École Normale Supérieure – Année 2012-2013
T.D. de Topologie, Analyse et Calcul différentiel

Corrigé de la feuille d'exercices n°3

---

1. Sur l'espace des fonctions continues à décroissance rapide.

1. OK (on n'oublie pas que $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un espace vectoriel normé complet).

2. On raisonne par l'absurde. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction $f_n \in E$ telle que:

$$\|f_n\|_k > n\|f_n\|.$$

Quitte à diviser chaque f_n par $\|f_n\|_k$, on peut supposer que $\|f_n\|_k = 1$. On en déduit que $f_n \to 0$; or $\|f_n\|_k = 1$, ce qui est une contradiction manifeste.

3. Le premier énoncé provient de la continuité en 0 de la norme pour la distance d.

Soit $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\displaystyle\sum_{n\geq k_0+1} \frac{1}{2^n} < \eta/2$. Pour tout $f \neq 0$ (si $f = 0$, ce qui est demandé est trivial) dans E, remarquons alors que si l'on pose $\eta' := \dfrac{\eta}{2\sum_{n=0}^{k_0} \frac{1}{2^n}}$, on a

$$d\left(\frac{\eta'}{\|f\|_{k_0}} f, 0\right) \leq \eta,$$

d'où:

$$\|f\| \leq \frac{1}{\eta'}\|f\|_{k_0},$$

4. Il est clair que $u_n \in E$: en effet u_n est continue et l'exponentielle décroit plus vite que tout polynôme ne croit.

D'autre part, on voit clairement que $\|u_n\|_{k_0} \leq \eta' 2^{-n}$, d'où $\|u_n\| \leq 2^{-n}$, d'après la question précédente.

Finalement, en prenant $\lambda(n) = 3^n$, on voit que $\|u_n\|_{k_0+1} \to +\infty$. La contradiction est manifeste, on conclut donc que cette topologie n'est en fait pas normable.

---

2. Topologie "boite".

1. Les suites convergentes sont exactement les suites (x^n) tels que:

- il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tous les k (sauf éventuellement un nombre fini), la suite des k-ièmes éléments $(x^n_k)_{n\geq n_0}$ est constante.
- toutes les suites de réels $(x^n_k)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

En effet il est clair que de telles suites convergent pour la topologie produit.

Vérifions que ces conditions sont également nécessaires. Soit (x^k) une suite (de suites) convergeant vers une suite x.

En utilisant comme ouverts les éléments de la base de la topologie produit, on voit tout d'abord que la suite (x^k) converge terme à terme (c'est la deuxième condition ci-dessus).

Pour la première condition, on peut raisonner par l'absurde. Supposons que pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, il existe une infinité de k tels que la suite des $(x_k^n)_{n \geq n_0}$ n'est pas constante. On peut alors construire un suite croissante strictement d'entiers $\Psi(k)$ et une suite st. croissante $\varphi(k)$ telle que $x_{\Psi(k)}^{\varphi(k)} \neq x_{\Psi(k)}$. Soit également $\epsilon_k > 0$ tel que $|x_{\Psi(k)}^{\varphi(k)} - x_{\Psi(k)}| > 2\epsilon_k$. Considérons alors l'ouvert U (pour la topologie boite) défini par:

$$U := \prod_{j \in \mathbb{N}} U_j, \quad \text{où } U_j := \begin{cases} B(x_{\Psi(k)}, \epsilon_k) & \text{si } j = \Psi(k), \\ \mathbb{R} \quad \text{sinon} \end{cases}$$

Alors, par construction, on voit qu'aucun des $x^{\varphi(k)}$ n'appartient à U. Cela constitue une contradiction avec l'hypothèse de convergence vers x.

2. Soit U un voisinage ouvert de 0, de la forme $U = \prod_{k \in \mathbb{N}} B(0, \epsilon_k)$. En prenant n assez grand, puis x assez petit, on voit que $E \cap U \neq \emptyset$. En revanche, aucune suite ne peut être convergente au vu de la caractérisation des suites convergentes.

---

3. Sur les topologies de Schwartz et de Whitney.

1. Il s'agit de prouver le fait suivant: pour tous $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall \epsilon_1 \in C_0^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$, $\exists \epsilon_2 \in C_0^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$,

$$B_s(f, \epsilon_2) \subset B_w(f, \epsilon_1, m).$$

Il suffit pour cela de prendre $\epsilon_2 := \min(\frac{1}{m}, \epsilon_1)$!

On en déduit que toute suite convergente pour la topologie de Schwartz l'est également pour la topologie de Whitney.

2. On vérifie facilement que la fonction φ proposée par l'énoncé est une fonction C^∞. A partir d'elle, il est aisé de trouver des fonctions Ψ vérifiant la condition de l'énoncé. On peut en effet commencer par considérer $\Psi_1(x) = \varphi(1 - x^2)$, qui est régulière à support dans $[-1, 1]$, puis

$$\Psi_2(x) = \frac{1}{\int_0^1 \Psi_1 \, dt} \int_0^x \Psi_1 \, dt,$$

qui est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_-$ et égale à 1 pour $x \geq 1$. Il suffit finalement de poser:

$$\Psi(x) = \Psi_2(2(m + 1 - x))\Psi_2(2(x - m - 1/2)).$$

Passons aux deux points demandés par l'exercice.

- Le premier fait est clair, en remarquant que pour tout entier naturel $\alpha \leq m$, on a la majoration, pour une certaine constante $C > 0$ (indépendante de n) et pour n assez grand:

$$|\phi_n^{(\alpha)}| \leq C/n^{1/2}.$$

- En revanche, on voit que pour $x = m$, pour la topologie de Schwartz, on a droit à un entier naturel tel que $\alpha \leq 2 + m$. Or, $\phi_n^{(m+1)}(m) = \sqrt{n} \sin^{(m+1)}(0) + o(1)$ et $\phi_n^{(m+1)}(m) = n^{3/2} \sin^{(m+2)}(0) + o(1)$. Si pour tout $n \geq n_0$, on avait $\phi_n \in B_s(0, \epsilon)$, alors on aurait $\forall n \geq n_0$, $|\phi_n^{(m+1)}(m)| \leq 1/(m + 2)$ et $|\phi_n^{(m+2)}(m)| \leq 1/(m + 2)$, ce qui est absurde car $\sin^{(m+1)}(0)$ ou $\sin^{(m+2)}(0)$ est non nul.

On en déduit que la topologie de Schwartz est strictement plus fine que celle de Whitney.

3. On raisonne par l'absurde.

- Les deux suites peuvent être construites par récurrence, en exprimant le fait que les (f_n) n'ont pas de support commun.

- Le deuxième point est également évident puisque $(|x_n|)$ tend vers l'infini.
- Soit $\eta > 0$ et $\epsilon \in C_0^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ telle que $\|\epsilon\|_\infty \leq \eta$. Soit $R_f > 0$ tel que $Supp(f) \subset B(0, R_f)$. Alors pour n assez grand, les $x_{\Psi(n)}$ sont tous en dehors de la boule $B(0, R_f)$ et comme (f_n) converge vers f pour la topologie de Schwartz, pour n assez grand $f_n \in B_s(f, \epsilon)$, on en déduit pour tout n assez grand:

  $$|f_{\varphi(\Psi(n))}(x_{\Psi(n)})| \leq \epsilon(x_{\Psi(n)}) \leq \eta.$$

  On en déduit le premier résultat.

  Notons que la fonction ϵ_1 suggérée par l'énoncé fait sens car on a pris soin d'imposer que $|x_{\Psi(n+1)}| - |x_{\Psi(n)}| > 1$ (pour frimer, on peut invoquer le théorème de Tietze et Urysohn). Pour n assez grand, on a finalement que:

  $$|f_{\varphi(\Psi(n))}(x_{\Psi(n)})| \leq \epsilon_1(x_{\Psi(n)}),$$

  ce qui est absurde par définition de ϵ_1.

Noter que l'argument est le même que dans l'exercice 2 !

4. Soit $\alpha \in \mathbb{N}$. Soit $\eta > 0$ et ϵ une fonction de C_0^0 telle que $\|\epsilon\|_\infty \leq \eta$. Par hypothèse, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq n_0$, on a:

$$f_n \in B_w(f, \epsilon, \alpha).$$

En notant R un support commun à tous les f_n et f, cela implique que pour tout $x \in \overline{B}(0, R)$,

$$|f_n^{(\alpha)}(x) - f^{(\alpha)}(x)| \leq \eta,$$

ce qui prouve la convergence uniforme.

5. Soit ϵ dans C_0^0; posons $m = \min_{|x| \leq R} \epsilon(x)$, alors pour avoir $f_n \in B_s(f, \epsilon)$, il suffit d'avoir que pour tout $x \in \overline{B}(0, R)$ et tout $\alpha \leq 1/m$,

$$|f_n^{(\alpha)}(x) - f(x)^{(\alpha)}| \leq m \leq \epsilon(x),$$

ce qui est clair grâce à la convergence uniforme démontrée précédemment.

Au moins une des deux topologies n'est pas métrisable: en effet elle définissent les mêmes suites convergentes et pourtant elle ne sont pas égales.

6. Soit ϵ une fonction de C_0^0. Il s'agit de montrer que $B_s(0, \epsilon) \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$.

On pose $m = \min_{|x| \leq 1} \epsilon(x)$ Soit $f \in E$ telle que $\|f^{(\alpha)}\|_\infty \leq m/2$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ vérifiant $\alpha \leq 1/m$.

Posons ensuite $\mu = \min_{|x - 1/f(0)| \leq 1} \epsilon(x)$, et prenons $\lambda > 0$ assez petit de sorte que $\lambda|\phi^{(\alpha)}(x)| \leq \mu/2$, pour tout $x \in \overline{B}(1/f(0), 1)$ et tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha \leq 1/\mu$. On en déduit que $g(x) = f(x) + \lambda\phi(x - 1/f(0))$ est bien dans $B_s(0, \epsilon) \cap \mathcal{E}$.

7. Par l'absurde, soit (g_n) une suite de $\mathcal{E}$ convergeant vers 0. Pour tout n, on a

$$g_n = f_n + \lambda_n \phi(\cdot - \frac{1}{g_n(0)}),$$

avec $\lambda_n > 0$ et $f_n \in E$. Soit $R > 0$ tel que $supp(g_n) \subset B(0, R)$. Observons que $0 \leq f_n(x) \leq g_n(x)$, de sorte que $(f_n(0))$ tend vers 0. Soit n assez grand tel que $1/g_n(0) > R$. Alors on a

$$0 = f_n(1/g_n(0)) > \lambda_n \phi(0),$$

ce qui est absurde.

---

4. Espaces $C^k(\Omega)$.

1. Pour la distance, il suffit de montrer que l'on peut se contenter d'un nombre dénombrable de semi normes. Il est classique qu'il existe une suite croissante K_n de compact de Ω telle que $\bigcup_n K_n = \Omega$ (on peut meme

demander que K_n soit inclus dans l'intérieur de K_{n+1} : par exemple, soit x_n une suite dense dans Ω, et ϵ_n tel que $B(x_n, \epsilon_n) \subset \Omega$ (boule ouverte). Alors la suite

$$K_n = \bigcup_{k \leq n} \bar{B}(x_n, (1 - 1/n)\epsilon_n)$$

convient). On parle d'une suite exhaustive de compacts.

Ensuite, il suffit de considérer les normes :

$$\|f\|_n = \sum_{\alpha : |\alpha| \leq \min\{n,k\}} \|f\|_{\alpha, K_n}.$$

La distance est alors

$$d(f, g) = \sum_n 2^{-n} \min\{\|f - g\|_n, 1\}.$$

Si f_k est une suite de Cauchy pour d, on a que pour tout n, f_k est une suite de Cauchy pour n : l'espace $C^{\min\{n,k\}}(K_n)$ étant complet pour $\|\cdot\|_n$, on en déduit que $f_k|_{K_n} \to g_n$ dans $C^{\min\{n,k\}}(K_n)$. Par restriction, on voit alors que $g_{n+1}|_{K_n} = g_n$, et on note g la fonction telle que $g|_{K_n} = g_n$ (ce qui est possible vu la condition de compatibilité précédente). Il est alors évident que $g \in C^k(\Omega)$, et que $\|f_k - g\|_n \to 0$ quand $k \to \infty$: ainsi vu la définition de la distance, $d(f_k, g) \to 0$, et d est une métrique complète.

2. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-N} < \epsilon$, et $f \in C^\infty(\Omega)$ à support dans $K_{N+2} \setminus \mathring{K}_{N+1}$ (c'est possible : on choisit $x_0 \in \mathring{K}_{N+2} \setminus K_{N+1}$, alors $B(x_0, \epsilon_0) \subset K_{N+2} \setminus \mathring{K}_{N+1}$ pour $\epsilon_0 > 0$ assez petit, et une fonction radiale régulière à support dans $B(x_0, \epsilon_0)$). Alors $f|_{K_N} = 0$ et donc pour $n \leq N$, $\|\lambda f\|_n = 0$. Ainsi,

$$d(\lambda f, 0) \leq \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} \|\lambda f\|_n + \sum_{n > N} 2^{-n} \leq 2^{-N} < \epsilon.$$

3. Soit $\|\cdot\|$ une norme induisant la meme topologie. $\{g | \|g\| < 1\}$ est un ouvert et contient 0, donc il existe $\epsilon > 0$ tel que $\{g | d(g, 0) < \epsilon\} \subset \{g | \|g\| < 1\}$. En particulier, pour tout λ, $\|\lambda f\| < 1$ et ainsi $\|f\| = 0$, ce qui contredit que f est non nulle.

4. $E = C_c^0(\Omega)$ est un espace métrisable avec la meme suite de semi-normes que $C^0(\Omega)$: $\|\cdot\|_{0,K_n}$. On écrit $E = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_0^0(K_n)$, où $(K_n)_n$ est une suite exhaustive de compacts pour Ω et $\mathcal{C}_0^0(K_n)$ est l'ensemble des fonctions continues à support dans K_n. Alors $\mathcal{C}_0^0(K_n)$ est un sous-ensemble fermé de E d'intérieur vide. En effet, s'il existe un compact $K \subset \Omega$, une fonction f continue à support dans K et un $\epsilon > 0$ tel que $B(f, \epsilon) \subset \mathcal{C}_0^0(K)$, alors $B(0, \epsilon) \subset \mathcal{C}_0^0(K)$ puis pour tout $g \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$, il existe α assez petit telle que $\alpha g \in \mathcal{C}_0^0(\Omega)$ i.e. $Supp(g) \subset K$ ce qui est contradictoire. Donc d'après le lemme de Baire, si E est complet, alors il est vide, ce qui est contradictoire.