Corrigé de la feuille d'exercices n°12

---

1. Lemme de Grönwall et variantes

1. On introduit donc $v(t) := \exp\Big(-\int_a^t \beta(s)\,ds\Big)\int_a^t \beta(s)u(s)\,ds$, que l'on dérive en temps :

$$\begin{aligned} v'(t) &= \beta(t)u(t)\exp\Big(-\int_a^t \beta(s)\,ds\Big) - \beta(t)\exp\Big(-\int_a^t \beta(s)\,ds\Big)\int_a^t \beta(s)u(s)\,ds \\ &\leq \beta(t)\alpha(t)\exp\Big(-\int_a^t \beta(s)\,ds\Big). \end{aligned}$$

On intègre entre a et t pour obtenir

$$\exp\Big(-\int_a^t \beta(s)\,ds\Big)\int_a^t \beta(s)u(s)\,ds \quad \leq \quad \int_a^t \beta(s)\alpha(s)\exp\Big(-\int_a^s \beta(\tau)\,d\tau\Big)ds.$$

D'où en réutilisant l'hypothèse

$$\begin{aligned} u(t) &\leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)u(s)\,ds \\ &\leq \alpha(t) + \exp\Big(\int_a^t \beta(s)\,ds\Big)\int_a^t \beta(s)\alpha(s)\exp\Big(-\int_a^s \beta(\tau)\,d\tau\Big)ds, \end{aligned}$$

ce qui donne l'inégalité recherchée.

2. *(Une généralisation due à T. Cazenave et A. Haraux).* On introduit comme indiqué $\bar{t}$. Il est clair que pour $\varepsilon > 0$, on a $\bar{t} > a$. Supposons qu'il ne soit pas égal à b : on voit que pour $t \leq \bar{t}$ on a

$$w(t) - v_{w_0+\varepsilon}(t) \leq -\varepsilon + \int_a^t [f(w(s)) - f(v_{w_0+\varepsilon})(s)]\,ds,$$

et on trouve une contradiction par la monotonie de f. Ensuite, on fait tendre ε vers 0, on utilise la dépendence continue des solutions par rapport à la donnée initiale dans Cauchy-Lipschitz et on obtient le résultat.

---

2. Quelques exemples élémentaires d'utilisation de Cauchy-Lipschitz

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $|f(t) - \cos(t)| < 1$ (pour tout $t \in \mathbb{R}$). On considére le système différentiel

$$(S) \qquad \begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

1. Comme f est de classe C^1, elle est localement lipchitzienne et l'existence d'une unique solution maximale résulte du Théorème de Cauchy-Lipschitz. Il reste à voir que cette solution maximale est définie sur tout $\mathbb{R}$. Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $|f(t)| \leq 2$, et donc par le critère d'explosion en temps fini, les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$.

2. On remarque que $-1 + \cos(x) \leq f(x) \leq 1 + \cos(x)$, d'où $f(2k\pi) \geq 0$ et $f((2k+1)\pi) \leq 0$ et l'existence de t_k suit du Théorème des valeurs intermédiaires.

3. Soit k tel que $x_0 \in [t_k, t_{k+1}[$. Si $x_0 = t_k$, la solution est stationnaire. Si, pour tout t, $x(t) \in]t_k, t_{k+1}[$, alors, $x(t)$ est bornée. Supposons qu'il existe t tel que $x(t) \notin]t_k, t_k+1[$. Comme $x_0 \in [t_k, t_{k+1}[$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe t tel que $x(t) = t_k$ ou $x(t) = t_{k+1}$. Mais alors, les solutions constantes $x = t_i$ sont les uniques solutions de (S) qui prennent la valeur t_i en un point (par Cauchy-Lipschitz). Par conséquent, une telle fonction x est constante donc bornée!

2. Soient $f, g : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues vérifiant $f(t,x) \leq g(t,x)$ pour tout $(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}$. On fixe $t_0 \in [0,1[$ et $a \in \mathbb{R}$ et on considère les systèmes

$$(S_f) \quad = \quad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = a \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (S_g) \quad = \quad \begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)) \\ y(t_0) = a. \end{cases}$$

1. Comme x et y sont des solutions (C^1) de (S_f) et (S_g), il existe un intervalle (semi-)ouvert $[t_0, t_0 + \varepsilon[$ contenant t sur lequel elles sont toutes deux définies. Donc pour tout $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon[$, on a

$$\begin{aligned} x(t) - y(t) \quad &= \quad \int_{t_0}^{t} x'(s) - y'(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) - g(s, y(s))\, ds && (1) \\ &= \quad \int_{t_0}^{t} \Big(\big(f(s,x(s)) - g(s,x(s))\big) + \big(g(s,x(s)) - g(s,y(s))\big) \Big)\, ds && (2) \end{aligned}$$

Comme $f - g$ est continue sur le compact $[0,1] \times K$, où $K = x([0, \varepsilon/2]) \cup y([0, \varepsilon/2])$ est bien compact (par union d'images continue d'un compact dans un séparé), $f - g$ y a un maximum $-\alpha < 0$. De plus, g est uniformément continue sur $[0,1] \times K$, donc il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $|x - y| \leq \eta$ et $s \in [0,1]$, on ait $|g(s,x(s)) - g(s,y(s))| \leq \alpha/2$. Comme $x(t_0) = y(t_0)$, il existe un intervalle $[t_0, t_0 + \delta]$ (on peut choisir $\delta < \varepsilon/2$) sur lequel $|x(t) - a| \leq \eta/2$ et $|y(t) - a| \leq \eta/2$, en particulier $|x(t) - y(t)| \leq \eta$. On déduit alors de (2) que, pour tout $t \in [t_0, t_0 + \delta[$, on a

$$x(t) - y(t) \leq -(t - t_0)\alpha + (t - t_0)\alpha/2 < 0.$$

2. On considère $J = \{t \in [t_0, 1],\ \text{pour tout } s \in [t_0, t],\ x(t) \leq y(t)\}$. On note $t_+ = \sup_{t \in J}(t)$. Il est clair que J est un intervalle d'intérieur non-vide et contenant t_0 (d'après la question précédente). Il est donc de la forme $[t_0, t_+]$ ou $[t_0, t_+[$. De plus, par continuité, on a clairement par continuité que $x(t_+) \leq y(t_+)$. Il reste donc à montrer que $t_+ = 1$. Sinon, si $x(t_+) < y(t_+)$, par continuité, ceci est encore vrai dans un voisinage ouvert de t_+ ce qui contredirait sa maximalité. Par conséquent, $x(t_+) = y(t_+)$ et alors la question précédente permet uen nouvelle fois de contredire sa maximalité.

3. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty$.

1. Déjà, f C^2, donc X est C^1 et par Cauchy-Lipschitz, on a l'existence d'une solution maximale sur un intervalle de la forme $]a, b[$. On veut montrer que $b = +\infty$. Montrons que $t \mapsto f(x(t))$ est décroissante. On a

$$\frac{\partial}{\partial t}(f(x(t))) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i'(t) = -\sum \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i'(t) \right| \leq 0$$

car x est solution de (S_X). Il suit que $f(x(t)) \leq f(x_0)$ pour tout $t \geq t_0$. Mais alors, par le critère d'explosion, si $b < +\infty$, alors $|x(t)| \to +\infty$ quand t tend vers b, et donc $f(x(t))$ est non borné quand t tend vers b ce qui contredit $f(x(t)) \leq f(x_0)$. Il suit que $b = +\infty$.

2. Pour $f(x) = x^4/4$, l'équation différentielle devient $x'(t) = -x^3(t)$. On choisit $t_0 = 0$ et $x(0) \neq 0$. Notons que, par unicité de la solution, ceci implique que $x(t)$ n'est jamasi nul sur l'intervalle $[a, +\infty[$ car la fonction nulle est solution (la seule constante) du système. En particulier, on peut donc diviser l'équation différentielle par $x(t)$ sur $]b, +\infty[$ ce qui donne:

$$\frac{x'(t)}{x^3(t)} = 1 \quad \iff \quad \frac{1}{2x^2(t)} - \frac{1}{2x(0)^2} = t - 0.$$

Ceci force que $t > -\frac{1}{2x(0)^2}$ et $x(t) = \dfrac{x_0}{\sqrt{1 + 2x_0^2\, t}}$ et donc $b = -\frac{1}{2x_0^2}$.

3. Équations linéaires à coefficients constants

1. On connaît la solution explicite de l'équation $\dot{x} = Ax$, c'est $x(t) = e^{tA}x_0$. Calculons e^{tA}. Soit $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les valeurs propres de A, de multiplicités respectives $m_1, ..., m_p$. On décompose $\mathbb{C}^n$ en somme directe des sous-espaces caractéristiques de A: $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^p Ker(A - \lambda_j\, Id)^{m_j}$. Soit A_j la restriction de A à $Ker(A - \lambda_j\, Id)^{m_j}$, on a $A_j = \lambda_j\, Id + N_j$, avec N_j nilpotent ($N_j^{m_j} = 0$). Les sous-espaces caractéristiques sont stables par e^{tA}, et on a sur $Ker(A - \lambda_j\, Id)^{m_j}$, $e^{tA} = e^{t\lambda_j}e^{tN_j} = e^{t\lambda_j}(Id + tN_j + ... + \frac{t^k}{k!}N_j^k)$ pour un certain entier k (dépendant de j). Ce calcul va permettre de répondre à la question.

(i) Une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les solutions de $\dot{x} = Ax$ tendent vers 0 en $+\infty$ est que les valeurs propres de A soient de partie réelle strictement négative. En effet en prenant pour x_0 un vecteur propre, on voit que la condition est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Soit x_0 une donnée intiale quelconque, on décompose x_0 sur la somme directe: $x_0 = x_1 + ... + x_p$, alors $e^{tA}x_0 = \sum_j e^{tA_j}x_j$, il suffit donc de prouver que les e^{tA_j} tendent vers 0. Or on a $\|e^{tA_j}\| \leq e^{t\, Re(\lambda_j)}(1 + t\|N_j\| + ... + \frac{t^k}{k!}\|N_j^k\|) \to 0$ quand $t \to +\infty$.

(ii) La condition nécessaire et suffisante pour que les solutions soient bornées sur $\mathbb{R}_+$ est que $Re\, \lambda_j \leq 0$ pour tout j, et $N_j = 0$ si $Re\, \lambda_j = 0$ (*i.e.* sur les sous-espaces caractéristiques associés aux valeurs propres imaginaires pures, la matrice est diagonalisable). La condition est suffisante, en effet si $Re(\lambda_j) < 0$, on vient de voir que e^{tA_j} tend vers 0, donc est borné, et si $Re\, \lambda_j = 0$, on a $e^{tA_j} = e^{t\lambda_j}\, Id$ qui est borné aussi, donc e^{tA} est borné sur $\mathbb{R}_+$. La condition est nécessaire: si on avait $Re(\lambda_j) > 0$, alors tout vecteur propre x_0 associé à λ_j donnerait une solution non bornée, et si $Re(\lambda_j) = 0$ mais que $N_j \neq 0$, on prend un x_0 dans $Ker(A - \lambda_j\, Id)^{m_j}$ tel que $N_j^k x_0 \neq 0$ (ici k est le plus grand entier tel que $N_j^k \neq 0$). Alors $e^{tA}x_0 = e^{t\lambda_j}(x_0 + tN_jx_0 + ... + \frac{t^k}{k!}N_j^k x_0)$, d'où $\|e^{tA}x_0\| = \|x_0 + ... + \frac{t^k}{k!}N_j^k x_0\| \sim \frac{t^k}{k!}\|N_j^k x_0\| \to +\infty$.

(iii) Enfin, la condition pour que les solutions soient bornées sur $\mathbb{R}$ est que A et $-A$ vérifient la condition précédente, ce qui donne: le spectre de A est imaginaire pur et A est diagonalisable.

2. La condition cherchée est $\forall j$, $Re(\lambda_j) > 0$. C'est nécessaire, en effet si on prend $b = 0$, on a une solution bornée évidente (la solution nulle). On veut que ce soit la seule, *i.e.* pour tout $x_0 \neq 0$, $e^{tA}x_0$ doit être non borné. En particulier pour x_0 vecteur propre, on voit que les valeurs propres doivent avoir une partie réelle > 0.

Montrons que cette condition est suffisante. La solution de l'équation $\dot{x} = Ax + b$, avec $x(0) = x_0$, s'obtient par la méthode de la variation des constantes: on pose $x(t) = e^{tA}y(t)$, et on forme une équation sur y. Il vient $\dot{y} = e^{-tA}b$, d'où $y(t) = \int_0^t e^{-sA}b(s)\, ds$, puis $x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}b(s)\, ds$. Il en résulte facilement qu'il y a au plus une solution bornée: si $x_0 \neq \tilde{x}_0$, alors $x(t) - \tilde{x}(t) = e^{tA}(x_0 - \tilde{x}_0)$ n'est pas borné, autrement dit la différence entre deux solutions distinctes n'est jamais bornée. Montrons qu'il existe une solution bornée. Réécrivons $x(t)$ sous la forme $x(t) = e^{tA}(x_0 + \int_0^t e^{-sA}b(s)\, ds)$. On devine alors en faisant tendre t vers $+\infty$ que la solution bornée va être obtenue en choisissant $x_0 = -\int_0^\infty e^{-sA}b(s)\, ds$. Cette intégrale est bien convergente, en effet il existe des constante C et $\alpha > 0$ telles que $\|e^{-sA}\| \leq Ce^{-s\alpha}$. Pour le prouver, il suffit d'obtenir une majoration du même type sur chaque sous-espace caractéristique: $\|e^{-sA_j}\| \leq e^{-s\, Re\, \lambda_j}(1 + ... + \frac{s^k}{k!}\|N_j\|^k) \leq C_j e^{-s\alpha}$ en prenant $\alpha < \min Re(\lambda_j)$. La solution $x(t)$ associée à ce x_0 est donnée par $x(t) = \int_t^\infty e^{(t-s)A}b(s)\, ds$. Elle est effectivement bornée: $\|x(t)\| \leq \int_t^\infty \|e^{(t-s)A}\|\|b\|_\infty\, ds \leq C\|b\|_\infty \int_0^\infty e^{-u\alpha}\, du = \frac{C}{\alpha}\|b\|_\infty$. Ceci achève la preuve.

4. Une étude de systèmes différentiels

1. On note $X = (x, y)$. L'équation est de la forme $\dot{X} = V(X)$, avec $V(X) = (\lambda - e^{|X|^2})X$, qui est de classe C^1, donc localement lipschitzienne. Le théorème de Cauchy-Lipschitz fournit alors l'existence locale et l'unicité des solutions pour toute donnée initiale. Cherchons les solutions constantes : ce sont les $X(t) = (x_0, y_0)$ tels que $V(x_0, y_0) = 0$, ce qui donne $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ou $x_0^2 + y_0^2 = \ln \lambda$.

2. Soit $u(t) = x(t) + iy(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$. Pour une solution u non indentiquement nulle, on a $u(t) \neq 0$ pour tout t (d'après Cauchy-Lipschitz), alors le théorème de relèvement garantit l'existence d'une détermination de classe C^1 de la fonction θ. On a $\dot{u} = \dot{x} + i\dot{y} = (\lambda - e^{r^2})u$ d'une part, et d'autre part $\dot{u} = \dot{r}e^{i\theta} + ir\dot{\theta}e^{i\theta}$, d'où $r + ir\dot{\theta} = (\lambda - e^{r^2})r$. On en déduit que $\dot{\theta} = 0$, ainsi θ est constant, les trajectoires sont donc rectilignes. On en déduit aussi que $\dot{r} = (\lambda - e^{r^2})r$. Ainsi si $r^2 < \ln\lambda$, alors $\dot{r} > 0$, r est croissant, et si $r^2 > \ln\lambda$ alors $\dot{r} < 0$, r est décroissant. Le signe de $\dot{r}$ ne peut varier au cours du temps, sinon la trajectoire rencontrerait une solution constante de module $\ln\lambda$.

3. Lorsque $r_0^2 < \ln\lambda$, la solution considérée dans $\mathbb{R}^2$ est confinée dans le cercle de rayon $\sqrt{\ln\lambda}$, donc n'explose pas : elle est globale. Une autre façon de le dire est que le champ est complet sur $B(0, \sqrt{\ln\lambda})$.

Lorsque $r_0^2 > \ln\lambda$, r est décroissant donc pour $t \geq 0$ on a $r(t) \leq r_0$, la solution est donc bien définie sur $\mathbb{R}_+$. Pour $t \leq 0$, on a $r(t) \geq r_0$. Soit $C > 0$ tel que $\forall x > r_0$, $e^{x^2} - \lambda \geq Cx$. On a pour tout $t \leq 0$, $\dot{r} \leq -Cr^2$, ou encore $-\frac{\dot{r}}{r^2} \geq C$. On intègre cette relation entre $t < 0$ et 0, il vient $r(t) \geq \frac{1}{r_0^{-1} + Ct}$ $(t \leq 0)$. Il y a donc explosion à une date $-T^* \in]-(Cr_0)^{-1}, 0[$.

4. Les limites possibles pour r en $\pm\infty$ sont nécessairement des zéros de la fonction $g(r) = r(\lambda - e^{r^2})$. Notons $l = \lim r(t)$ en $+\infty$. Si par l'absurde $g(l) \neq 0$, alors on a par exemple $g(l) > 0$, et g est > 0 au voisinage de l: il existe $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ tels que $g(r) \geq \delta$ si $|r - l| \leq \epsilon$. Pour t assez grand $(t > t_0)$, on a $|r(t) - l| \leq \epsilon$, d'où $\dot{r} = g(r) \geq \delta$. En intégrant, il vient $r(t) \geq r(t_0) + \delta(t - t_0)$, ce qui contredit manifestement le fait que $r(t)$ converge vers l. Ainsi on a bien $g(l) = 0$.

Lorsque $0 < r_0^2 < \lambda$, la fonction $r(t)$ est croissante. Par monotonie, elle admet des limites quand $t \to \pm\infty$. Les seules limites possibles sont alors: $\lim_{t\to+\infty} r(t) = \sqrt{\ln\lambda}$ et $\lim_{t\to-\infty} r(t) = 0$. Dans le second cas, $r_0^2 > \ln\lambda$, on a de même $\lim_{t\to+\infty} r(t) = \sqrt{\ln\lambda}$.

5. La trajectoire est soit un segment ouvert joignant l'origine à un point du cercle de rayon $\sqrt{\ln\lambda}$, soit une demi-droite radiale issue d'un point de ce même cercle.

---

5. Une étude de systèmes différentiels II

1. On a:

- L'équation est donnée par une fonction $F(x, y)$ de classe C^1, on a donc existence locale et unicité des solutions. La fonction E est une intégrale première: pour tout solution $x(t), y(t)$, la fonction $E(x(t), y(t))$ est constante. Pour le prouver, il suffit de dériver et de remplacer à l'aide de l'équation. On peut aussi constater que l'équation se réécrit $\dot{x} = \frac{\partial E}{\partial y}$, $\dot{y} = -\frac{\partial E}{\partial x}$. On dit de ce système qu'il est hamiltonien, de fonction de Hamilton (ou hamiltonien) E.

- On a $E(x, y) = x^2 + (x^2 + y)^2$. On en déduit que $x^2 \leq E$ et que $|y| \leq \sqrt{E} + x^2 \leq \sqrt{E} + E$, d'où $|x| + |y| \leq E + 2\sqrt{E}$, et il en résulte que $E(x, y) \to +\infty$ quand $\|(x, y)\| \to \infty$.

  Puisque E est une intégrale première, toute solution du système est contenue dans une ligne de niveau de E. Ces lignes de niveau sont bornées, donc toute solution est bornée. Il en découle que les solutions sont globales.

- Déterminons les lignes de niveau de E. La courbe $E(x, y) = C$ est la réunion du graphe de la fonction $f_1(x) = -x^2 + \sqrt{C - x^2}$ et du graphe de $f_2(x) = -x^2 - \sqrt{C - x^2}$ $(|x| \leq \sqrt{C})$. C'est donc une courbe fermée simple (on pourra représenter graphiquement les lignes de niveau de E). Soit $A = (\sqrt{C}, -C)$ et $B = (-\sqrt{C}, -C)$ les points de la courbe d'abscisse maximale et minimale respectivement.

  Supposons par exemple que (x_0, y_0) est un point du graphe de f_1. Tant que la solution parcourt le graphe de f_1, on a $y(t) = f_1(x(t))$, d'où $\dot{x}(t) = 2x(t)^2 + 2f_1(x(t)) = 2\sqrt{C - x(t)^2}$. On intègre cette équation à variables séparées: $t = \int_0^t \frac{\dot{x}(s)\,ds}{2\sqrt{C - x(t)^2}} = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{du}{2\sqrt{C - u^2}}$, à l'aide du changement de variable $u = x(t)$. Clairement $x(t)$ est croissante, et la solution va atteindre le point A en un temps fini, à une date t_1 donnée par $t_1 = \int_{x_0}^{\sqrt{C}} \frac{du}{2\sqrt{C - u^2}} < \infty$ (sinon la précédente relation fournit une contradiction pour tout $t > t_1$). Une fois arrivée au point A, la solution parcourt le graphe de f_2 en rétrogradant, et on a alors $\dot{x} = 2x^2 + 2f_2(x) = -2\sqrt{C - x^2}$, tant que l'on n'a pas atteint le point B. Ceci s'intègre de la même façon en $t - t_1 = \int_{x(t)}^{\sqrt{C}} \frac{du}{2\sqrt{C-u^2}}$, et on voit que l'on atteint B à la date $t_2 = t_1 + \int_{-\sqrt{C}}^{\sqrt{C}} \frac{du}{2\sqrt{C-u^2}}$. Ensuite, on est à nouveau sur le graphe de f_1, et par le même calcul que précédemment, on arrive en A à la date $t_3 = t_2 + \int_{-\sqrt{C}}^{\sqrt{C}} \frac{du}{2\sqrt{C-u^2}}$. Ainsi la solution est périodique, de période $T = \int_{-\sqrt{C}}^{\sqrt{C}} \frac{du}{\sqrt{C-u^2}} = \int_{-1}^{1} \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = \pi$.

2. On réutilise la fonction E de la question précédente. On a cette fois $\frac{d}{dt}E(x(t), y(t)) = -2ax(t)^2$. Supposons par exemple $a > 0$. Il vient $\frac{d}{dt}E(x(t), y(t)) \leq 0$, donc E décroît. Alors pour tout t positif, la solution est contenue dans le domaine borné $\{(x, y) \,|\, E(x, y) \leq E(x(0), y(0))\}$, donc la solution existe pour tout $t > 0$. Pour les temps négatifs, on remarque que $\frac{d}{dt}E(x, y) \geq -2aE(x, y)$. Cette inégalité est du type Gronwall : on pose $\phi(t) = E(x(t), y(t))e^{2at}$, il vient $\frac{d}{dt}\phi \geq 0$, d'où $\phi(t) \leq \phi(0)$ pour $t < 0$, c'est-à-dire $E(x, y) \leq E(x(0), y(0))e^{-2at}$. Il en résulte que la solution est bornée sur tout intervalle borné, donc elle est globale (il ne peut y avoir d'explosion en temps fini).

3. ...

---

6. Equation de transport

On introduira $X(t, x)$ la solution au système différentiel $X'(t, x) = A(t, X(t, x))$, avec $X(0) = x$. On calculera alors $\partial_t f(t, X(t, x))$.

On en déduira que $f(t, x) = f_0(Y(0, x))$, en notant $Y(t, x)$ la solution à

$$\frac{d}{ds}Y(s, x) = A(t, Y(s, x)), \quad Y(t, x) = x.$$

Autrement dit, la donnée initiale f_0 est transportée le long des lignes de champ de A.

---

7. Théorème de Hadamard

1. f^{-1} est continue à valeur dans un espace séparé, donc transforme en compact, ce qui prouve que f est propre. Il est {evident que i) implique que $df_{(x)}$ est un isomorphisme pour tout x.

Par le théorème de l'image ouverte (ou d'inversion locale), $f(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert du connexe $\mathbb{R}^n$. Il suffit de montrer qu'il est fermé pour conclure à la surjectivité. Soit $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ uen suite de $f(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers $y \in \mathbb{R}^n$. Il suffit de montrer que $y \in f(\mathbb{R}^n)$. La réunion $K = \{f(x_n), n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$ est un compact, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeur dans le compact $f^{-1}(K)$. Elle admet une sous-suite $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in f^{-1}(K)$. Par continuité, $f(x_{\phi(n)}) \to f(x)$ et $f(x_{\phi(n)}) \to y$ par définition de y. Il suit que $y = f(x) \in f(\mathbb{R}^n)$.

2. Soit $x \in S$ (donc $f(x) = f(z)$), comme $df_{(x)}$ est inversible, il existe un voisinage de x sur lequel f est un difféomorphisme, et donc x est l'unique solution de $f(y) = f(z)$ dans un voisinage de x. Ceci assure que S est discret. Comme f est propre, S est aussi compact, on en déduit qu'il est fini.

3. On note $\{z_1, \ldots, z_m\}$ l'ensemble S (c'est à dire les solutions de $f(x) = f(z)$). Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la fonction définie par $g(x) = (df_{(x)})^{-1} \cdot \big((f(x) - f(z))\big)$ qui est de classe C^1 par hypothèse. En particulier le système différentiel

$$(S_z) = \begin{cases} \dot{x}(t) = -g(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

admet une solution maximale définie sur un intervalle $[0, b[$. Notons que les solutions constantes de (S_z) sont exactement données par les points z_i de S.

Montrons que $b = +\infty$. Soit $F(x) = \langle f(x) - f(z); f(x) - f(z)\rangle$. Notons que f propre implique que F est propre. On dérive la fonction $t \mapsto F(x(t))$ (où $x(t)$ est solution de (S_z)):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\big(F(x(t))\big) &= 2\langle f(x) - f(z); df_{x(t)} \cdot \dot{x}(t)\rangle \\
&= -2\langle f(x) - f(z); f df_{x(t)} \cdot \big(df_x^{-1}((x) - f(z))\big)\rangle \\
&= -2F(x(t)).
\end{aligned}$$

Il suit que $F(x(t)) = F(x_0)\exp(-2t)$. On en déduit que $x(t) \in F^{-1}[0, F(x_0)]$ qui est un compact car F est propre. On en conclut que $x(t)$ est bornée pour $t \geq 0$, donc sa solution maximale est définie sur $[0, +\infty[$.

Pour tout $i = 1 \dots m$, il existe une boule ouverte $B(z_i, \delta_i)$ de centre i, telle que la restriction de f à cette boule soit un difféomorphisme sur un voisinage de $f(z_i) = f(z)$ dans $\mathbb{R}^n$. On peut restreindre le voisinage d'arrivée à une boule ouverte $B(f(z_i), \varepsilon)$. En faisant le changement de variable $y(t) = f(x(t)) - f(z)$ (qui ets bien aussi un difféomorphisme) au voisinage de z_i (c'est à dire pour tout $y(0) \in B(0, \varepsilon)$), le système (S_z) devient $\dot{y}(t) = -y(t)$ dans un voisinage de z_i, dont la solution est $y(t) = y(0)\exp(-t)$. On voit que cette solution reste dans $B(0, \varepsilon)$ pour $t \geq 0$, et donc est définie sur $[0, +\infty[$ et de plus elle tend vers 0 quand $t \to +\infty$. Par conséquent, pour x_0 ans $B(z_i, \delta_i)$, on a $x(t) = h(y(0)\exp(-t))$ qui tend vers z_i quand $t \to +\infty$. On vient de montrer que les solutions constantes $x(t) = z_i$ sont des points critiques *stables*.

On montre maintenant que pour tout x_0, la solution $x(t)$ tend vers un des z_i lorsque $t \to +\infty$. On note $A(z_i) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n,\, x(t) \underset{t\to+\infty}{\to} z_i\}$ (notons que par unicité des solutions maximales, et comme celles ci sont définies sur $[0, +\infty[$, $A(z_i)$ est bien défini et non-vide vu ci-dessus). De fait, on a vu que $x([0, +\infty[)$ est inclus dans un compact C. On en déduit qu'il existe une suite $x(\phi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans C. De plus on a vu que $F(x(t)) = F(x_0)\exp(-2t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $\lim F(x(\phi(n))) = 0$ d'où $x(\phi(n))$ converge vers un des z_i. Mais alors il existe un n tel que $x(\phi(n)) \subset B(z_i, \delta_i)$ et d'après le paragraphe ci-dessus, et l'unicité des solutions maximales associées au système différentiel pour la valeur initiale $x(\phi(n))$ en $\phi(n)$, on en déduit que $x(t + \phi(n)) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} z_i$, d'où $x(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} z_i$. Par conséquent, on a bien que pour tout x_0, $x(t)$ converge vers un des z_i lorsque t tend vers $+\infty$.

Par ailleurs, les ensembles $A(z_i)$ sont ouverts. En effet, si $x_0 \in A(z_i)$, il existe t_0 tel que $x(t_0) \in B(z_i, \delta_i/2)$. Mais par continuité des solutions du système diffŕentiel par rapport aux conditions initiales, il existe une boule ouverte $B(x_0, \eta)$ telle que pour tout $y_0 \in B(x_0, \eta)$, la solution maximale $y(t)$ associée à la conditon initiale $y(0) = y_0$ vérifie $|y(t_0) - x(t_0)| < \delta_i/2$. Par conséquent, $y(t_0) \in B(z_i, \delta_i)$, et donc, les arguments précédents assurent que $y(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} z_i$; c'est à dire $y_0 \in A(z_i)$. On a bien montré que $A(z_i)$ est ouvert.

Finalement, on a montré que $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^m A(z_i)$ où les $A(z_i)$ sont des ouverts disjoints (car S est discret). Par connexité de $\mathbb{R}^n$, $m = 1$ et donc f est injective. Par le théorème d'inversion globale, f est un difféomorphisme global !