École Normale Supérieure – Année 2012-2013
T.D. de Topologie, Analyse et Calcul différentiel

Corrigé de la feuille d'exercices n°5

---

1. Compacité et normalité

1. Soit K un compact. Un espace compact étant séparé, il reste à montrer que pour tous fermés disjoints F_1, F_2 dans K, on peut trouver des ouverts disjoints $U_1 \supset F_1$ et $U_2 \supset F_2$. L'idée est de le faire d'abord dans le cas où F_2 est un point (c'est-à-dire de montrer que K est régulier d'abord). Rappelons que F_1 et F_2 fermés dans le compact K implique qu'ils sont eux-mêmes compacts. Soit $x \in F_1$ et $y \in F_2$. Puisque K est séparé, il existe des ouverts $U_{x,y} \ni x$ et $V_{x,y} \ni y$ disjoints. On peut alors recouvrir F_1 par un nombre fini de $U_{x,y}$. On obtient $F_1 \subset \mathcal{U}_y := \bigcup_{i=1}^m U_{x_i,y}$ qui est un ouvert. Alors $\mathcal{V}_y := \bigcap_{i=1}^m V_{x_i,y}$ est un ouvert (car l'intersection est finie) qui contient y et disjoint de $\mathcal{U}_y = \bigcup_{i=1}^m U_{x_i,y}$. Ceci donne le résultat dans le cas où F_2 est un point. Dans le cas général, on peut recouvrir F_2 par un nombre fini de $\mathcal{V}_y$; $F_2 \subset \bigcup_{i=1}^p \mathcal{V}_{y_i}$. Alors $U = \bigcap_{i=1}^p \mathcal{U}_{y_i}$ est un ouvert disjoint de $V := \bigcup_{i=1}^p \mathcal{V}_{y_i}$ et qui contient F_1 par construction (faire des dessins pour se convaincre si nécessaire.)

Dans le cas métrique on peut utiliser que la distance entre un compact et un fermé est stricte positive pour obtenir le résultat aisément.

2. C'est essentiellement la même preuve que pour la question 1. Pour tout $(a,b) \in A \times B$, il existe un voisinage ouvert $U_{a,b}$ de a et un voisinage ouvert $V_{a,b}$ de b tels que $U_{a,b} \times V_{a,b} \subset \Omega$. Fixons a. Les $V_{a,b}$ $(b \in B)$ recouvrent B, donc il existe un recouvrement fini $V_{a,b_1} \cup \cdots \cup V_{a,b_n} = Z_a \supset B$. Posons $W_a = U_{a,b_1} \cap \cdots \cap U_{a,b_n}$. Alors $\{a\} \times B \subset W_a \times Z_a \subset \Omega$ (en effet $W_a \times Z_a = \bigcup_i W_a \times V_{a,b_i} \subset \bigcup_i U_{a,b_i} \times V_{a,b_i}$) (faire un dessin). Maintenant on fait varier a dans A et on extrait un recouvrement fini $U = W_{a_1} \cup \cdots \cup W_{a_p} \supset A$. Posons $V = Z_{a_1} \cap \cdots \cap Z_{a_p} \supset B$. Alors U et V sont bien des ouverts, et $U \times V = \bigcup_j W_{a_j} \times V \subset \bigcup_j W_{a_j} \times Z_{a_j} \subset \Omega$.

---

2. Compacité et séparabilité

1. Soit (K,d) espace métrique compact. Pour tout $n > 0$, par précompacité, on peut recouvrir l'espace avec un nombre fini de boules ouvertes $B(x_i^{(n)}, 1/n)$ de rayon $1/n$ (où $i \in I_n$ ensemble fini). Alors la famille dénombrable (car réunion dénombrable d'ensembles finis) $S = \bigcup_{n>0}\{x_i, i \in I_n\}$ des centres de ces boules est dense par construction.

2. Reprenons les notations de la question précédentes, et notons simplement (x_n) une suite dense dans X. Quitte à remplacer d par $\min(1,d)$, on peut supposer que $d \leq 1$. On considère l'application

$$\left\{ \begin{array}{l} X \to [0,1]^{\mathbb{N}} \\ x \mapsto (d(x,x_n))_{n \in \mathbb{N}}. \end{array} \right.$$

qui est injective car K est séparé et x_n est dense. Elle est aussi continue puisque chaque fonction $x \mapsto d(x,x_n)$ est continue. Comme K est compact et $[0,1]^{\mathbb{N}}$ séparé, il suit que c'est un homéomorphisme sur son image.

3. Un espace compact n'est pas forcément séparable...

---

3. Changement de topologie sur un espace compact

Supposons que pour une topologie plus fine ou moins fine, X soit compact. Alors l'application $x \mapsto x$ avec la topologie plus fine au départ est continue. Par compacité de X (au départ ; à l'arrivée on utilise seulement que X est séparé), c'est un homéomorphisme !

---

4. Idéaux maximaux de $C(K, \mathbb{R})$

Ce sont les $E_x := \{f \in C(K, \mathbb{R}),\, f(x) = 0\}$... On peut raisonner par contraposée, penser à la propriété de Borel-Lebesgue et construire une fonction de K qui soit strictement positive... donc inversible et conclure.

---

5. Un théorème de dynamique topologique

Voici seulement quelques indications (me contacter au besoin).

1. On peut aussi utiliser le lemme de Zorn...

2. Le F_k de l'énoncé coincide forcément avec F, par minimalité...

---

6. Exemples de parties compactes d'espaces de suites.

1. (Cube de Hilbert) Il suffit de voir que toute suite de C_a admet une sous-suite qui converge dans C_a pour la norme $\| \cdot \|_\infty$. Soit $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de B. Comme $\prod_{n \in \mathbb{N}} [-a_n, a_n]$, muni de la topologie produit (*i.e.* la topologie de la convergence simple) est compact (par Tychonoff dénombrable), il existe une sous-suite $(u^{\phi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge simplement vers une suite $u \in B$. Fixons $\epsilon > 0$. Il existe N tel que $|a_n| \leq \epsilon/2$ pour tout $n \geq N$ et donc $|u_n^{\phi(k)} - u_n| \leq \epsilon$ pour tout $n \geq N$ et tout $k \in \mathbb{N}$. Par ailleurs, pour chaque n, il existe K_n tel que $|u_n^{\phi(k)} - u_n| \leq \epsilon$ pour $k \geq K_n$. Posons $K = \max\{K_0, K_1, \ldots, K_{N-1}\}$. Alors pour tout $k \geq K$, on a $|u_n^{\phi(k)} - u_n| \leq \epsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que $(u^{\phi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ tend uniformément vers u.

On peut également directement procéder par extraction diagonale.

2. Pour chaque k, notons u^k l'élément de C défini par $u_n^k = 0$ si $n \neq k$ et $u_k^k = 1$. Alors la suite $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la suite nulle. Donc toute sous-suite de $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge pour la norme $\| \cdot \|_\infty$ doit converger vers la suite nulle. On en déduit que $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ n'a aucune sous-suite convergente pour la norme $\| \cdot \|_\infty$.

3. C'est essentiellement la même preuve que pour la question 1. Le seul argument différent est celui utilisé pour montrer que la limite simple d'une suite d'élément de B est dans B : ce fait suit du lemme de Fatou.

---

7. Familles de fonction relativement compactes ou non.

1. La partie F est relativement compacte dans E par Ascoli. Il n'est pas compact car les fonctions affines par morceaux qui s'annulent en 0 et on des pentes inférieures à k en valeurs absolues sont dans l'adhérence de F.

2. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Si f n'est pas constante, il existe x et y tels que $f(x) \neq f(y)$. Si on note $x_n := x/n$ et $y_n := y/n$ alors (x_n) et (y_n) sont deux suites de points qui tendent vers 0, et qui vérifient $|f_n(x_n) - f_n(y_n)| = |f(x) - f(y)|$. Ceci montre que la suite f_n n'est pas équicontinue en 0. Elle n'est donc pas précompacte dans $C([0,1], \mathbb{R})$.

On vérifie facilement que la famille $(g_n)_{n\geq 0}$ satisfait les hypothèses du théorème d'Ascoli.

3. La famille F n'est pas relativement compacte. En effet, la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle, donc toute sous-suite de (f_n) qui convergerait uniformément devrait converger vers la fonction nulle ; comme la distance uniforme de f_n à la fonction nulle est constante et non-nulle, on en déduit que la suite (f_n) n'a aucune sous-suite uniformément convergente.

Attention à toutes les hypothèses dans le théorème d'Ascoli (il faut de la compacité quelque part, par exemple sur l'espace de départ)!

---

8. Opérateurs à noyaux continus.

On note $E = C([0,1], \mathbb{C})$ que l'on munit de la norme du sup. Pour $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ continue et $f \in E$, on pose

$$K(f)(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)dy$$

(k s'appelle le noyau de K).

1. La continuité de $K(f)$ découle immédiatement des théorèmes classique de théorie de l'intégration (k est bornée). La linéarité de K est évidente. La continuité de K découle du caractére borné de k.

2. C'est une conséquence du théorème d'Ascoli. Le fait que l'image par K de $\overline{B}_E(0,1)$ est une famille équicontinue de fonctions découle de l'uniforme continuité de K.

3. Soit $\lambda \neq 0$. Par définition, $f \in E_\lambda$ si et seulement si $f = \frac{1}{\lambda}K(f)$. Ceci montre que la boule unité fermée de E_λ n'est autre que l'image par K de la boule fermée de rayon $\frac{1}{\lambda}$ de E. Ainsi, la boule unité fermée de E_λ est relativement compacte dans E. D'après le théorème de Riesz, ceci montre que E_λ est de dimension finie.

---

9. Complémentaire d'un compact dans un espace vectoriel normé de dimension infinie

Voir TD suivant.

---

10. Distance de Hausdorff : l'espace des compacts est compacts.

Soit (X,d) un espace métrique compact non vide. On note $\mathcal{F} = \{\text{parties fermées non vides de X}\}$. Pour $A \in \mathcal{F}$, on pose $\phi(A) : X \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\phi(A)(x) = d(x,A) = \inf_{a\in A} d(x,a).$$

Pour $A, B \in \mathcal{F}$, on note $\delta(A,B) = \|\phi(A) - \phi(B)\|_\infty = \sup_{x\in X} |\phi(A)(x) - \phi(B)(x)|$.

1. Cela découle immédiatement du fait que $(f,g) \mapsto \|f-g\|_\infty$ est une distance sur $C^0(X,\mathbb{R})$.

2. a) Soit $x \in X$. Par compacité de A_n, il existe $a_n \in A_n$ tel que $\phi(A_n)(x) = d(x,a_n)$. Soit a une valeur d'adhérence de la suite (a_n) (il en existe par compacité de X). Comme $\phi(A_n)$ converge uniformément vers f, on a $\lim d(x,a_n) = d(x,a) = f(x)$. Ceci entraîne l'unicité de a, le fait que $a \in A$ et le fait que $f(x) = d(x,a)$.

b) f est 1-lipschitzienne comme limite uniforme de fonctions 1-lipschiziennes. Pour tout $x \in X$, il existe $a \in A$ tel que $\phi(A)(x) = d(x,a)$. Comme f est 1-lipschtizienne, et comme $f(a) = 0$, on a alors $|f(x)| \leq d(x,a) = \phi_a(x)$. Ceci montre que $f \leq \phi(A)$.

c) Pour tout x, on a vu qu'il existe $a_x \in A$ tel que $f(x) = d(x,a)$. Ceci montre que $f \geq \phi_A$. Avec le b), ceci prouve que $f = \phi_A$.

3. Le théorème d'Ascoli implique que $\{\phi(A) \mid A \in \mathcal{F}\}$ est relativement compact dans $C^0(X,\mathbb{R})$. La question précedente montre que $\{\phi(A) \mid A \in \mathcal{F}\}$ dans $C^0(X,\mathbb{R})$ est fermé dans $C^0(X,\mathbb{R})$. Par conséquent, $(\{\phi(A) \mid A \in \mathcal{F}\}, \|\cdot\|_\infty)$ est compact. Par définition de la distance δ, ceci équivaut à la compacité de $(\mathcal{F},\delta)$.

---

11. Un théorème de point fixe de Kakutani

Je me contente de quelques indications:

1. Regarder $x_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n T^k(a)$, pour $a \in K$.

2. Raisonner par récurrence.

3. Penser à la propriété de Borel-Lebesgue...

---

12. Une suite ayant une valeur d'adhérence mais pas de sous-suite convergente

1. L'ensemble A est dénombrable comme réunion dénombrable (indexée par n) d'ensembles dénombrables. Ensuite, soit V un voisinage de 0, il contient un voisinage élémentaire du type

$$\{f \in E \ / \ f(x_1) < \varepsilon, \ldots, f(x_k) < \varepsilon\},$$

où x_1, ..., x_k sont des points de $[0,1]$ en nombre fini. Il est clair que l'on peut trouver des $f_{q_0,\ldots,q_n}$ dans V en prenant $n = k+1$ et q_1, ...,q_k des rationnels assez proches de x_1, ..., x_k, respectivement. À noter qu'on peut ainsi trouver une infinité de tels des $f_{q_0,\ldots,q_n}$ dans V.

2. Imaginons qu'une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ converge vers 0. On rappelle que la convergence d'une suite pour la topologie produit est la convergence simple. Comme

$$\int_0^1 f_{q_0,\ldots,q_n} = 1/2,$$

le théorème de convergence dominée mène à une contradiction.

---

13. Topologie compacte-ouverte

1. Supposons que la topologie sur Y est engendrée par une distance d. Fixons une fonction $g \in Y^X$. Une base de voisinages de g pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact est constituée dans ensembles du type

$$V_{K,\epsilon} := \{f \in Y^X \mid d(f(x),g(x)) < \epsilon \text{ pour tout } x \in K\}$$

où K est une partie compacte de X et ϵ un réel strictement positif. Une base de voisinage de g pour la topologie compacte-ouverte est constituée dans ensembles du type $\widetilde{U}^K$ où K est une partie compacte de X et U un ouverte de Y tel que $g(K) \subset U$.

Fixons K et U tel que $g \in \widetilde{U}^K$. Notons $\epsilon := \inf\{d(g(x), Y \setminus U) \mid x \in K\}$. Alors $\epsilon > 0$ par compacité de K, et $V_{K,\epsilon}$ est un voisinage de g pour la topologie de la convergence uniforme qui satisfait $V_{K,\epsilon} \subset \widetilde{U}^K$.

Réciproquement, fixons K et ϵ. Par compacité de K, il existe un recouvrement fini de K par des ouverts $U_1,\ldots,U_n$ de X tels que, si x et x' sont dans le même U_i, alors $d(g(x),g(x')) < \epsilon/3$. Soit $y_i \in Y$ tel que $g(U_i) \subset B_i$, où B_i désigne la boule ouverte de centre y_i de rayon $\epsilon/2$ dans Y. Remarquons que $K_i := \overline{U_i}$ est un compact de X. Alors

$$\bigcap_{i=1}^n \widetilde{B_i}^{K_i}$$

est un ouvert pour la topologie compacte ouverte, qui contient g et qui est inclus dans $V_{K,\epsilon}$.

2. Soit $f, g \in Y^X$ tel que $f \neq g$. Alors il existe x tel que $f(x) \neq g(x)$. Si Y est séparé, alors il existe des voisinages ouverts U et V de $f(x)$ et $g(x)$ dans Y qui sont disjoints. Alors $\widetilde{U^{\{x\}}}$ et $\widetilde{V^{\{x\}}}$ sont des voisinages ouverts réciproquement de f et g, disjoints l'un de l'autre.

3. On suppose maintenant X localement compact.

a. (*évaluation*) L'application d'évaluation $ev : X \times Y^X \to Y$ est définie par $ev(x, f) = f(x)$. Soit $(x, f) \in X \times Y^X$ et V un voisinage ouvert de $f(x)$ dans Y. Il faut montrer que $ev^{-1}(V)$ est un voisinage de (x, f). Comme f est continue, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x; par compacité locale de X, il existe donc un compact K dans X vérifiant $x \in \overset{\circ}{K} \subset K \subset f^{-1}(V)$. Il suit que le produit $\overset{\circ}{K} \times \widetilde{V^K}$ est un voisinage ouvert de (x, f) inclus dans $ev^{-1}(V)$.

b. (*adjonction*) Si $f : X \times Y \to Z$ est continue, il est évident que pour tout y fixé, l'application $x \mapsto f(x, y)$ est continue. Il est aussi évident que la formule $\tilde{f}_y = f(-, y)$ définit une bijection entre l'ensemble des applications de $X \times Y$ dans Z, d'une part, et, d'autre part, l'ensemble des applications de Y dans l'ensemble des applications de X dans Z.

c. (*loi exponentielle et composition*) Vu la question précédente, il reste à montrer deux choses :

(i) que si $\tilde{f} : Y \to Z^X$ est continue, alors l'application $f : X \times Y \to Z$ est continue pour établir une bijection entre $Z^{X \times Y}$ et $(Z^X)^Y$,

(ii) que la bijection donnée par (i) est un homéomorphisme.

On remarque que f est la composition des fonctions $X \times Y \overset{id \times \tilde{f}}{\longrightarrow} X \times Z^X$ et de l'évaluation $X \times Z^X \overset{ev}{\to} Z$ qui sont continues (d'après **(a)**). D'où la continuité de f et l'assertion (i) suit de la question précédente. Montrons que *tilde* : $f \mapsto \tilde{f}$ est un homéomorphisme. Soit $C_X \subset X$ et $C_Y \subset Y$ deux compacts et W un ouvert de Z. Alors

$$tilde^{-1}\left(\widetilde{\left(\widetilde{W^{C_X}}\right)^{C_Y}}\right) = \widetilde{W^{(C_X \times C_Y)}}$$

ce qui prouve que *tilde* : $Z^{X \times Y} \to (Z^X)^Y$ est continue. Soit maintenant K un compact de $X \times Y$ et $f \in \widetilde{W^K}$. On doit trouver un voisinage de $\tilde{f}$ dans $(Z^X)^Y$. Comme f est continue, $f^{-1}(W)$ est un ouvert contenant K. Comme X et Y sont séparés, les projections $p_X(K) \subset X$ et $p_Y(K) \subset Y$ de K sont compactes et K est un sous-espace fermé du compact $p_X(K) \times p_Y(K)$. Comme tout compact est régulier, il suit que pour tout point $(x, y) \in K$, il existe un voisinage compact $C_x \times C_y \subset (p_X(K) \times p_Y(K)) \cap f^{-1}(W)$. Par compacité de K, on peut recouvrir K par une famille finie $(\overset{\circ}{C_{x_i}}) \times (\overset{\circ}{C_{y_i}})$. On conclut alors en remarquant que l'intersection des $\left(\widetilde{\left(\widetilde{W^{C_{x_i}}}\right)^{C_{y_i}}}\right)$ est un voisinage de $\tilde{f}$ dans $\left(\widetilde{\widetilde{W^K}}\right)$.

Comme la composée de deux fonctions continues est continue, l'application $c : X^Y \times Z^X \to Z^Y$ est bien définie. Montrons sa continuité. Soit $f \in X^Y$ et $g \in Z^X$, et $\widetilde{W^C}$ un voisinage de $c(f, g) = g \circ f$ dans Z^Y (avec $C \subset Y$ compact, $W \subset Z$ ouvert et $g \circ f(C) \subset W$). Alors $g^{-1}(W)$ est un ouvert contenant le compact $f(C)$ (rappelons que X est necéssairement séparé). Comme X est localement compact et $f(C)$ est compact, il existe un ouvert relativement compact V (c'est à dire que $\overline{V}$ est compact) de X vérifiant $f(C) \subset V \subset \overline{V} \subset g^{-1}(W)$. Il est alors clair que le produit $(\widetilde{V^C}) \times (\widetilde{W^{\overline{V}}})$ est un voisinage ouvert de (f, g) dans $c^{-1}\left(\widetilde{W^C}\right)$ ce qui prouve la continuité de c.

d. L'appplication qui à $(f, g) \in Y^X \times Z^X$ associe l'application $x \mapsto (f(x), g(x))$ est évidemmment une bijection au niveau ensembliste (rappelons qu'une application $(f, g) : X \to Y \times Z$ est continue si et seulement si f et g sont continues). Soient C_1, C_2 deux compacts de X et V, W deux ouverts de Y, Z. Un couple (f, g) est dans $\left(\widetilde{V^{C_1}}\right) \times \left(\widetilde{W^{C_2}}\right)$ si et seulement si (f, g) est dans l'intersection

$$\widetilde{(V \times Z)^{C_1}} \cap \widetilde{(Y \times W)^{C_2}}.$$

induit un homéomorphisme $Y^X \times Z^X \cong (Y \times Z)^X$. Il suit que la bijection $Y^X \times Z^X \cong (Y \times Z)^X$ est ouverte. Elle est continue car $\widetilde{(V \times W)^C} \cong \widetilde{V^C} \times \widetilde{W^C}$.

4. Prenons $X = \mathbb{Q}$ (qui n'est pas localement compact) et $Y = [0,1]$. Montrons que l'application ev de la question (a) n'est pas continue. Soit f la fonction nulle. Alors $W = [0,1[$ est un voisinage de $ev(\mathbb{Q} \times \{f\}) = \{0\}$. Montrons que $ev^{-1}(W)$ n'est pas ouvert. Soit $(q,g) \in ev^{-1}(W)$. Il existe alors un voisinage ouvert U de q dans $\mathbb{Q}$ et un voisinage $\bigcap_{i=1}^{n} \widetilde{V_i^{K_i}}$ de g dans $[0,1]^{\mathbb{Q}}$ (avec V_i ouverts et K_i compacts) tels que $q \in \left(U \times \bigcap_{i=1}^{n} \widetilde{V_i^{K_i}}\right) \subset ev^{-1}([0,1[)$. Clairement il existe $x \in U - (\bigcup_{i=1}^{n} K_i)$ (sinon $\overline{U}$ serait un compact d'intérieur non vide dans $\mathbb{Q}$). Soit alors g une fonction qui vaut 1 en x et 0 sur K_i. Il est clair que (x,g) est dans $\left(U \times \bigcap_{i=1}^{n} \widetilde{V_i^{K_i}}\right)$, mais $ev(x,g) = g(x) = 1$ n'est pas dans $[0,1[$ ce qui contredit que $ev^{-1}([0,1[)$ est ouvert.

---

14. Trois compactifications du plan euclidien.

1. (*La sphère*) Il est clair qu'il s'agit d'une compactification, homéomorphe au compactifié d'Alexandroff puisque $S^2 \setminus i(\mathbb{R}^2)$ est constitué d'un seul point. Une suite $i(x_n, y_n)$ converge vers le pôle nord, si la norme de (x_n, y_n) tend vers l'infini. Le reste est évident.

2. (*La demi-sphère*) On vérifie facilement que c'est une compactification. Une suite $i(x_n, y_n)$ converge vers le point $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ si le module de (x_n, y_n) tend vers l'infini, et si l'argument de $x_n + iy_n$ tend vers θ (on identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$).

3. (*Le plan projectif*) Une suite $i(x_n, y_n)$ converge vers la droite vectorielle engendrée par le vecteur si le module de (x_n, y_n) tend vers l'infini, et si l'argument de $x_n + iy_n$ tend vers θ modulo π.

---

15. Compactification de Stone-Čech.

Pour $f \in F$, notons $\pi_f : T \to [0,1]$ la projection sur la coordonnée correspondant à f.

1. L'application θ est continue puisque ses projections $x \mapsto f(x)$ le sont !

2. Si $x \neq y$, le théorème d'Urysohn permet de trouver une fonction continue à valeurs dans $[0,1]$, valant 0 en x et 1 en y. Cette fonction permet de voir que $\theta(x) \neq \theta(y)$ et donne donc l'injectivité.

3. Commençons par exhiber une bonne base de voisinages de X. On considère la famille $\mathcal{U}_f$ $(f \in F)$ définie par $\mathcal{U}_f := f^{-1}(]0,1])$. Il est clair que $\mathcal{U}_f$ est ouvert dans X. Montrons maintenant que cette famille est une base de voisinages. Soit U un ouvert contenant un point x, on peut trouver un voisinage de x ouvert W dont l'adhérence est incluse dans U (avec des boules). Par théorème d'Urysohn, on peut trouver une fonction valant 1 sur $\overline{W}$ et 0 sur le complémentaire de U, ce qui donne le résultat.

Il suffit maintenant de vérifier que $\theta(\mathcal{U}_f)$ est ouvert dans $\theta(X)$ pour tout f dans F. Soit $V = \{z \in T \mid \pi_f(z) > 0\}$, et $W := V \cap \theta(X)$. Alors V est clairement un ouvert de T, donc W est un ouvert de $\theta(X)$. Reste à montrer que $W = \theta(\mathcal{U}_f)$. Soit $z \in W$. Alors il existe $x \in X$ tel que $z = \theta(x)$. On a $\pi_f(z) > 0$, c'est-à-dire $\pi_f(\theta(x)) = f(x) > 0$. Par conséquent $x \in \mathcal{U}_f$. Ceci montre que $W \subset \theta(\mathcal{U}_f)$. Réciproquement, si $x \in \mathcal{U}_f$, alors $\pi_f(\theta(x)) = f(x) > 0$ donc $z := \theta(x) \in W$. Ceci montre que $\theta(\mathcal{U}_f) \subset W$.

La conclusion suit car la compacité de $\hat{X}$ est conséquence du théorème de Tychonoff sur les produits de compacts.

16. Théorème de Riesz.

Il faut singer la démonstration du théorème de Riesz (bien connue) dans le cas métrique en évitant tout argument "métrique"...