École Normale Supérieure – Année 2012-2013
T.D. de Topologie, Analyse et Calcul différentiel

Corrigé de la feuille d'exercices n°2

---

1. Droite réelle avec un point double.

Il est conseillé de faire un dessin. Pour montrer que $\mathcal{B}$ forme la base d'une topologie, il suffit de montrer que pour tous ouverts $U, V \in \mathcal{B}$ et tout $x \in U \cap V$, il existe un ouvert W dans $\mathcal{B}$ qui contient x et contenu dans $U \cap V$. Autrement dit, il existe $W \in \mathcal{B}$ tel que $x \in W \subset U \cap V$. C'est très facile à vérifier dans le cas présent. On peut remarquer que cette topologie n'ést pas séparée car tout voisinage de 0_A rencontre tout voisinage de 0_B. En particulier, cette topologie ne peut pas être métrique (si la topologie était métrique, la distance entre 0_A et 0_B devrait être nulle, ce qui serait absurde, puisque $0_A \neq 0_B$). Il est clair que la topologie engendrée sur $\mathbb{R} - \{0\}$ coincide avec la topologie usuelle (donc métrisable) sur $\mathbb{R} - \{0\}$.

Remarque. Cet exemple, qui peut sembler artificiel, ne l'est pas. En effet, des espaces topologiques du type de celui présenté dans l'exercice (très grossièrement, "des espaces qui ressemblent localement à la droite réelle, mais avec des points non séparés") apparaissent naturellement comme *espace des feuilles d'un feuilletage.* Très grossièrement, si on considère (par exemple) une famille de courbes qui rempli une surface, alors le quotient de la surface par la relation d'équivalence "être sur la même courbe" sera un espace "du type de celui de l'exercice" ; en particulier, il possèdera en général des points non-séparés.

---

2. Topologie des complémentaires de parties finies.

1. On vérifie très facilement que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et réunion quelconque ; c'est bien une topologie. Elle est séparée si et seulement si X est fini (auquel cas la topologie est même discrète) ; en effet, si X n'est pas fini, quels que soient x et y dans X, tout voisinage de x rencontre tout voisinage de y.

2. Soit $A \subset X$. Si A est fini, alors A est fermé donc égal à son adhérence. Si A est infini, alors X est le seul fermé contenant A ; l'adhérence de A est donc égale à X. Si le complémentaire de A est fini, alors A est ouvert donc égal à son intérieur. Si le complémentaire de A est infini, alors $\emptyset$ est le seul ouvert contenu dans A ; l'intérieur de A est donc vide.

De ceci, on déduit que la frontière de A est :

- vide si A est fini, ainsi que son complémentaire ;
- égale à X tout entier si A est infini, ainsi que son complémentaire ;
- égale à $X \setminus A$ si A est infini et de complémentaire fini ;
- égale à A si A est fini et de complémentaire infini.

---

3. Sur la topologie produit.

Remarquons que les intersections finies d'ensembles de la forme $U_{x,y,y'}$ forment une base d'ouverts pour la topologie $\mathcal{T}$.

1. Il suffit d'expliciter d'une part ce que veut signifie "(f_n) converge simplement vers f", et d'autre part ce que signifie '(f_n) converge vers f pour la topologie $\mathcal{T}$", en utilisant le fait que les intersections finies d'ensembles de la forme $U_{x,y,y'}$ forment une base d'ouverts.

2. Toute intersection finie d'ensemble de la forme $U_{x,y,y'}$ rencontre F. Par conséquent, tout ouvert de $\mathcal{T}$ rencontre F, ce qui implique que l'adhérence de F est égal à E tout entier.

3. Soit (f_n) une suite d'éléments de F. Soit $D \subset \mathbb{R}$ l'ensemble de réels où au moins l'une des fonctions f_n est non-nulle. Alors D est un ensemble dénombrable (en tant qu'union dénombrable d'ensemble finis). Et il est clair que si la suite (f_n) converge simplement, alors sa limite est nulle sur $\mathbb{R} \setminus D$. Ceci montre qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ne peut être limite d'une suite d'éléments de f, dès lors qu'elle prend une valeur non-nulle en une infinité non-dénombrable de points.

4. Il suffit de montrer le lemme suivant :

Lemme. *Si (X, d) est espace métrique, si A est une partie de X, et si x est un point de l'adhérence de A, alors il existe une suite (x_n) de points de A qui tend vers x.*

La preuve du lemme se fait en remarquant que la famille de boules $\{B(x, 1/n)\}_{n\geq 0}$ est une base de voisinage de x. Ainsi, si on choisit, pour chaque entier n, un point x_n dans $B(x, 1/n) \cap A$, alors la suite (x_n) tend vers x.

Le lemme ci-dessus est vrai plus généralement dans un espace topologique où chaque point admet une base dénombrable de voisinage.

---

4. Topologie 'de la limite supérieure" sur $\mathbb{R}$.

1. La topologie $\mathcal{T}_{\limsup}$ est plus fine que la topologie usuelle $\mathcal{T}$. Pour le voir, il suffit de constater que les intervalles $]a, b[$, qui engendrent $\mathcal{T}$, sont dans $\mathcal{T}_{\limsup}$:

$$]a, b[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \big(] - \infty, b - \frac{1}{n}]\cap]a, +\infty[\big) \in \mathcal{T}_{\limsup}$$

puisque c'est une union d'intersections finies d'éléments de $\mathcal{T}_{\limsup}$. Remarquons que ceci implique que $\mathcal{T}_{\limsup}$ est séparée (puisqu'elle est plus fine qu'une topologie séparée).

2. Pour tout $a < b$, l'intervalle $]a, b]$ est un ouvert $\mathcal{T}_{\limsup}$ puisque $]a, b] =] - \infty, b]\cap]a, +\infty[$ est bien ouvert. Les intervalles du type $]a, b]$ engendrent $\mathcal{T}_{\limsup}$, puisque $] - \infty, a] = \bigcup_n]a - n - 1, a - n]$ et $]b, +\infty[= \bigcup_n]b + n, b + n + 1]$. De plus, la famille des intervalles du type $]a, b]$ est stable par intersection finie. Donc c'est bien une base d'ouverts.

On en déduit que pour tout point x, $(]x - \varepsilon, x])_{\varepsilon>0}$ est une base de voisinages de x. En effet si U est ouvert et $x \in U$, alors il existe $a < b$ tels que $x \in]a, b] \subset U$, et on a alors $]x - \varepsilon, x] \subset]a, b]$ pour ε assez petit.

3. On voit que $]a, b]$ est fermé, en effet c'est l'intersection de $]a, +\infty[$ et de $] - \infty, b]$ qui sont fermés (car leur complémentaire est ouvert).

4. Il suffit de vérifier que $\mathbb{Q}$ rencontre tout ouvert $]a, b]$ de la base d'ouverts de la question 2, ce qui est clair.

5. On utilise le lemme suivant : *Un espace métrique E possède un sous-ensemble dénombrable dense D si et seulement si E admet une base dénombrable d'ouverts.*

Preuve du lemme. Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base d'ouverts, soit pour chaque n un point $x_n \in U_n$. Alors $D = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans E puisqu'il rencontre tous les U_n, et par suite tous les ouverts. Réciproquement, si D est dénombrable et dense dans E, montrons que les boules $B(d, 1/k)$ ($d \in D$, $k \in \mathbb{N}^*$) forment une base dénombrable d'ouverts. Soit Ω un ouvert et $x \in \Omega$. Il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \Omega$. Soit k tel que $1/k < r$ et $\varepsilon = \min(1/k, r - 1/k)$. Par densité, il existe $d \in B(x, \varepsilon) \cap D$. Alors $x \in B(d, 1/k) \subset \Omega$. Ainsi Ω est réunion de boules de la forme $B(d, 1/k)$, lesquelles forment donc bien une base d'ouverts.

Si on montre que $\mathcal{T}_{\limsup}$ ne possède pas de base dénombrable d'ouverts, ce lemme et la question précédente permettront de conclure qu'elle n'est pas métrisable. Si $(U_i)_{i\in I}$ est une base d'ouverts de $\mathcal{T}_{\limsup}$, pour chaque $x \in \mathbb{R}$, l'intervalle $]x - 1, x]$ est ouvert donc il existe un i_x tel que $U_{i_x} \subset]x - 1, x]$ et $x \in U_{i_x}$. Ceci implique

que x est la borne supérieure de U_{i_x}. L'application $x \mapsto i_x$ ainsi construite est injective (si $x \neq y$ alors $U_{i_x} \neq U_{i_y}$ car ces deux ouverts n'ont pas la même borne supérieure), la famille (U_i) ne peut donc pas être dénombrable car $\mathbb{R}$ ne l'est pas.

6. On a vu que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{\limsup}$, De la même façon, on a $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{\liminf}$. Pour l'inclusion réciproque, on considère un élément $U \in \mathcal{T}_{\limsup} \cap \mathcal{T}_{\liminf}$, et on montre que U est ouvert au sens usuel : si $x \in U$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x] \subset U$ (car $U \in \mathcal{T}_{\limsup}$) et il existe $\varepsilon' > 0$ tel que $[x, x + \varepsilon'[\subset U$ (car $U \in \mathcal{T}_{\liminf}$), d'où $]x - \varepsilon, x + \varepsilon'[\subset U$. Ainsi U est bien ouvert pour $\mathcal{T}$.

---

5. Topologie quotient.

1. Cela provient du fait que $f_i^{-1}(\omega_1 \cap \omega_2) = f_i^{-1}(\omega_1) \cap f_i^{-1}(\omega_2)$ et $f_i^{-1}(\cup_{a \in A} \omega_a) = \cup_{a \in A} f_i^{-1}(\omega_a)$.

2. On a:

• Si f est continue alors par composition, $f \circ \pi$ aussi. Réciproquement, supposons que $f \circ \pi$ soit continu. Soit ω un ouvert de G, il s'agit de montrer que $f^{-1}(G)$ est un ouvert de F. Or $\pi^{-1}(f^{-1}(G)) = (f \circ \pi)^{-1}(G)$ est un ouvert de E, donc on a bien ce qu'on voulait par définition de la topologie quotient.

• On montre facilement que $E/\mathcal{R}$ muni de la topologie quotient et de sa projection π vérifie les conditions demandées pour $\widetilde{E}$. Si de plus, Y est un autre espace vérifiant les conditions énoncées alors il existe une application continue $\widetilde{\pi} : Y \to E/\mathcal{R}$ relevant π et une unique application continue $\widetilde{p} : E/\mathcal{R} \to Y$ relevant p. On en déduit que $\widetilde{p} \circ \widetilde{\pi} : Y \to Y$ est une application continue (nécessairement unique par hypothèse) relevant p, c'est donc l'identité. De même $\widetilde{\pi} \circ \widetilde{p}$ est l'identité et Y est homéomorphe à $E/\mathcal{R}$.

• Pour $\hat{x}, \hat{y} \in E/\mathcal{R}$, on pose $d(\hat{x}, \hat{y}) = \delta(x, y)$ où $x \in \pi^{-1}(\{\hat{x}\}), y \in \pi^{-1}(\{\hat{y}\})$. Cette définition est indépendante du choix de x et y et définit bien une distance sur $E/\mathcal{R}$ qui engendre la topologie quotient.

3. Supposons pour commencer la propriétés sur les ouverts saturés. Soit $\hat{a} \neq \hat{b}$ dans F. Soit $a \in \pi^{-1}(\{\hat{a}\})$ et $b \in \pi^{-1}(\{\hat{b}\})$. Soit U_a, U_b deux ouverts saturés disjoints contenant respectivement a et b. Alors il est clair que $\pi(U_a)$ et $\pi(U_b)$ sont des ouverts de F, séparant $\hat{a}$ et $\hat{b}$.

Réciproquement, supposons F séparé. Soit $a, b \in E$. Soit V_a et V_b deux ouverts disjoints séparant $\pi(a)$ et $\pi(b)$. alors $U_a = \pi^{-1}(V_a)$ et $U_b = \pi^{-1}(V_b)$ sont des ouverts saturés séparant a et b.

4. On considére le quotient de $\mathbb{R}$ par le sous-groupe $\mathbb{Q}$ (c'est à dire $x\mathcal{R}y$ ssi $x - y \in \mathbb{Q}$). Le quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ est muni de la topologie grossière (et non-dénombrable). En effet, tout ouvert de $\mathbb{R}$ contient un (et en fait une infinité) de points de la forme $x + \mathbb{Q}$. La droite munie de deux origines (voir l'exercice 1) est non-séparée mais son quotient par la relation d'équivalence identifiant les deux origines est homéomorphe[1] à $\mathbb{R}$, donc est séparée.

---

6. Feuilletages linéaires sur le tore

1. Il suffit de considérer le cas d'une droite passant par l'origine $(0, 0)$ (quitte à changer l'origine justement). Alors la droite sécrit sous la forme $y = \alpha x$ et deux points distincts (x, y), (x', y) de la droite sont identifiés dans le quotient si et seulement si il existe des entiers (p, q) tels que

$$q = (y - y') = \alpha(x - x') = \alpha p \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = q/p.$$

Il suit que $\pi_{|D_\alpha} : D_\alpha \to \pi(D_\alpha)$ est une bijection continue si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Si $\alpha \in \mathbb{Q}$ (ou $\alpha = \infty$), $\pi(D_\alpha)$ est clairement homéomorphe à un quotient de $\mathbb{R}$ par un sous-groupe de la forme $\beta\mathbb{Z}$ pour un certain réel β. Mais alors, $\pi(D_\alpha) \cong \mathbb{R}/\beta\mathbb{Z}$ est homéomorphe au cercle S^1. En effet, cet homéomorphisme est induit par le

[1] vérifier bien ce point !

relèvement $f : \mathbb{R}/\beta\mathbb{Z} \to S^1$ de l'application continue $x \mapsto \exp(\frac{2i\pi}{\beta}x)$. La bijectivité de f est immédiate et pour vérifier que f^{-1} est continue, on voit que l'application $x \mapsto \exp(\frac{2i\pi}{\beta}x)$ est ouverte...

Il reste à montrer que si α est irrationnel, $\pi(D_\alpha)$ est dense. Il suffit de montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{T}^2$ et tout $\epsilon > 0$, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|(y - q) - \alpha(x - p)| < \epsilon$ ce qui découle immédiatement de la densité de $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$. L'image $\pi(D_\alpha)$ est donc dense. On a déjà vu que la restriction $\pi_{|D_\alpha} : D_\alpha \to \pi(D_\alpha)$ est une bijection continue[2]. En revanche ce n'est pas un homéomorphisme.

Sinon l'image d'un segment de longueur finie de D_α, qu'on note $[a, b]$, contiendrait l'intersection d'une boule ouverte B de $\mathbb{T}^2$ et de $\pi(D_\alpha)$. Mais ceci n'est pas possible par densité. En effet, soit $y \in B \setminus \pi([a, b])$ (c'est un ouvert car $\pi([a, b])$ est un compact comme l'image d'un compact par une fonction continue dans un espace séparé), et soit B' une petite boule contenant y incluse dans $B \setminus \pi([a, b])$. Par densité, $B' \cap \pi(D_\alpha)$ est non vide et par construction, $\pi^{-1}(B' \cap \pi(D_\alpha))$ n'est pas inclus dans $]a, b[$. Cela contredit l'injectivité de π.

2. Il est facile de voir que $\mathcal{R}'$ est une relation d'équivalence. Remarquons que toute droite de pente α coupe l'axe réel en un unique point (sauf si $\alpha = 0$, auquel cas on considére l'axe imaginaire dans la suite de l'argument). Il suit que $\mathbb{T}^2/\mathcal{R}'$ s'identifie à un quotient de $\mathbb{R}$ obtenue en considérant la relation $\mathcal{R}$ (engendrant $\mathbb{T}^2$) et la relation $\mathcal{R}'$. C'est à dire que deux points de l'axe réel x, x' sont identifiés si et seulement si il existe des points sur les droites D_x, $D_{x'}$ de pentes α passant par $(x, 0)$, $(x', 0)$ qui diffèrent par un élément du réseau $\mathbb{Z}^2$ ce qui se traduit aisément par $x - x' \in \frac{1}{\alpha}\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$. on en conclut que si $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\mathbb{T}^2/\mathcal{R}'$ est homéomorphe à $\mathbb{R}/(\beta\mathbb{Z})$ (pour un certain réel β) c'est à dire à un cercle S^1 (comme en 1)), en particulier séparé. Par contre, si α est irrationnel, le groupe $\frac{1}{\alpha}\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$, et on en conclut facilement que $\mathbb{T}^2/\mathcal{R}'$ est muni de la topologie grossière.

---

7. Ensembles dérivés successifs.

Il n'est pas très difficile de construire une partie A d'un espace topologique (et même d'un espace vectoriel normé) tel que tous les termes de la suite

$$A, A', A'', \ldots$$

sont distincts. Considérons par exemple l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^\mathbb{N}$ muni de la norme uniforme : si $\|(u_n)_{n\geq 0}\|_\infty = \sup_n |u_n|$. Pour tout entier $k > 0$, on considère le sous-ensemble A_k de E définit comme suit

$$A_k = \left\{ u = (u_n)_{n\geq 0} \in E \mid u_n \in \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{k}, 0\right\} \text{ pour tout } n \right\}.$$

On pose $A = \bigcup_{k\geq 0} A_k$.

Vérifions que A' est le sous-ensemble de A, constitué des suites qui ont au moins un terme nul. En effet, il est clair que toute suite qui a au moins un terme nul n'est pas un point isolé. Réciproquement, si $u = (u_n)_{n\geq 0}$ est un élément de A dont tous les termes sont non-nuls, alors il existe k tel que $u \in A_k$, et on vérifie facilement que, pour tout $v \neq u$, on a $\|u - v\| \geq \frac{1}{k(k+1)}$, donc u est isolé.

On montre de même que A'' est le sous-ensemble de A, constitué des suites qui ont au moins deux termes nuls. Par récurrence, on voit que le $n^{\text{ème}}$ ensemble dérivé de A est constitué des suites appartenant à A dont au moins n termes sont nuls. Les ensembles dérivés successifs de A sont donc tous différents.

Remarque. Le rang à partir duquel la suite $A, A', A'', \ldots$ est stationnaire s'appelle le *rang de Cantor-Bendixon* de la partie A. On peut distinguer différentes types d'ensembles de rang infini, en définissant le $\omega^{\text{ème}}$ ensemble dérivé d'une partie A, noté $A^{(\omega)}$, pour un ordinal ω quelconque (si ω est un ordinal limite, on pose $A^{(\omega)} = \bigcap_{\lambda<\omega} A^{(\lambda)}$).

---

[2]ici $\pi(D_\alpha)$ est bien entendu muni de sa topologie de sous-ensemble de $\mathbb{T}^2$.

8. Théorème de Cantor-Bendixon

Il est utile de remarquer que, pour toute partie A d'un espace topologique X, l'ensemble A^* est fermé. Considérons en effet un point x est dans l'adhérence de A^*. Alors tout voisinage V de x rencontre A^*. Ainsi tout voisinage V de x est aussi un voisinage d'un point de A^*. Par définition de A^* ceci implique que tout voisinage de V de x contient une infinité non-dénombrable de points de A. Et ceci signifie précisément que x est dans A^*.

1. Soit X un espace topologique admettant une base dénombrable d'ouverts $\{U_n\}_{n\geq 0}$, et A une partie de X.

Montrons que $A \setminus A^*$ est dénombrable. Pour tout point $x \in X \setminus A^*$, il existe un voisinage de x dont l'intersection avec A est au plus dénombrable. Pour tout point $x \in X \setminus A^*$, on peut donc trouver un entier n_x tel que $x \in U_{n_x}$ et tel que $U_{n_x} \cap A$ est au plus dénombrable. Notons D le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ constitué de tous les entiers qui sont égal à n_x pour un certain $x \in X \setminus A^*$. Alors

$$A \setminus A^* \subset \bigcup_{n\in D} (U_n \cap A).$$

Le membre de droite est une union dénombrable d'ensembles dénombrables, ce qui montre que $A \setminus A^*$ est dénombrable.

Montrons maintenant que $A^{**} = A^*$. Soit $x \in X \setminus A^*$. Comme A^* est fermé, x admet un voisinage disjoint de A^* ; en particulier, x n'est pas dans A^{**}. Ceci montre que A^{**} est contenu dans A^*. Réciproquement, soit $x \in A^*$. Considérons un voisinage V de x, et écrivons $V \cap A \subset (V \cap A^*) \sqcup (V \cap (A \setminus A^*))$. Comme $x \in A^*$, l'intersection $V \cap A$ est non-dénombrable. D'autre part, on a vu que $A \setminus A^*$ est dénombrable. Par conséquent, l'intersection $V \cap A^*$ doit être non-dénombrable. Ceci montre que $x \in A^{**}$, et donc que $A^* \subset A^{**}$.

2. Si X est un espace topologique, à base dénombrable, alors X est la réunion disjointe de $X_1 = X^*$ et $X_2 = X \setminus X^*$. D'après la remarque faite au début de la correction de cet exercice, X_1 est fermé. D'autre part, d'après la question 1, on a $X_1^* = X_1$, ce qui montre que X_1 est sans point isolé. Enfin, la question 1 montre alors que X_2 est dénombrable.

---

9. Quelques questions de continuité.

1. X est un ensemble quelconque muni de la topologie discrète. Il suffit de montrer que tout singleton $\{x\}$ de X est un ouvert. Or la fonction caractéristique du singleton $\chi_{\{x\}}$ doit être continue, donc $\chi_{\{x\}}^{-1}(]1/2, 3/2[) = \{x\}$ doit être ouvert.

2. On montre que χ_A est continue en x si et seulement si $x \notin \partial A$. Il est immédiat que les points de continuité de χ_A contiennent les ouverts $\overset{\circ}{A}$ et ${}^c\overline{A}$, puisque χ_A y est (localement) constante. Il reste à montrer que les points de ∂A ne sont pas des points de continuité. Or un voisinage de $x \in \partial A$ contient des points de A et de ${}^cA$, donc ${\chi_A}^{-1}(]\chi_A(x) - 1/2, \chi_A(x) + 1/2[)$ ne peut être un voisinage de x.

Si A est à la fois ouvert et fermé dans X, alors la frontière de A est vide, par conséquent χ_A est continue. Si X est le plan $\mathbb{R}^2$ muni de la distance usuelle et A est l'ensemble $\mathbb{Q}^2$ des points à coordonnées rationnelles, alors χ_A n'est continue nulle part.

Dans les deux questions précédentes, le résultat ne change pas si on remplace $\mathbb{R}$ par l'ensemble $\{0, 1\}$ muni de la topologie discrète.

3. Si f est continue, alors pour $B \subset Y$, $f^{-1}(\overline{B})$ est fermé et contient $f^{-1}(B)$, donc il contient $\overline{f^{-1}(B)}$. De même, $f^{-1}(\overset{\circ}{B})$ est ouvert et contenu dans $f^{-1}(B)$, donc il est contenu dans $\overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(B)}}$. On en déduit $\partial f^{-1}(B) \subset f^{-1}(\partial B)$.

Dans l'autre sens, on suppose cette condition $\partial f^{-1}(B) \subset f^{-1}(\partial B)$ satisfaite pour toute partie B de Y. Soit alors F un fermé de Y. Il contient sa frontière, donc $f^{-1}(\partial F) \subset f^{-1}(F)$. Donc $\partial f^{-1}(F) \subset f^{-1}(F)$. Il suit que $f^{-1}(F)$ contient sa frontière, il est donc fermé. On a obtenu au passage que le résultat était aussi vrai pour l'adhérence à la place de la frontière.

4. Si on veut que l'image réciproque d'une partie fermée soit fermée, on a l'alternative suivante : soit il existe n tel que $f^{-1}(\{n\})$ est infini, et alors f est constante égale à n (le seul fermé infini étant $\mathbb{N}$), soit on a $\lim f = +\infty$. Les réciproques sont immédiates. Donc f est continue ssi elle est constante ou tend vers $+\infty$.

5. Si une forme linéaire est bornée sur une boule ouverte, elle l'est sur la boule ouverte unité par translation et homothétie. En utilisant l'homogénéité on voit qu'elle est continue en 0, donc partout par translation.

Soit maintenant ℓ une forme linéaire continue (non nulle). De deux choses l'une, soit elle est continue et son noyau est fermé, soit elle ne l'est pas et dans ce cas elle n'est bornée sur aucune boule. Il suit alors que l'image d'une boule centrée en 0 (qui est convexe comme image d'un convexe par une application linéaire non borné et stable par multiplication par un scalaire de module 1) est $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) tout entier. Par translation cela est vrai de toute boule. Donc le noyau de ℓ rencontre toute boule, il est donc dense (et par conséquent pas fermé).

6. Soient f et g deux fonctions continues sur un espace topologique X et à valeurs dans un espace topologique *séparé* Y.

a) On montre que le complémentaire de

$$A = \{x \in X/\ f(x) = g(x)\}$$

est ouvert. En effet, si $a \notin A$, alors $f(a) \neq g(a)$, donc $A^c = \{x \in X/\ f(x) \neq g(x)\}$. Comme Y est séparé, il existe un voisinage ouvert $U_{f(a)}$ de $f(a)$ et un voisinage ouvert $V_{g(a)}$ de $g(a)$ tels que $U_{f(a)} \cap V_{g(a)} = \emptyset$. Par continuité de f et g, $W := f^{-1}(U_{f(a)}) \cap g^{-1}(V_{g(a)})$ est un voisinage ouvert de a et pour tout $y \in W$, on a $f(y) \neq g(y)$ puisque $U_{f(a)}$ et $V_{g(a)}$ sont disjoints. Donc W est un voisinage ouvert de a inclus dans le complémentaire de A. Pour comprendre cette construction, il est utile de faire un dessin !

b) Par la question **a)**, l'ensemble $\{x \in X/\ f(x) = g(x)\}$ est fermé et contient une partie dense D. Il est donc égal à $\overline{D} = X$. Il suffit de prendre $X = \mathbb{R}$ avec sa topologie usuelle et $Y = \mathbb{R}$ avec la topologie grossière. Comme toute fonction $X \to Y$ est alors continue, $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ et $g = 1$ conviennent.

c) Si f est continue, l'application

$$g : X \times Y \to Y \times Y, \qquad (x, y) \to (f(x), y)$$

l'est aussi. A présent, remarquons que le graphe de f est l'image réciproque par g de la diagonale $\Delta_Y = \{(y, y),\ y \in Y\} \subset Y \times Y$. Or un espace topologique Y est séparé si et seulement si sa diagonale est fermée (la preuve est similaire au **a)**): si $x \neq y$, il existe des ouverts $x \in U_x$, $y \in V_y$ tels que $U_x \cap V_y = \emptyset$. Alors $U_x \times V_y$ est un ouvert de $Y \times Y$ qui contient (x, y) et est inclus dans le complémentaire de la diagonale; la réciproque découle du fait que les produits $U \times V$ d'ouverts forment une base d'ouverts pour la topologie produit sur $Y \times Y$). Par conséquent le graphe de f est fermé.

La réciproque est fausse. Soit la fonction $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$ qui à x associe $1/x$ si $x \neq 0$ et 0 sinon. Cette fonction n'est pas continue à l'origine. Pourtant, son graphe est la réunion d'une branche d'hyperbole et de $\{(0, 0)\}$, tout deux fermés.

Supposons que Y ne soit pas séparé. Alors la diagonale Δ_Y n'est pas fermée et cette diagonale est le graphe de la fonction identité $id : Y \to Y$.

d) Si f est injective, elle induit une bijection $X \to f(X)$ encore notée f. $f(X)$, muni de la topologie induite par Y est encore séparé. Comme f est continue, $f^{-1} : f(X) \to X$ est de plus une bijection fermée et ouverte. On conlut en utilisant le lemme suivant: *si $g : Y \to Z$ est une application ouverte injective avec Y séparé, alors $g(Y)$ est séparé.* En effet, si $f(x) \neq f(y)$, il existe des ouverts $U_x \ni x$, $V_y \ni y$ disjoints dans Y. Par injectivité $f(U_x)$ et $f(U_y)$ sont disjoints et ouverts puisque f est ouverte.

---

10. Problème de Kuratowski.

Soit A un partie d'un espace topologique X. Nous allons montrer que, dans la suite

$$A,\ \overline{A},\ \mathring{A},\ \mathring{\overline{A}},\ \overline{\mathring{A}},\ \overline{\mathring{\overline{A}}},\ \mathring{\overline{\mathring{A}}},\ \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}},\ \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}},\ \text{etc.}$$

tous les termes de rang n pair (strictement) plus grand que 6 sont égal au terme de rang 4, et tous les termes de rang n impair plus grand que 7 sont égal au terme de rang 5 (en particulier, cette suite ne comporte jamais plus de 7 termes deux à deux distincts). Pour cela, il suffit bien sûr de montrer que

$$\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} = \mathring{\overline{A}} \tag{1}$$

$$\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} = \overline{\mathring{A}}. \tag{2}$$

Remarquons pour commencer que, de la suite d'inclusion $\mathring{U} \subset U \subset \overline{U}$ et des caractérisations de l'intérieur en terme de plus grand ouvert inclus et de la fermeture comme plus petit fermé contenant un ensemble, on déduit les deux suites d'inclusions:

$$\mathring{A} \subset \mathring{\overline{A}} \subset \overline{\mathring{\overline{A}}} \subset \overline{A} \tag{3}$$

$$\mathring{A} \subset \mathring{\overline{\mathring{A}}} \subset \overline{\mathring{A}} \subset \overline{A} \tag{4}$$

Pour démontrer (1), il suffit de montrer que pour tout fermé F, $\mathring{\overline{\mathring{F}}} = \mathring{F}$ et donc d'après la suite (4) que $\mathring{\overline{\mathring{F}}} \subset \mathring{F}$. Mais la suite (4) appliquée à F donne aussi $\overline{\mathring{F}} \subset \overline{F} = F$ pour un fermé, d'où le résultat en passant à l'intérieur dans l'inclusion précédente. On démontre (2) d'une manière similaire en utilisant la suite (3).

Il n'est pas très difficile de construire un exemple de partie A d'un espace topologique tel que les sept ensembles

$$A,\ \overline{A},\ \mathring{A},\ \mathring{\overline{A}},\ \overline{\mathring{A}},\ \overline{\mathring{\overline{A}}},\ \mathring{\overline{\mathring{A}}}$$

sont deux à deux distincts. Dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelles, on peut par exemple prendre

$$A = (\mathbb{Q} \cap [0,1]) \cup]1,2[\cup]2,3[\cup \{4\}.$$

---

11. Bouquets de cercles

On a que A et X sont homéomorphes entre eux (ils forment ce qu'on on appelle un bouquet dénombrables de cercles) et que B et R_2 sont homéomorphes entre eux (ce sont les "boucles hawaïennes"). Enfin R_1 n'est homéomorphe à aucun autre espace et de plus les boucles hawaïennes ne sont pas homéomorphes à un bouquet de cercles. Pour voir cela, commençons par montrer que R_1 et R_2 ne sont pas homéomorphes (c'est assez évident intuitivement puisque un voisinage de $(0,0)$ dans R_2 contient une infinité de cercles alors que ce n'est pas le cas pour R_1). Comme R_1 est non-borné dans R^2, il n'est pas compact et il suffit de montrer que R_2 est compact. C'est évident si on a déjà montré que R_2 est homéomorphe à B puisque B est le quotient d'un compact par le fermé $\{1\} \cup \{\exp(2i\pi/n),\, n \in \mathbb{N}^*\}$ qui est la réunion d'une suite convergente et de sa limite. Bien-sur on peut aussi facilement vérifier que toute suite (x_n) de R_2 (qui est métrisable car inclus dans $\mathbb{R}^2$) admet une valeur d'adhérence, car soit une telle suite est incluse dans un nombre fini de cercles (dont la réunion est un compact de $\mathbb{R}^2$, donc admet une valeur d'adhérence) soit elle admet une sous suite qui converge vers $(0,0)$.

Montrons que R_1 n'est pas homéomorphe à A. L'idée est que $R_1 \subset \mathbb{R}^2$, donc est métrisable. Il suffit donc de montrer que A ne l'est pas. Rappelons que si un espace est métrisable il vérifie que tout point admet une base dénombrable de voisinages ouverts[3] (par exemple donnée par les boules centrée en ce point de rayon $1/n$). Montrons que la classe du point $[0] \in A = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ n'admet pas de telle base de voisinage. On note $\pi : \mathbb{R} \to A$ l'application quotient. Par définition de la topologie quotient, une base d'ouverts de $[0]$ est donnée

[3]dasn les ouvrages anglophones, un espace vérifiant cette propriété est appelé first countable

par les $\pi(\coprod_{n\in\mathbb{Z}}]n-\epsilon_n, n+\epsilon_n[)$ où les $0 < \epsilon_n < 1/2$ forment une suite quelconque (en particulier les intervalles $]n-\epsilon_n, n+\epsilon_n[$ sont disjoints). Soit maintenant une famille dénombrable $(V_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de voisinages ouverts de $[0]$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\pi^{-1}(V_n)$ est un voisinage ouvert saturé de $\mathbb{R}$ qui contient n, donc, il existe $\delta_n > 0$ tel que l'intervalle ouvert $I_n =]n-\delta_n, n+\delta_n[$ soit *strictement* inclus dans $(\pi^{-1}(V_n)) \cap]n-1/2, n+1/2[$. Mais alors l'ouvert $\coprod_{n\in\mathbb{Z}} I_n$ est un ouvert saturé de $\mathbb{R}$ et donc $\pi(\coprod_{n\in\mathbb{Z}} I_n)$ est un ouvert de A qui ne contient aucun V_n par construction (puisque $V_n \cap]n-1/2, n+1/2[$ n'est pas inclus dans I_n). Par conséquent la classe de $[0] \in A$ n'admet pas de base de voisinages dénombrables et donc A n'est pas métrisable.

Il reste à montrer[4] les homéomorphismes évoqués ci-dessus. L'homéomorphisme ϕ entre A et $X = \coprod_{\mathbb{Z}} S^1$ découle de l'homéomorphisme entre $[0,1]/(0 \sim 1)$ et S^1 (donné par l'exponentielle comme dans l'exercice sur les tores) en envoyant par exemple un élément $x \in [n, n+1]$ sur l'élément correspondant à $x - n \in [0,1]$ du cercle indicé par n dans X. Pour vérifier que cette application est bien un homéomorphisme, la seule (toute petite) difficulté réside alors dans les voisinages de la classe de $0 \in X$. On vérifie comme ci-dessus qu'une base de tels voisinages est donnée par une réunion (disjointe) d'arcs de cercles de longueur θ_n quelconques contenant *pt* (avec exactement un arc pour chaque cercle). Comme une base de voisinage de $[0]$ dans A est donnée par $\pi(\coprod]n-\tau_n, n+\tau_n[)$ (pour $0 < \tau_n < 1/2$) on obtient facilement que l'application ϕ est bien un homéomorphisme.

Enfin pour montrer que R_2 et B sont homéomorphes, on procède comme entre A et R_1. Et on veŕifie cette fois qu'une base de voisinages de $\pi(1) \in B$ est donnée par l'image d'une famille d'intervalles contenant tous les points $\{1/n\}$ dés que n est assez grand et de petits arcs de cercles centrés en les autres points de la forme $1/n$. Similairement une, base de voisinages de $(0,0)$ dans R_2 est donnée par la réunion d'une famille d'arcs de cercles appartenant à un nombre finis de cercles de rayon $1/n$ et tous les cercles de rayon $1/n$ n'appartenant pas à cette famille.

[4]on se contente de donner une ébauche de preuve et de laisser les détails au lecteur