École Normale Supérieure – Année 2012-2013
T.D. de Topologie, Analyse et Calcul différentiel

Corrigé de la feuille d'exercices n°11

---

1. Résolution d'une équation différentielle via le théorème d'inversion locale

1. Il est évident que ψ est bilinéaire (et symétrique). L'inégalité triangulaire donne

$$\begin{aligned} \|\psi(y,z)\|_\infty &\leqslant \|h\|_\infty \cdot \|y'\|_\infty \cdot \|z'\|_\infty + \|k\|_\infty \cdot \|y\|_\infty \cdot \|z\|_\infty \\ &\leqslant \big(\|h\|_\infty + \|k\|_\infty\big)\|y\|_E \cdot \|h\|_E \end{aligned}$$

Ceci montre que ψ est continue et de norme $\|\psi\| \leqslant \|h\|_\infty + \|k\|_\infty$.

2. Pour tout $y, \ell \in E$, on a
$$\phi(y+\ell) - \phi(y) = \ell" + 2\psi(y,\ell) + \psi(\ell,\ell).$$
L'application $\ell \mapsto \ell"$ est linéaire continue de E dans F (de norme majorée par 1). La question précédente montre que l'application $\ell \mapsto 2\psi(y,\ell)$ est elle aussi linéaire et continue. La question précédent montre également que $\psi(\ell,\ell) = o(\|\ell\|_E)$. De tout ceci, on déduit que ϕ est différentiable en y et que $d\phi_y \cdot (\ell) = \ell" + 2\psi(y,\ell)$. En particulier, $d\phi_0 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ est l'opérateur de dérivation seconde. La continuité de $y \mapsto d\phi_y$ découle du fait que $y \mapsto d\phi_y$ est affine et de la question précédente ($\|d\phi_y - d\phi_z\| \leqslant (\|h\|_\infty + \|k\|_\infty) \cdot (\|y-z\|_E)$).

3. Pour appliquer le théorème d'inversion locale à ϕ en 0, il faut vérifier que $d\phi_0 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ est un bijective de E dans F. Deux fonctions affines qui coincident en deux points distincts sont égales et deux fonctions C^2 ont même dérivées secondes ssi elles différent par une fonction affine. Par conséquent deux fonctions de E qui ont même dérivée secondes sont égales. De plus soit $f \in F$, et $\psi(f) : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $\psi(f)(t) = \int_0^t \int_0^u f(s)\,ds\,du \;-(\int_0^1 \int_0^u f(s)\,ds\,du)t$. Alors ψ est C^2, s'annule en 0, 1 et $\psi(f)$. On a bien montré que $d\phi_0$ est bijective. On peut appliquer le théorème d'inversion locale en 0 pour ϕ. Il suit qu'il existe un voisinage U de 0 dans E, un voisinage V de $\phi(0) = 0$ tel que ϕ restreint à U soit un difféomorphisme de U sur V. Comme V est ouvert, il existe $\epsilon > 0$ tel que la boule ouverte $B(0,\epsilon) \subset V$. Puisque $\phi_{|U} : U \to V$ est surjective, pour tout $f \in B(0,\epsilon)$, il existe $y \in E$ tel que $\phi(y) = f$, c'est à dire, vu la définition de ϕ, une solution de l'équation différentielle $y'' + h(x)y'^2 + k(x)y^2 = f(x)$ qui s'annule en 0 et en 1.

---

2. Une preuve du théorème de D'Alembert-Gauss

Commençons par remarquer que S est fini, et qu'il suit que $\mathbb{C} \setminus P(S)$ est connexe. On note $X := \mathbb{C} \setminus S$. Il suffit de montrer que $P(X) = \mathbb{C} \setminus P(S)$ pour conclure. Par connexité de $\mathbb{C} \setminus P(S)$, il suffit donc de montrer que $P(X) \cap (\mathbb{C} \setminus P(S))$ est ouvert et fermé dans $\mathbb{C} \setminus P(S)$. Le caractère ouvert est une utilisation classique de l'inversion locale : en effet, la différentielle de P en un point $z \in \mathbb{C} \setminus S$ est une similitude de rapport $P'(z)$, inversible par construction. On peut donc appliquer le Théorème d'Inversion Locale pour déduire une homéomorphisme entre un voisinage de z dans $\mathbb{C}$ et un voisinage de $P(z) \in \mathbb{C}$! Pour la fermeture, on utilise le fait que $|P(z)| \to +\infty$ lorsque $|z| \to +\infty$. Donc si z_n est une suite de $\mathbb{C} \setminus S$ telle que $(P(z_n))$ converge vers $l \in \mathbb{C} \setminus P(S)$, alors la suite (z_n) est bornée, et donc on peut en extraire une sous-suite qui converge vers un certain z. Par continuité, on a $P(z) = l$. De plus, $l \in \mathbb{C} \setminus P(S)$ donc $z \in \mathbb{C} \setminus P^{-1}(P(S)) \subset \mathbb{C} \setminus S$, et donc $l = P(z) \in P(\mathbb{C} \setminus S)$. Par conséquent, $P(\mathbb{C} \setminus S)$ est fermé dans $\mathbb{C} \setminus P(S)$.

---

3. Isométries de $\mathbb{R}^n$

1. Pour tout $x, h \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\|df(x) \cdot (th) + \|th\|\epsilon(t)\| = \|f(x+th) - f(x)\| = \|th\| = \mid t \mid \ \|h\|.$$

En divisant par $|t|$, et en faisant tendre t vers 0, on obtient

$$\|df(x) \cdot (h)\| = \|h\|$$

donc $dfx : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une isométrie linéaire.

2. Puisque $df(x)$ est une isométrie linéaire, on a

$$\langle df_{(x)} \cdot (h), df_{(x)} \cdot (k) \rangle = \langle h, k \rangle. \tag{1}$$

En différentiant, on obtient, pour tout $h, k, l \in \mathbb{R}^n$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle d^{(2)} f_{(x)}(h,l), df_{(x)}(k) \rangle + \langle df_{(x)}(h), d^{(2)} f_{(x)}(k,l) \rangle = 0.$$

3. Il suit de la question 2. que $g(h,k,l) = -g(k,h,l)$. De plus, d'après le lemme de Schwarz (f est de classe C^2), on a $d^{(2)} f_{(x)}(h,l) = d^{(2)} f_{(x)}(l,h)$. D'où $g(h,k,l) = g(l,k,h)$ pour tout $h,k,l \in \mathbb{R}^n$. Il suit en utilisant successivement les deux identités précédentes (valables pour tout $h,k,l \in \mathbb{R}^n$) que

$$g(h,k,l) = g(l,k,h) = -g(k,h,l) = -g(l,h,k)$$

$$= g(h,l,k) = g(k,l,h) = -g(l,k,h) = -g(h,k,l).$$

D'où $g(h,k,l) = 0$ pour tout $h,k,l \in \mathbb{R}^n$.

4. Puisque $df_{(x)}$ est une isométrie, $df_{(x)}$ est injectif, et comme $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, $df_{(x)}$ est un isomorphisme. D'où, $g(h,k,l) = 0 = \langle d^{(2)} f_{(x)}(h,l), df_{(x)}(k) \rangle$ pour tout h,k,l entraine que $d^{(2)} f_{(x)} = 0$ (par surjectivité de $df_{(x)}$).

5. Comme $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs, $d^{(2)} f_{(x)} = 0$ entraine que $df_{(x)} = \varphi$ où φ est une application linéaire (continue) (indépendante de x). Mais comme $df_{(x)}$ est une isométrie (linéaire), il suit que φ aussi. Toujours puisque $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs, on en déduit que $f = c + \varphi$ est une isométrie affine.

---

4. Lemme de Morse

1. Bien sûr ϕ est C^∞ car polynomiale (en les coefficients). Sa différentielle s'obtient aisément :

$$d\phi(I) \cdot (H) = {}^tHA_0 + A_0H = {}^t(A_0H) + A_0H.$$

car $A_0 \in S(n, \mathbb{R})$. L'application $M \mapsto {}^tM + M$ est une surjection sur les matrices symétriques (car une telle matrice vérifie $S = {}^tS/2 + S/2$). Comme A_0 est inversible, il suit que $d\phi(I)$ est surjective. Son noyau est composé des matrices $A_0^{-1}M$ avec M antisymétrique.

On considère alors l'application

$$M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R}) \times A_n(\mathbb{R}), \quad M \mapsto (\phi(M), {}^t(A_0M) - A_0M)$$

L'étude ci-dessus de $d\phi_{(I)}$ montre que la différentielle en I de cette application est inversible. Le théorème d'inversion locale donne une application ψ réciproque à celle-ci. On en déduit le résultat (en posant $P(A) = \psi(A, 0)$).

2. Le théorème de Taylor avec reste intégral donne :

$$f(x) = \int_0^1 (1-t) d^2 f_{tx}(x,x) dt = {}^txQ(x)x$$

où $Q(x)$ est la matrice de la forme quadratique $u \mapsto \int_0^1 (1-t) d^2 f_{tx}(u,u) dt$. On a $Q(0) = \frac{1}{2} d^{(2)} f(0)$, donc, par hypothèse, $Q(0)$ est symétrique et inversible. D'après la question 1, il existe donc un voisinage U de 0 dans $\mathbb{R}^n$, et une application P de $Q(U)$ dans $M_n(\mathbb{R})$, de classe C^1, telle que, pour $x \in U$

$$Q(x) = {}^t(P(Q(x)))Q(0)(P(Q(x)).$$

Par ailleurs, le théorème de réduction des formes quadratiques implique qu'il existe une matrice inversible P_0 telle que, si on pose $u = P_0 y$, alors

$${}^t y Q(0) y = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_n^2.$$

Par conséquent, si on pose $u := P_0 P(Q(x)) x$, alors

$$f(x) = {}^t x Q(x) x = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_n^2.$$

3. L'application est directe : on voit que localement autour d'un point critique non dégénéré, les points ne sont plus critiques.

---

5. Valeurs régulières d'une fonction localement injective

Notons Ω' l'ensemble étudié. Qu'il soit ouvert ne dépend pas de l'injectivité locale de f : on a que l'ensemble des matrices $m \times n$ injectives est ouvert dans l'ensemble des matrices $m \times n$ (prendre un mineur non nul). Le seul problème est la densité. Mais à supposer celle-ci non réalisée, on peut trouver un ouvert non vide dans lequel le rang de df est toujours inférieur ou égal à $m-1$. Notons k le rang maximal sur cet ouvert ; il n'est pas difficile de voir que l'ensemble des points où ce rang est exactement k est un ouvert non vide (utiliser le caractère sci du rang). En utilisant le théorème du rang constant, on voit que l'application ne peut être localement injective.

---

6. Théorème des extrema liés, *dit aussi* des multitplicateurs de Lagrange

1. On suppose que le point a est un extremum local de F sur Z. On va montrer l'existence de coefficients réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, appelés *multiplicateurs de Lagrange*, tels que la relation suivante soit satisfaite :

$$dF(a) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i dg_i(a).$$

a. On prend une base de $\mathbb{R}^n$ qui satisfait que la restriction de dg_a au sous-espace $\{(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)\}$, soit inversible. Alors l'existence de φ et la description locale de Z $(= \{x \in U,\, g(x) = 0\})$ provient directement du théorème des fonctions implicites.

b. Le sous-espace de $\mathbb{R}^n$

$$E := \Big\{(h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n \;/\; (h_1, \ldots, h_k) = d\varphi_\alpha(h_{k+1}, \ldots, h_n)\Big\},$$

est inclus dans le noyau de dg_a : il suffit de différencier $g(\varphi(x_{k+1}, \ldots, x_n), x_{k+1}, \ldots, x_n) = 0$. Ensuite, comme cet espace est de dimension au moins $n-k$, l'égalité suit.

c. Comme F réalise un minimun sur Z, on a $dh_\alpha = 0$ où $h(x_{k+1}, \ldots, x_n) := F(\varphi(x_{k+1}, \ldots x_n), x_{k+1}, \ldots, x_n)$. Il suit avec la question précédente que $\operatorname{Ker} dg(a) \subset \operatorname{Ker} dF(a)$.

On prend un supplémentaire H de $\operatorname{Ker} dg(a)$ dans $\mathbb{R}^n$, et on pose $\Lambda : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ par $\Lambda := dF(a) \circ (dg(a)|_H)^{-1}$. On voit que $dF(a) = \Lambda \circ dg(a)$ (puisque l'égalité a lieu sur H et sur $\operatorname{Ker} dg(a)$). Ce qui se traduit exactement par la relation voulue.

2. On note $\Psi : U(\alpha) \to \mathbb{R}^n$ l'application $F \circ (\varphi, \mathrm{id})$ qui est de classe C^∞ par construction ($U(\alpha)$ est un petit voisinage de α). On note $\widetilde{\varphi} := (\varphi, \mathrm{id})$. Dans un voisinage de a, on a $Z_{|U(a)} = \widetilde{\varphi}(U(\alpha))$ d'après la question 1. Il nous suffit maintenant détudier le comportement de la fonction Ψ au voisinage de α (qui est un point critique de Ψ par la question 1.)

En différentiant deux fois $F \circ \widetilde{\varphi}$, on trouve

$$d^{(2)}\Psi(\alpha) = d^{(2)}F(a)\cdot(d\widetilde{\varphi}(\alpha), d\widetilde{\varphi}(\alpha)) + dF(a)\cdot(d^{(2)}\widetilde{\varphi}(\alpha)) = d^{(2)}F(a)\cdot(d\widetilde{\varphi}(\alpha), d\widetilde{\varphi}(\alpha)) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i dg_i(a)\cdot(d^{(2)}\widetilde{\varphi}(\alpha)). \tag{2}$$

Par ailleurs, $g \circ \widetilde{\varphi} = 0$, d'où en différentiant deux fois:

$$0 = d^{(2)}g(a) \cdot (d\widetilde{\varphi}(\alpha), d\widetilde{\varphi}(\alpha)) + dg(a) \cdot (d^{(2)}\widetilde{\varphi}(\alpha)). \tag{3}$$

Injectant (3) dans (2), on obtient que la Hessienne $Hess_\alpha(\Psi)$ est égale à la restriction à T_aZ de $d^{(2)}F(a) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, d^{(2)}g_i(a)$ (en remarquant que $T_aZ := a + \operatorname{Ker} dg(a) = a + d\widetilde{\varphi}(\alpha)(\mathbb{R}^{n-k})$ par la question 1). D'après le cours $Hess_\alpha(\Psi)$ définie positive implique que α est un minimum local strict et réciproquement si α est un minimum, $Hess_\alpha(\Psi)$ est positive. Les mêmes résultats ont donc aussi lieu pour $Hess_a(F)$.

3. La fonction $f : [0, +\infty[^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y,z) = \frac{xyz}{(x+y+z)^2} \text{ si } (x,y,z) \neq (0,0,0)$$
$$f(0,0,0) = 0$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $(]0,+\infty[)^3$, a fortiori de classe $\mathcal{C}^1$ et continue en 0. Soit $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2+y^2+z^2 = a^2\}$ qui est compact ($a > 0$). Il est clair que f admet un minimum (qui vaut clairement 0 et est atteitn dés qu'une des variables est nulle) et un maximum sur K. On applique le théorème des extrema liés sur $K' := K \cap \{(x,y,z)\, x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$ pour trouver le maximum. Notons que $K = \Phi^{-1}(0)$ où $\Phi(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-a^2$ est de classe C^1. On a

$$Jac(\Phi)(x,y,z) = \big(2x,\ 2y,\ 2z\big) \neq 0$$

si $(x,y,z) \in K'$ (car $(0,0,0) \notin K'$), i.e., $d\Phi(x,y,z)$ est non nulle en tout point $(x,y,z) \in K'$. Le théorème des multiplicateurs de Lagrange assure alors que le maximum de f est atteint en un point (x,y,z) tel que $df_{(x,y,z)}$ soit colinéaire à $d\Phi_{(x,y,z)}$. Or

$$Jac(f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{yz(y+z-x)}{(x+y+z)^3} & \frac{xz(x+z-y)}{(x+y+z)^3} & \frac{xy(x+y-z)}{(x+y+z)^3} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $d\Phi(x,y,z)$ et $df(x,y,z)$ sont colinéaires si et seulement si

$$y \cdot (yz(y+z-x)) = x \cdot (xz(x+z-y)),$$
$$z \cdot (yz(y+z-x)) = x \cdot (xy(x+y-z)),$$
$$z \cdot (xz(x+z-y)) = y \cdot (yz(x+y-z)).$$

(ces égalités sont données par les trois déterminants de taille 2×2 obtenus en considérant la matrice $\begin{pmatrix} d\Phi(x,y,z) \\ dlf(x,y,z) \end{pmatrix}$). Rappelons que l'on suppose $x,y,z > 0$. La première égalité se réécrit (en simplifiant par z)

$$z(y-x)(y+x) = (x-y)(x^2+y^2).$$

Or si $y \neq x$ l'équation ci-dessus se simplifie en $z(y+x) = -(x^2+y^2)$ ce qui est absurde puisque $x,y,z > 0$. Par conséquent, $x = y$. En raisonnant de même avec l'équation $z \cdot (yz(y+z-x)) = x \cdot (xy(x+y-z))$, on obtient $x = z$. Réciproquement, si $x = y = z$, alors il est aisé de vérifier que $d\Phi(x,y,z)$ est colinéaire à $df(x,y,z)$.

Comme $(x,y,z) \in K$ on a alors $3x^2 = a^2$ d'où $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$. On a trouvé une seul extremum possible, qui par notre analyse précédente est donc forcément un maximum de f sur K. De plus,

$$f\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}\right) = \frac{a}{9\sqrt{3}}.$$

En remplaçant a^2 par $x^2+y^2+z^2$ on obtient l'égalité demandée.

Remarque. Il faut bien admettre que dans le cas présent on pourrait trouver le maximum par un argument de symétrie car f est invariante par permutation de ses facteurs...

---

7. Un résultat dû à Borel : fonction à dérivées successives prescrites

1. On connaît la fonction qui vaut $\exp(-1/(1-x^2))$ sur $]-1,1[$ et 0 ailleurs ; celle-ci est de classe C^∞ et vaut 0 en dehors de $]-1,1[$. Lorsqu'on intègre cette fonction depuis $-\infty$, on obtient une fonction C^∞ qui vaut 0 sur $]-\infty,-1]$ et 1 sur $[1,+\infty[$. Par translation et homothétie en x, puis restriction à $\mathbb{R}^-$, on trouve une fonction qui vaut 0 sur $]-\infty,-1]$ et 1 sur $[-1/2,0]$. On prolonge par parité, et on trouve une fonction qui répond à la question.

2. On utilise la formule de Leibniz :

$$d^{(\alpha)}g_n(x) = c_n \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} \frac{1}{\varepsilon_n^k}\varphi^k(\frac{x}{\varepsilon_n})\frac{1}{(n-(\alpha-k))!}x^{n-(\alpha-k)}.$$

En dehors de $]-\varepsilon_n,\varepsilon_n[$, cela vaut 0, donc il suffit d'estimer dans cet intervalle. Mais dans cet intervalle, $|x^{n-k}| \leq \varepsilon_n^{n+k-\alpha}$. En utilisant $|\alpha| \leq n-1$, on voit que toutes les dérivées α-ièmes jusqu'à cet ordre tendent vers 0 lorsque $\varepsilon_n \to 0$. D'où le résultat.

3. La série proposée est normalement convergente, de même que ses dérivées. Il suffit alors de dériver sous le signe somme.

---

8. Un théorème de Whitney

1. Pour chaque point x en dehors de F, on peut introduire une boule $B(x,r)$ telle que $B(x,r_x) \subset \mathbb{R}^n \setminus F$, et introduire la fonction f valant $f(y) = \exp(-1/[r_x^2 - |x-y|^2])$ sur cette boule et 0 ailleurs. Il ne reste plus qu'à extraire une famille dénombrable. Pour cela, pour chaque $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, on considère le fermé borné F_k de $\mathbb{R}^n$ composé des points de $\overline{B}(0,k)$ et à distance au moins $1/k$ de F. Par compacité, on peut recouvrir F_k par un nombre fini de $B(x,r_x)$. On choisit toutes les centres de boules ainsi séléctionnés pour chaque k, et on trouve la famille recherchée.

2. On appelle la famille précédente $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et les boules correspondantes B_n. Quitte à remplacer f_n par f_n^2 (ou à vrai dire par $-f_n$), on les suppose toutes positives ou nulles. On vérifie alors que la fonction suivante convient :

$$g(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n[1+\|f_n\|_{C^n(B_n)}]} f_n.$$
