École Normale Supérieure – Année 2012-2013
T.D. de Topologie, Analyse et Calcul différentiel

Corrigé de la feuille d'exercices n°4

---

1. Théorème de Hewitt

Comme l'image continue (dans un espace séparé) d'un compact est un compact, l'implication directe est immédiate. Pour l'implication réciproque, par contraposée, supposons que X ne soit pas compact. Considérons alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite injective d'éléments de X n'admettant pas de valeur d'adhérence. On pose $F = \{x_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ qui est clairement un fermé de X et on définit une application f par $f(x_n) = n$. Cette application f est clairement continue sur F (sur F la topologie induite est la topologie discrète). Par le théorème de Tietze et Urysohn (rappelons qu'un espace métrique est normal), on en déduit l'existence d'une application $\overline{f}$ sur X, continue, et prolongeant f. Alors cette fonction n'est pas bornée.

---

2. Exemples d'espaces complets ou non

Les espaces suivant sont-ils complets? Sinon pouvez-vous en décrire un complété?

1. L'espace $\mathcal{P}_n$ des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n sur $[0,1]$ muni de la norme $\|P\|_\infty = \sup_{[0,1]} |P(t)|$ est de dimension finie, donc complet.

2. L'espace $\mathcal{P} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{P}_n$ des fonctions polynomiales sur $[0,1]$ muni de la norme $\|P\|_\infty = \sup_{[0,1]} |P(t)|$ est inclus dans un espace complet (l'espace des fonctions bornées sur $[0,1]$ muni de la norme uniforme), mais n'est pas fermé dans cet espace. Le théorème de Stone Weierstrass affirme que l'adhérence de $\mathcal{P}$ est l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$. Cet espace (muni de la norme uniforme) est donc un complété de $\mathcal{P}$.

3. L'espace $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ n'est pas complet. Il s'injecte dans $L^1([0,1],\mathbb{R})$ (deux fonctions continues qui coïncident presque partout sont égales), et l'image de cette injection est dense. Comme $L^1([0,1],\mathbb{R})$ est complet, c'est un complété.

4. L'espace $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$ muni la norme $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f(t)|$ n'est pas complet. La question 2 montre qu'un complété est l'espace des fonctions continues.

5. L'espace $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$ muni la norme $\|f\|_d = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ est complet. En effet, si (f_n) est une suite de Cauchy dans cet espace, alors la suite des dérivées (f_n') est de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, donc converge vers g. Par ailleus, la suite de nombres $(f_n(0))$ est de Cauchy donc converge vers un réel a. On vérifie facilement que la suite (f_n) converge (pour la norme $\|\cdot\|_d$ vers la primitive de g qui vaut a en 0.

6. L'espace $E = C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, à supports compacts, muni de la norme $\|f\|_\infty$ n'est pas complet. Il est contenu dans $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ qui est complet. On vérifie facilement que l'adhérence de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est l'espace $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions continues qui tendent vers 0 en $\pm\infty$. Ainsi, $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un complété de E.

---

3. Espaces de Hölder.

On vérifie sans difficulté la structure d'espace vectoriel normé. Montrons que E est complet. La démonstration est analogue au cas de la convergence uniforme. Soit (f_n) une suite de Cauchy pour $\|\cdot\|_\alpha$. Pour chaque $x \in X$, la suite numérique $f_n(x)$ est de Cauchy, donc convergente par complétude de $\mathbb{R}$. Appelons $f(x)$ sa limite. Il nous faut montrer que : f est hölderienne et que la convergence de (f_n) vers f a lieu au sens de $C^\alpha(X,\mathbb{R})$. Reprenons le critère de Cauchy : pour $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour $p, q \geq N$, on a :

$$\sup_{x\in X} |f_p(x) - f_q(x)| + \sup_{(x,y)\in X^2, x\neq y} \frac{|f_p(x) - f_p(y) - f_q(x) + f_q(y)|}{d(x,y)^\alpha} < \varepsilon.$$

On en déduit que pour x et y fixés et distincts :

$$|f_p(x) - f_q(x)| + \frac{|f_p(x) - f_p(y) - f_q(x) + f_q(y)|}{d(x,y)^\alpha} < \varepsilon.$$

On passe à la limite lorsque $q \to +\infty$ dans chacun des termes ; on en déduit que $f_p - f \in C^\alpha(X;\mathbb{R})$ (donc $f \in C^\alpha(X;\mathbb{R})$) et que

$$\sup_{x\in X} |f_p(x) - f(x)| + \sup_{(x,y)\in X^2, x\neq y} \frac{|f_p(x) - f_p(y) - f(x) + f(y)|}{d(x,y)^\alpha} \leq 2\varepsilon.$$

La conclusion suit. (À noter que le caractère fini du deuxième sup entraîne la continuité, et même l'uniforme continuité.)

---

4. Complétude et topologie

Sur $X = \mathbb{R}_+^*$, prendre la distance usuelle $d(x,y) = |y-x|$ et la distance $d'(x,y) = |\log x - \log y|$. On vérifie que l'identité donne est un homéomorphisme entre les deux espaces métriques (parce que le log est un homéomorphisme). On vérifie que (X, d') est complet. Cependant, la suite $(1/n)$ ne converge pas mais elle est de Cauchy pour d'.

On peut également considérer $X = \mathbb{R}$ avec la distance usuelle $d(x,y) = |y-x|$ et la distance $d'(x,y) = |\arctan y - \arctan x|$.

---

5. Espaces complets et applications uniformément continues

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans X. On veut montrer que la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans Y. C'est à dire que pour tout $\epsilon > 0$, on doit trouver $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, n > m$, on ait

$$d(f(a_n), f(a_p)) < \epsilon.$$

Mais comme f est uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in X$ avec $d(x,y) < \delta$, on ait $d(f(x), f(y)) < \epsilon$. Il suffit maintenant de trouver m tel que pour tout $p, n > m$, on ait $d(a_n, a_p) < \delta$ pour que l'inégalité précédente soit vérifée. C'est possible puisque, justement, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

La réciproque est fausse. En effet dans un espace complet, toute suite de Cauchy converge, donc son image par toute fonction continue est de Cauchy (car convergente). Mais il existe des espaces complets dans lesquels il y a des fonctions continues non-uniformément continues (par exemple $\mathbb{R}$).

2. Il faut montrer que toute suite de Cauchy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X est convergente. Par la question précédente, on sait que la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Comme Y est complet, elle converge donc vers un point $y \in Y$. Mais alors la suite $f^{-1}(f(a_n))$ converge vers $f^{-1}(y)$ (car f^{-1} est continue) et il suit que $f(a_n)$ converge vers $f^{-1}(y)$.

---

6. Une petite amélioration du théorème du point fixe contractant

Comme f^p est contractante sur un espace complet, elle admet un unique point fixe. Il est clair que si x est un point fixe de f, c'est aussi un point fixe de f^p, ce qui assure l'unicité d'un éventuel point fixe de f. De plus, si x est le point fixe de f^p, on a $f^p(f(x)) = f(f^p(x)) = f(x)$ ce qui prouve que $f(x)$ est aussi un point fixe de f^p; donc $f(x) = x$ par unicité.

---

7. Une équation fonctionnelle

D'après le cours, $C([0,1];\mathbb{R})$ est de Banach. On ne peut pas directement appliquer le théorème du point fixe car T n'est pas nécéssairement contractante. En revanche on va montrer que T^2 est strictement contractante et appliquer l'exercice précédent ! Pour $f, g \in C([0,1];\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\|T^2(f) - T^2(g)\|_\infty &= \sup_{x\in[0,1]} \left| \int_0^x (Tf)(\varphi(y)) - (Tg)(\varphi(y))\, dy \right| \\
&\leq \int_0^1 \int_0^{\varphi(y)} \Big| f(\varphi(z)) - g(\varphi(z)) \Big| dy\, dz \\
&\leq \|f-g\|_\infty \int_0^1 \int_0^{\varphi(y)} dz\, dy \\
&= k\|f-g\|_\infty .
\end{aligned}$$

Il est aisé de voir que $k \leq 1$, et que le seul cas d'égalité correspond à $\phi \equiv 1$ ce qui est exclu par hypothèse. Donc T^2 est strictement contractant. Il existe donc un point fixe de T et la conclusion suit.

---

8. Théorème d'Alexandroff

Pour x, y dans Y on pose:

$$\delta(x,y) := d(x,y) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \min\left(1, \left| \frac{1}{d(x,F_n)} - \frac{1}{d(y,F_n)} \right| \right).$$

On vérifie aisément que δ définit bien une distance. Vérifions que (Y,δ) est bien complet. Considérons donc une suite de Cauchy (x_n) de Y: on remarque que (x_n) est également une suite de Cauchy pour la distance d, donc converge vers un certain $x \in X$. Il s'agit de vérifier que $x \in Y$. Or remarquons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite de réels $(1/d(x_n,F_k))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, donc converge. En particulier, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $d(x,F_k) \neq 0$, donc que $x \notin F_k$ (F_k est fermé). Cela permet de conclure.

Comme la topologie des espaces métriques est déterminée par les suites convergentes, on voit immédiatement que d et δ engendrent la même topologie sur Y.

---

9. Lemme d'Ekeland et applications

Non corrigé, mais des précisions sont disponibles sur demande.

---

10. Ensemble de Cantor, courbe de Peano et escalier du diable.

1. Il est facile de voir que φ est bien définie et continue (considérer $\varepsilon > 0$, introduire un indice N tel que le reste de la série soit inférieur à $\varepsilon/2$ quel que soit a_i, et introduire un ouvert produit correspondant au N premiers indices ce qui est très facile vu que l'on est alors ramené à un produit fini d'ensembles discrets). L'injectivité est une conséquence du fait suivant : un réel de $[0,1]$ possède au plus une écriture en base 3 dont aucun chiffre n'est égal à 1. En effet, un réel de $[0,1]$ possède un ou deux développement en base 3 ; s'il en possède deux, alors ces développements sont de la forme $0, a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n 2222\ldots$ avec $a_n \neq 2$, et l'autre

est $0, a_1 a_2 \dots a_{n-1}(a_n + 1)0000\dots$; soit a_n, soit $a_n + 1$ est égal à 1. Pour la continuité de l'application réciproque, on peut soit appliquer la notion de compacité, ce qui rend la question triviale, soit le faire à la main. On remarque que si deux suites $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(a'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vérifient

$$|\varphi((a_i)_{i\in\mathbb{N}}) - \varphi((a'_i)_{i\in\mathbb{N}})| \leq 2^{-k-1}.$$

alors ces deux suites ne diffèrent pas avant le rang k. Cette remarque rend très simple la preuve de la continuité (Prendre un ouvert élémentaire, dont la projection est $\{0, 2\}$ à partir du rang k, etc.).

2. Il suffit de considérer la bijection

$$\xi_k \;:\; (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto ((a_{ki})_{i\in\mathbb{N}}, (a_{ki+1})_{i\in\mathbb{N}}, \dots, (a_{ki+k-1})_{i\in\mathbb{N}}).$$

On voit encore qu'il s'agit d'un homéomorphisme en prenant des ouverts élémentaires.

3. On peut par exemple introduire ψ

$$\psi : \left\{ \begin{array}{l} A^{\mathbb{N}} \to [0,1], \\ (a_i) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{2^{i+2}}, \end{array} \right.$$

et utiliser la décomposition des réels en base 2 pour la surjectivité, et les arguments de la question 1 pour la continuité.

4. L'application continue surjective $\psi : A^{\mathbb{N}} \to [0, 1]$ induit une application continue surjective produit $\psi^{\otimes k} : (A^{\mathbb{N}})^k \to [0, 1]^k$. L'application $\psi^{\otimes k} \circ \xi_k \circ \varphi^{-1} : C \to [0, 1]^k$ est continue et surjective. Il est facile de la prolonger en une application continue de $[0, 1]$ sur $[0, 1]^k$ (par exemple, en prolongeant de manière affine sur chaque composante de $[0, 1] \setminus C$).

5. Cela découle immédiatement de la formule définissant T.

6. En fait, ϕ est constante sur chaque composante connexe du complémentaire de l'ensemble de Cantor. En effet, la formule définissant T montre que ϕ doit être constante sur l'intervalle $[1/3, 2/3]$, ainsi que sur tout intervalle qui s'obtient à partir de $[1/3, 2/3]$ en appliquant une suite finies d'homothéties, chacun étant égale soit à $x \mapsto x/3$, soit à $x \mapsto 2/3 + x/3$.

---

11. Quelques applications du théorème de Baire

Non corrigé (vous trouverez une preuve dans la plupart des livres traitant de topologie "élémentaire").

---

12. Espace des suites périodiques

Encore une fois, que ℓ^∞ forme un espace de Banach est du cours (ou un exercice facile). Il est évident que T va bien de E dans E (en doublant la période) et est une contraction. Montrons qu'il n'a pas de point fixe ; cela impliquera que E n'est pas complet et par conséquent, pas fermé dans ℓ^∞. Un point fixe satisferait : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = 0$ et $u_{2n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 1)$. Pour

$$n = \underbrace{1\dots1}_{k \text{ fois}} \text{ en écriture binaire,}$$

on vérifie que $u_n = 1-2^{-k}$. Donc la suite prend une infinité de valeurs distinctes et n'est donc pas périodique.

---

13. Distance de Hausdorff et complétude.

Soit (A_n) une suite de Cauchy pour la distance de Hausdorff. On considère donc l'ensemble

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{p>n} A_p}.$$

C'est l'ensemble des limites de suites extraites de suites (x_n) telles que $x_n \in A_n$. Il est fermé d'après le cours, et donc complet (E étant complet).

Montrons qu'il est compact, il suffit de montrer qu'il est précompact, en le recouvrant d'un nombre fini de boules de taille ε. Il suffit pour cela d'utiliser qu'à partir d'un certain rang, $d_H(A_p, A_q) \leq \varepsilon/3$. Fixons p assez grand; pour $a \in A$, $B(a;\varepsilon/3)$ contient des éléments de A_q (pour un certain q assez grand), or A_p peut être recouvert de boules de taille ε... Reste à montrer que $d_H(A_n, A) \to 0$. En utilisant la compacité de A, on voit que

$$\sup_{y\in A} d(y, A_n) \to 0.$$

En effet : pour chaque y dans A, introduire un rang et un point $x_n \in A_n$ tels que $d(y, x_n) < \varepsilon/3$, recouvrir A avec un nombre fini de boules de rayon $\varepsilon/3$, et utiliser le critère de Cauchy vérifié par la suite de compacts avec $\varepsilon/3$.

Puis on voit que

$$\sup_{y\in A_n} d(y, A) \to 0.$$

Pour cela, utiliser encore le critère de Cauchy avec ε : pour $p, q \geq N$, on a

$$\sup_{y\in A_p} d(y, A_q) \leq \varepsilon.$$

Maintenant pour $x \in A$, utiliser une sous-suite $(x_{\varphi(q)})$ avec $x_{\varphi(q)} \in A_{\varphi(q)}$ tel que $x_{\varphi(q)} \to x$. En passant à la limite, on obtient

$$\sup_{y\in A_p} d(y, A) \leq \varepsilon.$$

On peut donc conclure.

La réciproque est vraie et presque triviale: il suffit en effet d'utiliser des singletons !

---

14. À propos des valeurs d'adhérence.

1. Soit A l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite, qui est fermé d'après le cours. Soit x et y deux éléments distincts de A. Il faut montrer que pour tout $z \in]x, y[$, et $\epsilon > 0$, z est dans A. Nous voulons montrer que $]z - \epsilon, z + \epsilon[$ contient des x_n avec n arbitrairement grands. Considérons N à partir duquel $|u_{n+1} - u_n| < \epsilon$; entre un indice où $|u_n - x| < \epsilon$ et un indice où $|u_n - y| < \epsilon$, il est clair qu'il y a un indice tel que $|u_n - z| < \epsilon$.

Ce n'est plus vrai dans $\mathbb{C}$. Considérons les deux branches du graphe de $\mathbb{R}^* \ni x \mapsto 1/|x|$.[1] A chaque étape N, on fait la chose suivante. On part de $(N, 1/N)$ et par petits pas (de taille inférieure à $1/N$) on va sur la gauche le long de la branche d'hyperbole jusqu'à atteindre le point $(1/2N, 2N)$. Là on passe au point $(-1/2N, 2N)$ puis on fait l'étape symétrique sur l'autre branche d'hyperbole. Arrivés à $(-N, 1/N)$, on revient exactement sur ses pas jusqu'à $(N, 1/N)$. Puis on avance jusqu'à $(N+1, 1/(N+1))$. En mettant bout à bout toutes ses étapes, on obtient le graphe comme ensemble de valeurs d'adhérence. Notons qu'il y a bien entendu bien d'autres solutions, mais qu'elles nécéssitent toutes de considérer des suites non-bornées (c'est à dire non incluse dans un compact !).

2. La réponse est NON ! Comme contre-exemple on peut par exemple prendre une famille de branches reliant deux points[2]. Par exemple on considére l'espace topologique quotient[3] $X := [0, +\infty[/\mathcal{R}$ où $\mathcal{R}$ est la relation

[1] essentiellement ce qui compte est que ce graphe ait deux branches qui se rapprochent infiniment près sans se toucher.
[2] qu'on ne prend *pas* plongée dans $\mathbb{C}$ pour se faciliter la vie
[3] faire un dessin...

déquivalence qui identifie $0\mathcal{R}2n$ et $1\mathcal{R}2n+1$ ($n \in \mathbb{N}$). On peut maintenant définir une fonction f qui sur chaque intervalle $[1/2^{n+1}, 1/2^n]$ parcourt l'image dans X du segment $[n+1, n]$ (affinement de $n+1$ à n). On vérifie que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $f(x)$ quand x tend vers 0 est donné par le couple $\{0, 1\}$.

---

15. Complétude des topologies de Schwartz et Whitney.

Non corrigé.