École Normale Supérieure – Année 2012-2013
T.D. de Topologie, Analyse et Calcul différentiel

Corrigé de la feuille d'exercices n°8

---

1. Retour sur le cours

Corrigé en classe.

2. Les espaces ℓ^1 et ℓ^∞

1. On renvoie au cours pour montrer que ℓ^1 et ℓ^∞ sont des espaces de Banach. On note e_n la suite $e_n = (e_n)_{k\in\mathbb{N}}$ où $(e_n)_k = \delta_{n,k}$. Autrement dit, e_n est la suite dont le n-ième coefficient vaut 1 et les autres termes sont nuls. Alors le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $S = \mathbb{Q}\langle e_1, \dots, e_n\rangle$ engendré par la famille $\{e_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable (et inclus dans ℓ^1). Il est aussi dense car, pour tout $\epsilon > 0$ et $u = (u_n n \in \mathbb{N} \in \ell^1$, il existe N tel que $\sum_{n=0}^{N} |u_n| < \epsilon/2$. Il existe alors un élément $q_0e_0 + \cdots + \cdots q_Ne_N$ dans S tel que $\sum_{n=0}^{N} |u_n - q_ne_N| < \epsilon/2$ ce qui démontre que S est dense dans ℓ^1 (mais évidemment pas ℓ^∞).

On a une forme bilinéaire $B : \ell^\infty \times \ell^1 \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ et $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, par $B(f, x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, x_n$. Pour montrer que la somme est convergente, on remarque que

$$\sum_{n=0}^{N} |f_n\, x_n| \leqslant \|f\|_\infty \sum_{n=0}^{N} |x_n| \leqslant \|f\|_\infty\, \|x\|_1$$

ce qui montre aussi que B est continue de norme au plus 1 (il n'est pas dur de voir qu'elle est exactement de norme 1). On en déduit qu'il y a une application linéaire continue $\theta : \ell^\infty \to (\ell^1)'$ de norme au plus 1 donnée par $\theta(f) = B(f, -)$.

Réciproquement, soit $\phi \in (\ell^1)'$, alors $|\phi(e_n)| \leqslant \|\phi\|$ car $\|e_n\|_1 = 1$. On en déduit que la suite $(\phi(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est dans ℓ^∞ et de plus l'application $\Gamma : \phi \mapsto (\phi(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est linéaire de norme au plus 1, donc continue. On vérifie que $\Gamma \circ \theta = id_{\ell^\infty}$. De plus, $\theta \circ \Gamma(\phi)$ coincide avec ϕ sur l'espace vectoriel engendré par les e_i $(i \geq 0)$, qui est dense, donc sur ℓ^1 entier ce qui termine de montrer que Γ est bien l'inverse de θ. En particulier θ est de norme 1 et ℓ^∞ est isométrique à $(\ell^1)'$.

2. On vérifie que $\ell^\infty_0 \subset \ell^\infty$ est fermé par critère séquentiel; c'est un sous-espace vectoriel par continuité des opérations de multiplication par un scalaire et d'addition dans un espace vectoriel topologique. Il est clair que ℓ^∞_0 est un sous-espace strict de ℓ^∞_l. Montrons qu'ils sont cependant isomorphes. Soit $T : \ell^\infty_l \to \ell^\infty_0$ définie par $T(f)_0 = \lim_{n\to\infty} f_n$ et, $T(f)_{n+1} = \frac{1}{2}\big(f_n - \lim_{k\to\infty} f_k\big)$. Il est clair que T est linéaire et $\|T\| \leqslant 1$. Par ailleurs, On vérifie sans peine que T est inversible, d'inverse, $(T^{-1}(v))_n = v_0 + 2v_{n+1}$ qui est linéaire et vérifie $\|T\|^{-1} \leqslant 3$.

3. La forme bilinéaire B de la question 1) donne aussi une application linéaire continue (de norme 1) $T : \ell^1 \to (\ell^\infty_0)'$ donnée par $T(u)(f) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n u_n$. Considérons, pour tout $\phi \in (\ell^\infty_0)'$, la suite $S(\phi) := (\phi(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$. En notant ϵ_i le signe de $\phi(e_i)$, on remarque que

$$\sum_{i=0}^{N} |\phi(e_i)| = |\sum_{i=0} \phi(\epsilon_i e_i)| \leqslant \|\phi\|$$

ce qui assure que $(\phi(e_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ et que $\|S\| \leqslant 1$. On montre encore aisément que T et S sont des isométries linéaires inverses l'une de l'autre et donc que ℓ^1 est isométrique au dual topologique de ℓ^∞_0.

4. Rappelons qu'un espace topologique E est reflexif, si l'injection canonique $E \hookrightarrow (E')'$ (donnée par $x \mapsto (\phi \mapsto \phi(x))$) est surjective. Soit ϕ la forme linéaire continue (de norme 1) donnée sur ℓ^∞_l par $\phi(u) = \lim_{n\to\infty} u_n$.

Par le théorème de Hahn-Banach, on peut la prolonger sur ℓ^∞ tout entier. Supposons que ϕ (ainsi prolongée) soit dans l'image de l'application canonique $\ell^1 \hookrightarrow ((\ell^1)')' \cong (\ell^\infty)'$, c'est à dire que ϕ est l'image d'une suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$. Alors, pour tout $u \in \ell^\infty$, on a $\phi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n u_n$; en aprticulier $\phi(e_n) = \phi_n$. Mais $e_n \in \ell_0^\infty$, donc $\phi(e_n) = \lim_{k\to\infty} (e_n)_k = 0$. Il suit que ϕ est nulle ce qui est absurde puisqu'elle n'est pas nulle sur ℓ_l^∞!

On peut aussi invoquer le corollaire d'Hahn-Banach qui affirme que, si E est un espace vectoriel normé, et si le dual topologique E' de E est séparable, alors E est aussi séparable. En vertu de ce corollaire, ℓ^1 ne peut pas être isomorphe au dual topologique de ℓ^∞, puisque ℓ^1 est séparable, mais pas ℓ^∞. Et ℓ^1 ne peut donc pas être reflexif.

---

3. Somme de deux sous-espaces fermés

Les hypothèses assurent que $F_1 \times F_2$ et $F_1 + F_2$ sont des espaces de Banach. L'application

$$\begin{array}{ccc} F_1 \times F_2 & \longrightarrow & F_1 + F_2 \\ (y_1, y_2) & \longmapsto & y_1 + y_2 \end{array}$$

est continue surjective. Elle est donc ouverte (par le théorème de l'application ouverte). L'image du produit des boules unités de F_1 et F_2 contient donc une boule $B(0, r)$ avec $r > 0$. Par linéarité, le résultat en découle.

---

4. Sous-espaces de $C^0([0, 1])$, fermés et inclus dans $C^1([0, 1])$.

On considère dans l'espace de Banach $E := C^0([0, 1], \mathbb{R})$, un sous-espace vectoriel fermé F tel que toute fonction de F soit de classe C^1.

1. Il suffit d'appliquer le théorème du graphe fermé : sachant que E et F sont des espaces de Banach il suffit pour montrer que T est continue de montrer que son graphe est fermé. Or si (f_n) converge vers f et que (f_n') converge vers g, il est clair que $g = f'$ par passage à la limite dans l'inégalité

$$f_n(x) = f_n(0) + \int_0^x f_n'.$$

Le graphe de T est donc fermé par critère séquentiel de fermeture.

2. Comme T est continue, l'image par T de la boule unité de F est bornée. Donc on a une borne uniforme sur la dérivée de f pour f dans la boule unité de F. On a donc équicontinuité puisqu'on a une borne lipschitzienne uniforme sur f par théorème des accroissements finis.

3. On en déduit rapidement par théorème d'Ascoli que la boule unité de F est relativement compacte, donc que F est de dimension finie par théorème de Riesz.

---

5. Théorème de Banach-Steinhaus (et applications)

1. C'est une application du théorème de Baire (correction faite en classe).

2. C'est la contraposée de l'argument permettant de démontrer la question 1.

3. Il s'agit d'une application directe de Banach-Steinhaus.

4. Le premier point est une application de Banach-Steinhaus. Les deux suivants s'en déduisent ensuite aisément.

5. En fait, l'espace E n'a aucun besoin d'être complet pour que les affirmation de l'exercice soient vraies. En effet, on va appliquer le théorème de Banch-Steinhaus avec comme espace de départ, non pas E, mais son dual topologique E'. Rappelons que E' est toujours complet (pour la norme naturelle), et que cela n'a rien à voir avec la complétude de E (c'est une conséquence de la complétude de $\mathbb{R}$). On va aussi utiliser le théorème de Hahn-Banach, mais celui-ci ne requiert aucune hypothèse de complétude.

Soit E' le dual topologique de E, muni de la norme $\|\cdot\|_{E'}$ définie par $\|\phi\|_{E'} = \sup_{z\in E\setminus\{0\}} \frac{|\phi(z)|}{\|z\|}$. C'est un espace de Banach. Pour tout x dans E, on considère la forme linéaire $T_x : E' \to \mathbb{R}$ définie par $T_x(\phi) = \phi(x)$. Avec ces notations, l'hypothèse de la question se traduit comme suit : Pour tout $\phi \in E'$, il existe une constante c_ϕ telle que $\sup_{x\in A} |T_x(\phi)| \leq c_x$. Le théorème de Banach-Steinhaus assure donc l'existence d'une constante uniforme c telle que $\sup_{x\in A}\sup_{\phi\in E'} |T_x(\phi)| \leq c\|\phi\|_{E'}$. Autrement dit, il existe une constante c telle que, pour tout $x \in A$ et tout $\phi \in E'$, on a $|\phi(x)| \leq c\|\phi\|_{E'}$. Pour terminer la preuve, il ne reste plus qu'à rappeler qu'un corollaire immédiat et bien connu du thèorème de Hahn-Banach assure que, pour tout $x \in E$, il existe une forme linéaire $\phi_x \in E'$ telle que $\|\phi_x\|_{E'} = 1$ et $\phi_x(x) = \|x\|$.

6. Il suffit d'appliquer la question précédente avec $(E, \|\cdot\|) = (\ell^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2)$ et

$$A = \{((a_0, ..., a_N, 0, ...0) \mid N \in \mathbb{N}\} \subset \ell^2(\mathbb{N}).$$

En effet, demander que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit dans $\ell^2(\mathbb{N})$ est équivalent à demander que A soit une partie bornée de E (pour la norme $\|\cdot\|_2$). Et, d'autre part, l'hypothèse de la question est également celle de la question 5, puisque, pour toute forme linéaire continue ϕ sur $\ell^2(\mathbb{N})$, il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ telle que $\phi((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum a_n b_n$: c'est le théorème de représentation de Riesz.

---

6. Formes bilinéaires continues sur un produit de deux espaces de Banach

On doit montrer qu'il existe c une constante telle que $|B(x, y)| \leqslant c\,\|x\|\,\|y\|$ (pour tout x, y). Notons que par linéarité, il suffit de démontrer le résultat précédent lorsque x, y sont dans la boule unité (respectivement de E et de F). Supposons que F soit de Banach; on peut alors utiliser le théorème de Banach-Steinhaus pour les espaces de Banach F et $\mathbb{R}$ en introduisant la famille $\{\phi_x\}$ des formes linéaires continues sur F définies par $\phi_x(y) = B(x, y)$. On doit montrer que pour tout $y \in F$, la famille $\phi_x(y)$ est bornée. Or pour y fixé, $x \mapsto \phi_x(y) = B(x, y)$ est une forme linéaire continue, donc bornée (par une constante C_y) lorsque x décrit la boule unité (fermée) $\overline{B_E(0, 1)}$ de E. Le théorème de Banach-Steinhaus donne alors qu'il existe une constante c telle que pour tout $x \in \overline{B_E(0, 1)}$, $\|\phi_x\| \leqslant c$ ce qui assure que

$$\forall x \in \overline{B_E(0, 1)},\ \forall y \in F, \quad |\phi_x(y)| = |B(x, y)| \leq c\|y\|.$$

Par linéarité en x, on obtient le résultat souhaité.

---

7. Divergence des séries de Fourier des fonctions continues.

On note $C_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π-périodiques. On munit cet espace vectoriel de la norme uniforme. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_n l'opérateur linéaire de $C_{2\pi}$ dans l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré $\leq n$ qui associe à chaque fonction f sa série de Fourier d'ordre n :

$$S_n(f) : t \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikt}.$$

1. Fixons $t_0 \in \mathbb{R}$. Fixons $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que, pour tout $f \in L^1_{2\pi}$, on a $S_n(f)(t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(t_0 - s)f(s)ds$. Considérons la fonction $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_0(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } D_n(t_0 - s) \geq 0 \\ -1 & \text{si } D_n(t_0 - s) < 0 \end{cases}$$

La formule ci-dessus montre que $S_n(f_0)(t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|D_n(t_0-s)|ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|D_n(s)|ds$. La fonction f_0 est de norme 1. Elle n'est pas continue, mais on peut considérer une suite $(f_{0,k})_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues qui coïncident avec f_0 sur des ensembles dont la mersure tend vers 1, et telle que $\|f_{0,k}\|_\infty = 1$ pour tout k ; on a alors

$$S_n(f_{0,k})(t_0) \to \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|D_n(s)|ds \quad \text{quand } n\to\infty.$$

Ceci montre que

$$\sup_{f\in C_{2\pi}} \frac{|S_n(f)(t_0)|}{\|f\|_\infty} \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|D_n(t)|dt.$$

2. On calcule

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = e^{-int}\frac{1-e^{i(2n+1)t}}{1-e^{it}} = \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)}.$$

On a donc

$$|D_n(t)| \geq 2\left|\frac{\sin((n+1/2)t)}{t}\right|.$$

En posant $u = (n+1/2)t$, on obtient donc

$$\int_0^{2\pi}|D_n(t)|dt = \int_0^{(2n+1)\pi}\left|\frac{\sin u}{u}\right|du.$$

Il est bien connu (et facile de montrer) que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin u}{u}\right|du$ diverge. On en déduit donc, en utilisant la question précédente que $\sup_{f\in C_{2\pi}}\frac{|S_n(f)(t_0)|}{\|f\|_\infty}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Le théorème de Banach-Steinhaus (plus exactement sa contraposée) nous dit alors qu'il existe un G_δ-dense G_{t_0} dans $C_{2\pi}$ telle que, pour toute fonction $f\in G_{t_0}$, la suite $\frac{|S_n(f)(t_0)|}{\|f\|_\infty}$ n'est pas bornée. En particulier, pour tout $f\in G_{t_0}$, la série de Fourier de f ne converge pas en t_0.

Soit maintenant E un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$ (par exemple $E=\mathbb{Q}$). Posons $G_E := \bigcap_{t_0\in E} G_{t_0}$. C'est une intersection dénombrable de G_δ-denses, donc un G_δ-dense. Et pour tout $f\in C_{2\pi}$, la série de de Fourier de f ne converge en aucun point de E.

Commentaire. Un théorème de L. Carleson (qui a reçu le prix Abel, entre autre pour ce résultat) affirme que la série de Fourier de n'importe quelle fonction continue converge en presque tout point vers la valeur de cette fonction (en fait il suffit que la fonction soit dans un L^p). Réciproquement, Kahane et Katznelson ont montré que, pour tout ensemble E de mesure de Lebesgue nulle, il existe une fonction f dont la série de Fourier ne converge en aucun point de E.

---

8. Applications linéaires continues surjectives

Si $T : E\to F$ est surjective, alors par le théorème de l'application ouverte, il existe $r>0$ tel que la boule fermée $\overline{B_F(0,1)}$ dans F soit contenue dans l'image $T(\overline{B_E(0,r)})$ par T de la boule fermée de E centrée à l'origine et de rayon r. Soit $S : E\to F$ telle que $\|S-T\| \leqslant \frac{1}{2r}$. Il suffit maintenant de montrer S est surjective. Or si $y\in B_F(0,1)$, il existe $x_0\in B_E(0,r)$ tel que $y = T(x_0)$ et $\|S(x_0)-y\| \leqslant \frac{1}{2}$. On en déduit qu'il existe $\tilde{x}_1\in B_E(0,r)$ tel que $T(\tilde{x}_1) = 2(y-S(x_0))$, d'où, pour $x_1 = \tilde{x}_1/2$, on a $\|S(x_0+x_1)-y\| \leqslant 1/4$. Par récurrence on obtient une suite de Cauchy (x_n) dans E telle que $\|S(\sum_{i=0}^N x_i) - y\| \leqslant 1/2^{N+1}$. On en conclut qu'il existe $x\in E$ tel que $S(x)=y$ et par homothétie, il suit que S est surjective.

---

9. Un ensemble gras, mais négligeable

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération des rationnels. Pour tout $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'ensemble

$$O_p = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left] x_n - \frac{1}{p2^{n+1}} \ , \ x_n + \frac{1}{p2^{n+1}} \right[$$

est un ouvert dense de mesure de Lebesgue inférieure à $\displaystyle \frac{1}{p} \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{p}$. Ainsi, $\displaystyle \bigcap_{p\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} O_p$ est un G_δ dense de mesure nulle.

---

10. Théorème de Schur.

1. Par définition de la continuité d'une forme linéaire, $\|\varphi(x_p)\| \leqslant \|\varphi\| \, \|x_p\| \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. Il suffit de considérer, comme forme linéaire sur ℓ^1, l'élément de ℓ^∞ : $(\delta_{p,i})_{i\in\mathbb{N}}$.

3. Rappelons que Γ, muni de la topologie produit est métrisable (produit dénombrable de métriques) et par ailleurs complet.

On fixe $\varepsilon > 0$ et on définit $F_n^\epsilon := \{\psi \in \Gamma \,/\, \forall k \geq n, \, |\psi(x_k)| \leqslant \varepsilon\}$ qui est fermé (comme intersection de fermés). Par hypothèse, la réunion des F_n^ε donne tout Γ par convergence faible. Donc par Baire un des F_n est d'intérieur non vide. Mais les F_n sont convexes symétriques par rapport à 0. Cela donne que le F_n en question est voisinage de 0; en particulier il contient un voisinage de la forme $U = \{\psi \in \Gamma \,/ |\psi_1| < \delta, \ldots, |\psi_N| < \delta\}$ pour un certain $\delta > 0$ et N fini, qu'on peut supposer plus grand que n. Alors pour tout $p \geq N \geqslant n$, il existe $\psi^p \in U$ tel que $\psi_i^p = 0$ pour tout $i \leqslant N$ et $\psi_i^p(x_p(i)) = |x_p(i)|$ pour $i > N$. Alors,

$$\|x_p\|_1 \leqslant \sum_{i=0}^{N} |x_p(i)| + \psi^p(x_p) \leqslant 2\,\varepsilon$$

si p est suffisament grand car $\psi^p \in U \subset F_n^\varepsilon$ et d'après la question précédente appliquée à $x_p(1), \ldots, x_p(N)$.

---

11. Il n'existe pas de partition dénombrable non-triviale de $[0,1]$ en fermés

On considère une collection au plus dénombrable $\{F_n\}_{n\in I}$ de fermés deux à deux disjoints de $[0,1]$, dont l'union est égale à $[0,1]$ tout entier.

Soit $O := \bigcup_{n\in I} \mathrm{int}(F_n)$ et $G := [0,1] \setminus O = \bigcup_{n\in I} \mathrm{fr}(F_n)$. L'ensemble O est une union d'ouverts, donc un ouvert. Son complémentaire G est donc fermé. Par ailleurs, G est, par définition, une réunion dénombrables de fermés d'intérieurs vides ; d'après le théorème de Baire, G est donc d'intérieur vide.

Soit C une composante connexe de O. Si C n'était pas contenue dans l'un des F_n, alors il existerait un point x_0 de C et un entier n_0 tel que x_0 serait dans la frontière de F_{n_0}, ce qui est absurde. Donc toute composante connexe de O est contenue dans l'un des F_n.

Supposons G non-vide. Comme G est fermé, il est complet. On peut donc appliquer le théorème de Baire dans G. Les $F_n \cap G$ sont des fermés de G. Leur réunion est égale à G tout entier ; en particulier, leur réunion est d'intérieur non-vide dans G. Le théorème de Baire implique donc qu'il existe un entier n_0 tel que F_{n_0} est d'intéieur non-vide dans G. Autrement dit, il existe un intervalle ouvert $]a,b[\subset [0,1]$ tel que $G\cap]a,b[$ est non-vide et contenu dans F_{n_0}.

Puisque G est d'intérieur vide dans $]a,b[$, l'ntervalle $]a,b[$ rencontre O ; il rencontre donc l'intérieur de l'un des F_n. Soit n un entier tel que l'intérieur de F_n rencontre $]a,b[$. On sait que $G\cap]a,b[$ est non-vide. Donc F_n ne contient pas $]a,b[$. Donc, il existe au moins un point de la frontière de F_n dans $]a,b[$. Comme $G\cap]a,b[\subset F_{n_0}$, on a donc $n = n_0$. Ainsi $O\cap]a,b[\subset F_{n_0}$ et $G\cap]a,b[\subset F_{n_0}$. On a donc montré de $]a,b[\subset F_{n_0}$. Mais ceci implique que $]a,b[$ ne rencontre pas G, ce qui contredit nos hypothèses.

On a donc $G = \emptyset$. Ainsi $[0,1] \subset O$. Mais O n'a donc qu'une seule composante connexe. Et, on a vu que cette composante connexe doit être contenue dans l'un des F_n. On en conclut finalement que la famille $\{F_n\}_{n\in I}$ est réduite à un seul élément.