École Normale Supérieure – Année 2012-2013
T.D. de Topologie, Analyse et Calcul différentiel

Corrigé de la feuille d'exercices n°7

---

1. Le cas le plus facile du théorème de l'invariance du domaine

Rappelons que deux espaces homéomorphes ont les mêmes propriétés topologiques[1] (i.e. celles définies uniquement en termes d'ouverts). Ce n'est pas le cas de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$. En effet $\mathbb{R}^2$ privé de n'importe quel point reste connexe alors que $\mathbb{R}$ privé d'un point n'est pas connexe. En particulier, ils ne sont pas homéomorphes.

Remarque. Il existe par contre des applications continues et surjectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ (la fameuse courbe de Peano), mais aucune telle application ne peut être injective.

Remarque. En fait, $\mathbb{R}^p$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^q$ seulement si $p = q$ (c'est le *théorème de l'invariance du domaine*). La preuve de ce résultat général est beaucoup plus difficile que celle du cas particulier qui fait l'objet de l'exercice.

---

2. Connexité et connexité par arcs

Corrigé en classe.

---

3. Connexité du groupe linéaire, du orthogonal, et du groupe spécial orthogonal

1. Il est facile de trouver un chemin joignant deux points M et N dans $\mathbb{C}$ privé d'un nombre fini d'éléments $\{A_1, \ldots, A_n\}$. Prendre par exemple deux droites dont la direction n'est pas celle d'une droite déterminée par (M, A_i) (resp. (N, A_i)), passant par M et N respectivement. On suit le chemin de M à l'intersection, puis de l'intersection à N.

Soient maintenant A et B deux matrices de $GL_n(\mathbb{C})$. Le polynôme $z \mapsto \det((1-z)A + zB)$ n'a qu'un nombre fini de racines (qui ne sont ni 0 ni 1). Soit γ un chemin complexe de 0 à 1 ne passant pas par ces racines. Alors $t \mapsto (1-\gamma(t))A + \gamma(t)B$ joint A à B dans $GL_n(\mathbb{C})$ qui est donc connexe par arcs.

Bien sûr, si $GL_n(\mathbb{R})$ était connexe, son image par l'application continue $A \mapsto \det(A)$ serait un sous-espace connexe de $\mathbb{R}$. Or celle-ci comprend des valeurs positives et négatives, mais pas nulles...

2. Le déterminant restreint à $O_n(\mathbb{R})$ est une surjection continue sur l'ensemble discret $\{0, 1\}$ donc $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe. On peut montrer que $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. En effet toute matrice de $SO_n(\mathbb{R})$ se décompose dans une bonne base orthonormée en blocs de rotations d'angles θ (y compris éventuellement d'angle $\theta = \pi$) et un bloc où elle est l'indentité. L'application $t \mapsto t\theta$ fournit un chemin entre une rotation d'angle θ et l'identité.... Les espaces $O_n(\mathbb{C})$ et $SO_n(\mathbb{C})$ se traitent de la même manière. En effet les valeurs propres des matrices de $O_n(\mathbb{C})$ valent aussi 1 ou -1. De plus $SO_n(\mathbb{C})$ est engendré par les renversements (c'est à dire les matrices M dont l'espace propre associé à la valeur propre -1 est de dimension 2). On démontre comme dans le cas réel qu'un renversement se ramène à l'identité par un chemin continu.

Remarque. On pourrait aussi utiliser l'homéomorphisme $O_n(\mathbb{C}) \cong O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{ASYM}_n(\mathbb{R}) \cong O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$ où $\mathcal{ASYM}(\mathbb{R})$ désigne les matrices anti-symmétriques réelles de taille n. Cet homéomorphisme est une conséquence de la décomposition polaire (et de son unicité) $M = U \exp(H)$ (où U est unitaire et H hermitienne) appliqué à une matrice orthogonale.

[1] on peut même considérer qu'ils sont indistinguables du point de vue de la topologie

---

4. Parties connexes de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

1. Les parties connexes de $\mathbb{Q}$ sont les singletons de $\mathbb{Q}$ puisque pour toute partie $C \subset \mathbb{Q}$ qui contient a et b tels $a < b$, alors il existe un irrationnel c compris strictement entre a et b, et l'on a

$$C = (C\cap]-\infty, c[) \cup (C\cap]c, +\infty[),$$

réunion disjointe d'ouverts non vides de C. De même le sparties connexes de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont les singletons.

Remarque. Un espace dont les seules composantes connexes sont les singletons est dit *totalement discontinu.* $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ sont des exemples d'espaces totalement discontinus qui ne soient pas discrets. Il est clair que toute fonction continue $X \to Y$ d'un connexe X vers un espace totalement discontinu Y est constante.

2. Raisonons par l'absurde. Soit f une fonction vérifiant les hypothèses de l'énoncé, alors la fonction g, définie par $g(x) = f(x) - x$, prend uniquement des valeurs irrationnelles. g est continue, donc $g(\mathbb{R})$ est connexe et inclus dans les irrationnels. Vu la question précédente, g est constante. Il suit que $f(x) = g(0) + x$ pour tout x et donc f est une injection de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Q}$ ce qui est absurde par un argument de cardinalité.

---

5. Complémentaire d'un compact dans un espace vectoriel normé de dimension infinie

Comme K est compact dans l'espace normé E, il est borné: $K \subset B(0, R)$. Il suffit de montrer que le complémentaire $E - B(0, R)$ de la boule est connexe pour s'assurer que $E - K$ a une unique composante connexe non-bornée. Ceci est très facile car tout point de $E - B(0, R)$ est relié par un arc affine à un point de la sphère $S(0, R)$ (faire un dessin !). Cette dernière est connexe par arcs (là encore, faire un dessin; la preuve en dimension finie $n \geq 2$ marche en dimension infinie également). On en conclu que $E - B(0, R)$ est connexe par arcs, donc connexe.

Montrons maintenant que $E-K$ est connexe. Si cela n'est pas vrai, alors $E-K$ a au moins un composante connexe bornée. Soit x dans cette composante et $r > 0$ telle que la sphère $S(x, r)$ soit contenue dans la composante connexe non bornée.

Considérons l'application $\phi_x : K \to S(x, R)$ définie par $k \mapsto x + R\frac{k-x}{\|k-x\|}$, qui est continue (c'est l'application qui à tout point de K associe l'intersection de la demi-droite issue de x passant par k avec la sphère $S(x, r)$; faire un dessin...).

Comme K est compact et E séparé, $\phi_x(K)$ est compact. Or on peut voir que ϕ_x est surjective: en effet si on considère y dans la sphère alors comme x et y ne sont pas dans la même composante connexe, nécessairement le segment $[x, y]$ coupe le compact K. Donc on a $\phi_x(K) = S(x, R)$: ceci est une contradiction avec le théorème de Riesz et la dimension infinie de E.

---

6. Union et intersection de parties connexes

1. On veut montrer que $A \cup B$ est connexe. Soient U et V deux ouverts de X tels que $A \cup B$ soit réunion disjointe de $(A \cup B) \cap U$ et $(A \cup B) \cap V$. On doit montrer qu'un de ces deux ensembles est vide.

Clairement B est réunion disjointe de $B \cap U$ et $B \cap V$. B étant connexe, l'une de ces parties est vide. Supposons, par exemple, que $B \cap U = \emptyset$. Il suffit maintenant de montrer que $A \cap U = \emptyset$. Comme U est ouvert dans X, $\overline{B} \subset X - U$, donc $\overline{B} \cap U = \emptyset$.

De même, A étant connexe, soit $A \cap U$ ou $A \cap V$ est vide. Mais si $A \cap V = \emptyset$, alors $A \cap U = A$, donc $U \supset A$ ce qui est absurde puisque $U \cap \overline{B} = \emptyset$ et $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$. Par conséquent, $A \cap U$ est vide

La conclusion devient fausse si l'on suppose seulement que $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$. On considérera par exemple $A =]-1, 0[$ et $B =]0, 1[$.

2. On a $X = \mathring{A} \cup \partial A \cup (X - \overline{A})$. Si B ne rencontre pas ∂A, B est la réunion, nécéssairement *disjointe*, $(B \cap \mathring{A}) \cup (B \cap (X - \overline{A}))$. Ces deux parties sont non-vides et ouvertes dans B, ce qui contredit la connexité de B. Par conséquent, B rencontre ∂A.

---

7. Partie dont l'union et l'intersection sont connexes.

1. Dire que F_1 est un fermé de A, c'est dire qu'il peut s'écrire sous la forme $A \cap \tilde{F_1}$, où $\tilde{F_1}$ est un fermé de X. Alors $F_1 \cap B$ sécrit $(A \cap B) \cap \tilde{F_1}$, avec $\tilde{F_1}$ fermé de X. Donc $F_1 \cap B$ est bien un fermé de $A \cap B$ pour la topologie induite. De même pour $F_2 \cap B$. Mais de $A = F_1 \cup F_2$, on déduit $A \cap B = (F_1 \cap B) \cup (F_2 \cap B)$, cette réunion étant disjointe. On en déduit en utilisant la connexité de $A \cap B$ que $F_1 \cap B = \emptyset$ ou $F_2 \cap B = \emptyset$. Quitte à changer les noms, on supposera que $F_1 \cap B = \emptyset$ (ce qui implique $A \cap B \subset F_2$).

2. Remarquons tout d'abord que F_1 et F_2 sont des fermés de X, puisqu'ils s'écrivent comme des intersections de fermés de X : $A \cap \tilde{F_1}$ et $A \cap \tilde{F_2}$.

Bien sûr, on a $A \cup B = F_1 \cup [F_2 \cup B]$. F_1 et $F_2 \cup B$ sont des fermés de $A \cup B$ pour la topologie induite, puisque ce sont des fermés de X, inclus dans $A \cup B$. Ils sont disjoints par la question précédente. On en déduit que soit $F_1 = \emptyset$, soit $F_2 \cup B = \emptyset$ (donc $F_2 = \emptyset$). Donc A est connexe, et on ferait de même pour B.

3. Prenons $X = \mathbb{R}$, $A = [-1, 1]$, $B =]-2, -1[\cup]1, 2[$. Alors $A \cap B = \emptyset$ est connexe, $A \cup B =]-2, 2[$ est connexe. Et B n'est bien sûr pas connexe.

---

8. Quelques remarques et propriétés de la topologie produit.

1. Considérons une application continue de ΠX_i dans $\{0, 1\}$. Considérons un point a dans le produit (supposé non vide, sinon on a pas besoin de continuer !). L'application partielle $f_k : X_k \to \{0, 1\}$ définie par $f_k(x_k) = f(x)$, les composantes de x étant celles de a sauf pour l'indice k où l'on met x_k. Comme X_k est connexe, f_k est constante. On voit alors facilement que deux points du produit ne différant que d'un nombre fini de coordonnées ont la même valeur par f. Or l'ensemble des points différant de a d'un nombre fini de coordonnées est dense dans le produit, donc f est constante. Réciproquement, à condition que le produit soit non vide, chaque facteur est connexe, comme image d'un connexe par une application continue.

2. Si chaque X_i est connexe par arcs, on peut relier chaque a_i à b_i par un arc γ_i. On vérifie facilement que $t \mapsto \Pi\gamma_i(t)$ est un arc continu.

3. Non. Il faut également que tous les espaces, à part éventuellement un nombre fini, soient connexes.

4. *La topologie boite.*

On considère ℓ^∞ l'ensemble des suites bornées. Cet ensemble est la réunion croissante des $]-n, n[^{\mathbb{N}}$, et comme tel est ouvert dans notre topologie étrange. Prenons maintenant une suite (u_n) non bornée. Les éléments du pavé $\Pi]u_n - 1, u_n + 1[$ est également composé de suites non bornées, donc ne rencontre pas ℓ^∞. Donc $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \setminus \ell^\infty$ est donc ouvert. Donc $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas connexe.

En revanche, un produit d'espaces connexes est connexe pour la topologie produit comme prouvé précédemment.

---

9. Peignes

Il est indispensable de faire un dessin ! P_1 est connexe comme union des parties connexes $\mathbb{R} \times \{1\} \cup \{x\} \times [0, 1]$ ayant une intersection non vide. De même pour P_2 (on peut aussi montrer qu'elles sont connexes par arcs).

Clairement l'adhérence de P_1 est $\mathbb{R} \times [0, 1]$. Elle rencontre P_2 et d'après **4) i)** $P_1 \cup P_2$ est connexe.

Montrons par l'absurde que $P_1 \cup P_2$ n'est pas connexe par arcs. Si c'était le cas, il existerait un arc

$$\gamma : [0,1] \to P_1 \cup P_2, \quad s \to \gamma(s) = (x(s), y(s))$$

joignant $(0,1) = \gamma(0)$ à $(0,-1) = \gamma(1)$. Soit $A = \{s \in [0,1] / \ \gamma(s) \in P_1\}$. A et son complémentaire étant deux parties non vides du connexe $[0,1]$, la frontière de A n'est pas vide d'après la question 2 de l'exercice 5. Soit $t \in \partial(A)$. En particulier $t \in \overline{A}$, donc, par continuité de la fonction $s \mapsto y(s)$, $y(t) \geq 0$. De même, $t \in \overline{[0,1] - A}$ et donc $y(t) \leq 0$. Il suit que $y(t) = 0$. Par continuité, il existe un réel α strictement positif tel que pour tout $s \in]t-\alpha, t+\alpha[$, on ait $|y(s)| \leqslant 1/2$. L'image de $]t-\alpha, t+\alpha[$ par l'application x est alors incluse dans $\mathbb{Q} \cup (\mathbb{Q} + \sqrt{2})$. De plus, elle est connexe comme image d'un connexe par une application continue. Elle est donc réduite à un point. Par conséquent $]t-\alpha, t+\alpha[$ est soit incluse dans A soit dans son complémentaire, ce qui contredit le fait que t appartient à la frontière de A.

---

10. Topologie cofinie.

1. En fait, tout ouvert U de X est connexe (ce qui implique bien sûr que X est connexe et localement connexe). En effet, si U est un ouvert de X et si $A \subset U$ est un ouvert-fermé, différent de U et de $\emptyset$, alors A doit être à la fois fini et de complémentaire fini, ce qui est impossible.

2. Supposons X dénombrable, alors toute application continue $f : [0,1] \to X$ est constante. Sinon, on pourrait écrire $[0,1] = \bigcup_{x \in X} f^{-1}(\{x\})$, c'est-à-dire écrire l'intervalle $[0,1]$ comme une union d'un nombre fini ou dénombrable de fermés non-vides deux à deux disjoints. C'est impossible comme on le verra prochainement (la preuve de ce fait est une application du *théorème de Baire*).

Remarque. Ceci fournit un exemple d'espace topologique localement connexe, mais pas localement connexe par arcs.

3. Supposons maintenant que X n'est pas dénombrable, et admettons l'hypothèse du continu. Alors, pour tout ouvert non-vide U de X, et toute paire de points a, b dans U, on peut trouver une injection $f : [0,1] \to U$ telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$. Une telle injection f est nécessairement continue : en effet, tout sous-ensemble de complémentaire fini dans $[0,1]$ est un ouvert pour la topologie usuelle.

---

11. Topologie de l'ordre lexicographique sur $[0,1]^2$.

1. La preuve est la même que pour la connexité de $\mathbb{R}$ est repose sur les faits suivants :

   a. toute partie de $[0,1]^2$ possède une borne supérieure pour l'ordre lexicographique,

   b. tout point (x,y) de $[0,1]^2$ est accumulé par des points plus petits que (x,y) et par des points plus grands que (x,y).

Plus précisément, on considère une fonction continue $f : [0,1]^2 \to \{0,1\}$. Si cette fonction n'est pas constante, on considère des points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) où f prend respectivement les valeurs 0 et 1. Quitte à changer f en $1 - f$, on peut supposer que $(x_0, y_0) < (x_1, y_1)$. Puis on considère

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \sup\{(x,y) \mid f(x,y) = 0 \text{ et } (x_1, y_1) < (x,y) < (x_2, y_2)\}.$$

Et, d'après la propriété b., et la continuité de f, on devrait avoir à la $f(\hat{x}, \hat{y}) = 0$ et $f(\hat{x}, \hat{y}) = 1$.

2. Remarquons tout d'abord que les connexes de $[0,1]^2$ sont les intervalles : toute partie qui n'est pas un intervalle n'est pas connexe (même preuve que dans $\mathbb{R}$), et tout intervalle est connexe d'après la question précédente. Supposons qu'il existe une application continue $f : [0,1] \to [0,1]^2$ continue (avec $[0,1]^2$ munie de la topologie produit et $[0,1]^2$ muni de la topologie de l'ordre lexicagraphique) telle que $f(0) = (0,0)$ et $f(1) = (1,1)$. Alors l'inclusion

$$\bigcup_{0<x<1} f^{-1}(\{x\} \times]0,1[) \subset [0,1]$$

implique que $[0, 1]$ contient une infinité non-dénombrable d'ouverts non-vides deux à deux disjoints, ce qui est bien sûr absurde (car $[0, 1]$ contient un sous-ensemble dénombrable dense.).

---

12. Il n'y a pas de version topologique du théorème de Cantor-Bernstein.

1. Un homéomorphisme conserve les propriétés que l'on peut définir à l'aide d'ouverts. Donc si A est une partie connexe, il est envoyé par un homéomorphisme sur une partie connexe.

Donc A et B ne sont pas homéomorphes, car la composante $]0, 1]$ de B n'est homéomorphe à aucune composante connexe de A : on peut lui enlever un point sans qu'elle devienne vide ou disconnexe.

2. Il suffit de considérer f telle que pour $x \neq 2$, $f(x) = x$ et que $f(2) = 1$ dans un sens et

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} x/2 & \text{si} & x \in]0, 1] \\ (x-2)/2 & \text{si} & x \in]3, 4[\\ x - 3 & \text{sinon,} & \end{array} \right.$$

dans l'autre. On ne peut donc pas conclure à l'existence d'un homéomorphisme entre A et B même s'il existe des bijections continues de A vers B, et d'autres continues de B vers A.