned}$$

D'après la question précédente, l'erreur restante est en $o(\|y\|)$.

3. Si la distance $d(x,F)$ est atteinte en un unique point de F, on peut enlever le minimum dans le définition de φ et on déduit la différentiabilité de δ en x.

Supposons maintenant que la distance $d(x,F)$ est atteinte au moins deux points z_1, z_2 de F. Supposons que $x - z_1$ et $x - z_2$ ne sont pas négativement colinéaires. Alors, si y_1 et y_2 sont positivement colinéaires à $x - z_1$ et $x - z_2$ respectivement, alors on a $\varphi(x, y_1) = d(x,F)\|y_1\|$ et $\varphi(x, y_2) = d(x,F)\|y_2\|$. On a bien sûr $\varphi(x, y_1 + y_2) \leq d(x,F)\|y_1 + y_2\| < d(x,F)(\|y_1\| + \|y_2\|)$ car y_1 et y_2 ne sont pas négativement colinéaires. Donc $\varphi(x,y)$ n'est pas linéaire en y. Le cas où $x - z_1$ et $x - z_2$ ne sont pas positivement colinéaires se traite de même.
