École Normale Supérieure – Année 2012-2013
T.D. de Topologie, Analyse et Calcul différentiel

Corrigé de la feuille d'exercices n°9

---

1. Identité du parallélogramme généralisée

1. Pour $n = 2$, on retrouve l'identité du parallélogramme usuelle. On démontre alors l'identité par une récurrence aisée en remarquant que

$$\|\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n + x_{n+1}\|^2 + \|\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n - x_{n+1}^2\|^2 \quad = \quad 2\big(\|\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n\|^2 + \|x_n\|^2\big).$$

2. Supposons que $p < 2$ et soit $T : \ell^p \to \ell^2$ un isomorphisme. On applique l'égalité du 1) à $x_i = T(e_i)$. Comme $\|\epsilon_1 e_1 + \cdots \epsilon_n e_n\|_p = n^{1/p}$, on en déduit que pour tout n

$$\frac{n^{2/p}}{\|T^{-1}\|^2} \leqslant n\|T\|^2$$

car $\|T(y)\|_2 \geq \frac{\|y\|_p}{\|T^{-1}\|}$. Ceci est absurde puisque $p < 2$. Si $p > 2$, on inverse les rôles jouées par p et 2 dans l'argument précédent.

---

2. Opérateur de scattering

Corrigé en classe (il s'agit d'une application du théorème de Lax-Milgram).

---

3. Opérateurs compacts à valeurs dans un Hilbert

Soit $\epsilon > 0$. $T(B_E)$ est précompacte, on peut donc la recouvrir par des boules de rayon ϵ $B(Tx_i, \epsilon)$. Soit $F_\epsilon = Vect(x_i)$ (de dim finie) et P_F la projection orthogonale sur F_ϵ. On pose $T_\epsilon = P_F \circ T$. T_ϵ est un opérateur de rang fini. D'autre part, si $x \in B_E$, il existe i tel que $\|Tx - Tx_i\| < \epsilon$ et donc ($Tx_i = P_F Tx_i$)

$$\|Tx - T_\epsilon x\| = \|Tx - P_F(Tx)\| \leq \|Tx - Tx_i\| + \|P_F(Tx_i - Tx)\| \leq 2\epsilon,$$

car $\|P_F\| \leq 1$. Ainsi on a $\|T - T_e\| \leq 2\epsilon$, et $\lim_{\epsilon \to 0} T_\epsilon = T$.

---

4. Continuité des opérateurs auto-adjoints

On peut utiliser un exercice de la feuille 8 pour l'application bilinéaire $B(x,y) = \langle x, T(y)\rangle = \langle T(x), y\rangle$. On obtient alors que $|B(x,y)| \leqslant \|B\|\,\|x\|\,\|y\|$ et en prenant $y = T(x)$, on en déduit $\|T\| \leqslant \|B\|$ est fini ! On pouvait aussi se ramener au lemme suivant (via le théorème de Riesz assurant que toute forme linéaire continue ϕ est de la forme $\phi(x) = \langle a_\phi, x\rangle$):

Lemme: Soit $T : E \to F$ une application linéaire entre deux Banach telle que pour tout $\phi \in F'$ (i.e. ϕ est linéaire continue), $\phi \circ T \in E'$, c'est à dire $\phi \circ T$ est encore continue. Alors T est continue.

Pour démontrer le lemme, on utilise simplement le théorème du graphe fermé. Il suffit alors de montrer que pour toute suite $(x_n, T(x_n))$ qui converge vers (x, y), on a $y = T(x)$. Par continuité de $\phi \circ T$, pour toute forme linéaire continue $\phi : F \to \mathbb{R}$, on en déduit que $\phi(y) = \phi(T(x))$ ce qui assure que $y = T(x)$ grace à Hahn-Banach.

---

5. Opérateurs auto-adjoints compacts

Corrigé en classe (Pour les λ_n et $-\mu_n$, on utilise le fait qu'un opérateur compact est de Fredholm, et que l'on a une bonne description de son spectre).

---

6. Le théorème de représentation de Riesz est faux dans un espace pré-hilbertien

Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ l'espace pré-hilbertien des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Pour $p \geq 0$ et $a \in]0,1[$ fixés, on considère la forme linéaire $u : E \to \mathbb{R}$ définie par $u(f) = \int_0^a t^p f(t)dt$.

1. Soit φ la fonction donnée par $\varphi(t) = t^p \mathbf{1}_{[0,a]}(t)$. Pour tout $f \in E$, on a alors d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz,

$$u(f) \leq \|\varphi\|_2 \|f\|_2 = \left(\frac{a^{2p+1}}{2p+1} \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_2,$$

ce qui montre la continuité de u. En prenant une fonction continue f qui coïncident avec φ sur $[0,a]$, on trouve un cas d'égalité dans l'inégalité ci-dessus, ce qui montre que la norme de u est égale à $\left(\frac{a^{2p+1}}{2p+1} \right)^{\frac{1}{2}}$.

2. Le produit scalaire de E se prolonge bien sûr à $\mathcal{L}^2([0,1])$, et on a $u(f) = \langle f, \varphi \rangle$ pour tout $f \in E$. S'il existait $g \in E$ tel que $u(f) = \langle f, g \rangle$ pour tout $f \in E$, alors, on aurait $\langle \varphi, f \rangle = \langle g, f \rangle$ pour tout $f \in E$, et donc $f = \varphi$ puisque E est dense dans $L^2([0,1])$, ce qui est absurde puisque $\varphi \notin E$.

---

7. Hyperplan fermé d'orthogonal réduit à $\{0\}$ dans un espace pré-hilbertien

1. Soit H un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel de H. Si F est dense, alors pour tout $x \in H \setminus \{0\}$, on peut trouver une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge vers x. Par continuité du produit scalaire, on a alors, pour tout n assez grand, $\langle x, y_n \rangle \geq \frac{1}{2} \langle x, x \rangle = \|x\|^2$. Ainsi l'orthogonal de F est réduit à $\{0\}$. Réciproquement, supposons que F n'est pas dense, et considérons $x \in H \setminus \overline{F}$. Notons z le projeté orthognal de x sur $\overline{F}$. Alors $x - z$ est dans l'orthogonal de $\overline{F}$, donc dans celui de F ; en particulier, celui-ci n'est pas réduit à $\{0\}$.

2. L'inégalité de Cauchy Schwarz montre que f est continue : pour tout $u \in c_{00}(\mathbb{N})$, on a $|f(u)| \leq \frac{\pi^2}{6} \|u\|_2$. Par suite $\mathrm{Ker}(f)$ est fermé. Soit $v \in c_{00}(\mathbb{N})$, un élément de $(\mathrm{Ker}(f))^\perp$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $v_n = 0$ pour tout $n \geq N$. Pour $n \leq N$, considérons la suite $u^n \in c_{00}(\mathbb{N})$ qui n'a que deux termes non-nuls : le terme de rang n qui vaut 1, et le terme de rang N qui vaut $-\frac{N+1}{n+1}$. Alors $f(u^n) = 0$ donc $u^n \in \mathrm{Ker}(f)$ et $\langle u^n, v \rangle = v_n$. Comme $v \in (\mathrm{Ker}(f))^\perp$, ceci montre que $v_n = 0$. Ainsi v est nécessairement la suite nulle. Autrement dit, l'orthogonal de $\mathrm{Ker}(f)$ est réduit à $\{0\}$.

3. Soit H un espace préhilbertien non-complet. Soit $\overline{H}$ un complété de H. On identifie H à son image isométrique dans $\overline{H}$. Soit $x \in \overline{H} \setminus H$. Alors $u^\perp$ est un hyperplan fermé de $\overline{H}$, donc $F := u^\perp \cap H$ est un hyperplan fermé de H. Et $F^{\perp_H} = F^\perp \cap H = (u^\perp)^\perp \cap H = \overline{(\mathbb{R}.u)} \cap H = \mathbb{R}.u \cap H = \{0\}$.

---

8. Distance à un sous-espace vectoriel fermé dans un espace de Banach

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de F qui converge uniformément dans E vers une fonction f. Alors, pour tout $x \in [-1,1]$, on a $f_n(-x) = -f_n(x)$ et en prenant la limite pour $n \to \infty$, on obtient $f(-x) = -f(x)$, donc f est impaire. L'application $\Theta : f \mapsto \int_0^1 f(t)\,dt$ de E dans $\mathbb{R}$ est linéaire et continue car, pour tout $f \in E$,

$$\left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| \le \int_0^1 |f(t)|\,dt \le \|f\|_\infty.$$

Il suit alors que $\int_0^1 f_n(t)\,dt = 0$ implique $\int_0^1 f(t)\,dt$ en passant à la limite. On a obtenu que $f \in F$ et on conclut que F est fermé.

2. On a $|\int_0^1 t-\psi(t)\;dt| \le \int_0^1 |t-\psi(t)|\;dt \le ||\varphi-\psi||_\infty$ puisque $\varphi(t)=t$. Or, si $\psi \in F$, on a $\int_0^1 t-\psi(t)\;dt = \int_0^1 tdt - 0 = 1/2$. Il suit que $1/2 \le ||\varphi-\psi||_\infty$. La distance de φ à F est donc supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$.

Pour tout entier $n \geqslant 3$, soit ψ_n la fonction impaire définie sur $[0,1]$ par

$$\psi_n(t) = \begin{cases} -(n-2)^2\,\frac{t}{8n} & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 4/(n+2) \\ t - 1/2 - 1/n & \text{si } 4/(n+2) \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Par construction, ψ_n est impaire. De plus

$$\begin{aligned} \int_0^1 \psi_n(t)\,dt &= \int_0^{4/(n+2)} -(n-2)^2 t/(8n)\,dt + \int_{4/(n+2)}^1 (t-1/2-1/n)\,dt \\ &= \frac{-\,(n-2)^2}{n(n+2)^2} + \frac{1}{2} - \frac{8}{(n+2)^2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{n+2} - \frac{1}{n} + \frac{4}{n+2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On a bien $\psi_n \in F$. Pour calculer $\|\psi_n - \varphi\|$, on remarque que comme φ et ψ_n sont impaires, il suffit de le faire sur le segment $[0,1]$. Pour $0 \le t \le 4/(n+2)$, on a $|\varphi(t) - \psi_n(t)| = (1 + \frac{(n-2)^2}{8n})t \le \frac{(n+2)^2}{8n}\,t$. On en déduit que

$$sup\{|\varphi(t) - \psi_n(t)|\,,\, 0 \leqslant t \leqslant\} = \frac{(n+2)^2}{8n}\,\frac{4}{n+2} = 1/2 + 1/n.$$

Pour $t \ge 4/(n+2)$, on a $|\varphi(t) - \psi_n(t)| = 1/2 + 1/n$. Par conséquent, $\|\psi_n - \varphi\| = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$. Ainsi la distance de φ à F est inférieure ou égale à $\frac{1}{2}$. Nous avons donc montré que la distance de φ à F est égale à $\frac{1}{2}$.

Montrons que cette distance ne peut pas être atteinte. Si $\psi \in F$, alors ψ est impaire. Il suit que $\psi(0) = 0 = \varphi(0)$. Par continuité, il existe un intervalle $[0,a] \subset [0,1]$ sur lequel $|t - \psi(t)| \le 1/4 = 1/2||\varphi - \psi||_\infty$. Par suite, on obtient que

$$1/2 \le \int_0^1 |t - \psi(t)|\,dt \le \frac{a}{4} + (1-a)||\varphi - \psi||_\infty < ||\varphi - \psi||_\infty.$$

Par conséquent, $d(\psi, \varphi) > \frac{1}{2}$.

---

9. Opérateurs de Hilbert-Schmidt

Soit H un espace de Hilbert.

1. D'après le relation de Parseval, on a

$$\sum_{i\in I} \|Ae_i\|^2 = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} |\langle Ae_i, f_j\rangle|^2 = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} |\langle e_i, A^* f_j\rangle|^2 = \sum_{j\in J} \|A^* f_j\|^2.$$

Ainsi si $(e_i)_{i\in I}$ et $(g_k)_{k\in K}$ sont deux bases hilbertiennes de H, on a

$$\sum_{i\in I} \|Ae_i\|^2 = \sum_{j\in J} \|A^* f_j\|^2 = \sum_{k\in K} \|A^* g_k\|^2.$$

2. Soient A et B deux opérateurs de Hilbert-Schmidt de H, et λ un scalaire. Il est clair que $\|\lambda A\|_{\mathcal{HS}} = |\lambda|.\|A\|_{\mathcal{HS}}$. Par ailleurs, en utilisant l'inégalité de Minkowski, si $(e_i)_{i\in I}$ est une base hibertienne de H, on a

$$\begin{aligned}
\|A+B\|_{\mathcal{HS}} &= \left(\sum_{i\in I}\|Ae_i+Be_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \left(\sum_{i\in I}\|Ae_i\|^2+\|Be_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \left(\sum_{i\in I}\|Ae_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i\in I}\|Be_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \|A\|_{\mathcal{HS}}+\|B\|_{\mathcal{HS}}.
\end{aligned}$$

Enfin, puisque $(e_i)_{i\in I}$ est une base hibertienne, on ne peut avoir $\|A\|_{\mathcal{HS}}=0$ que si $A=0$. Ceci montre que $\|.\|_{\mathcal{HS}}$ définit une norme sur $\mathcal{HS}$. Par ailleurs, pour tout $x=\sum_{i\in I}\xi_i e_i$, $\xi_i=\langle x,e_i\rangle$, on a

$$\|Ax\|=\left\|\sum_{i\in I}\xi_i Ae_i\right\|\leq\sum_{i\in I}|\xi_i|\,\|Ae_i\|\leq\left(\sum_{i\in I}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(\sum_{i\in I}\|Ae_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\|A\|_{\mathcal{HS}}\|x\|,$$

d'où $|||A|||\leq\|A\|_{\mathcal{HS}}$.

3. Soient A et B deux opérateurs de Hilbert-Schmidt, et $(e_i)_{i\in I}$ est une base hibertienne de H. On a

$$\|A\circ B\|_{\mathcal{HS}}=\left(\sum_{i\in I}\|A(Be_i)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq|||A|||.\left(\sum_{i\in I}\|Be_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}=|||A|||.\|B\|_{\mathcal{HS}}.$$

Par ailleurs, la question 1 montre que $\|A\|_{\mathcal{HS}}=\|A^*\|_{\mathcal{HS}}$. On a par ailleurs $|||B|||=|||B^*|||$. D'où

$$\|A\circ B\|_{\mathcal{HS}}=\left(\sum_{i\in I}\|B^*(A^*e_i)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq|||B^*|||.\left(\sum_{i\in I}\|Ae_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}=|||B^*|||.\|A^*\|_{\mathcal{HS}}=|||B|||.\|A\|_{\mathcal{HS}}.$$

Ceci montre que $A\circ B$ est de Hilbert-Schmidt dès que A ou B l'est.

4. Nous avons vu que $\|\cdot\|_{\mathcal{HS}}$ définit une norme sur $\mathcal{HS}$. Cette norme découle clairement d'un produit scalaire. Il reste donc à voir que $\mathcal{HS}$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{HS}}$. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{HS}$. La majoration $|||A|||\leq\|A\|_{\mathcal{HS}}$ montre que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également de Cauchy pour la norme $|||\cdot|||$. Comme $\mathcal{L}(E)$ est complet pour cette norme, la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers un opérateur $A_\infty\in\mathcal{L}(E)$ pour la norme d'opérateur usuelle. Fixons $\epsilon>0$, et choisit une base hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$ de H. On sait qu'il existe N tel que pour tous $p,q\geq N$, on a

$$\sum_{i\in I}\|A_pe_i-A_qe_i\|^2<\epsilon.$$

En faisant tendre q vers l'infini, on en déduit

$$\sum_{i\in I}\|A_pe_i-A_\infty e_i\|^2<\epsilon,$$

ce qui prouve que A_n-A_∞, et donc A_∞ est de Hilbert-Schmidt, et que A_p tend vers A_∞ au sens de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{HS}}$.

5. Soit A un opérateur de rang fini. Choisissons une base hilbertienne $(f_j)_{j\in J}$ de H de sorte que $\mathrm{Im}(A)$ soit engendré par $(f_j)_{j\in K}$ où K est une partie finie de J. Alors, pour tout $x\in H$, on a $\langle x,A^*f_j\rangle=\langle Ax,f_j\rangle=0$ si $j\in J\setminus K$. D'où $A^*f_j=0$ pour tout $j\in J\setminus K$, et

$$\|A\|_{\mathcal{HS}}=\left(\sum_{j\in K}\|Af_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}}<+\infty.$$

Ceci montre que tout opérateur de rang fini est de Hilbert Schmidt.

Soit maintenant A un opérateur de Hilbert-Schmidt. Soit $(e_i)_{i\in I}$ est une base hibertienne de H. Soit $\epsilon > 0$. Il existe une partie finie J de I telle que $\sum_{i\in I\setminus J} \|Ae_i\|^2 \leq \epsilon$. Considérons l'opérateur de rang fini A_J défini par $A_J x = \sum_{j\in J}\langle x, e_i\rangle Te_i$. On a alors

$$\|A - A_J\|_{\mathcal{HS}} = \sum_{i\in I\setminus J} \|Ae_i\|^2 \leq \epsilon.$$

Ceci montre que les opérateurs de rangs finis sont dense dans $\mathcal{HS}$, pour la norme $\| \cdot l_{\mathcal{HS}}$, et *a fortiori* pour la norme $||| \cdot |||$. Comme tout limite (pour la topologie de la norme $||| \cdot |||$) d'opérateur de rang fini est un opérateur compact, il suit que tout opérateur de Hilbert-Schmidt est compact.

6. On sait que l'on peut trouver une base hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$ de H formée de vecteurs propres de A. On a alors

$$\|A\|_{\mathcal{HS}} = \sum_{i\in I} |\lambda_i|^2,$$

où $Ae_i = \lambda_i e_i$. L'affirmation faite dans l'énoncé en découle trivialement.

On suppose maintenant que $H = L^2(X, \mu)$ où μ est une mesure σ-finie sur un espace mesurable $(X, \mathcal{B})$. Pour $K \in L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$, on considère l'opérateur sur H défini par

$$A_K(f)(x) := \int_X K(x, y)f(y)d\mu(y).$$

7. Pour tout $f \in H = L^2(X, \mu)$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|A_K(f)(x)|^2 \leq \left(\int_X |K(x, y)|^2 d\mu(y)\right) .\|f\|_2^2$$

et donc

$$\|A_K(f)\|_2^2 \leq \left(\int_X \int_X |K(x, y)|^2 d\mu(y)d\mu(x)\right) .\|f\|_2^2 = \|K\|^2_{L^2(X\times X,\mu\otimes\mu)}.\|f\|_2^2.$$

Ceci montre que A_K est continu de norme inférieure où égale à $\|K\|_{L^2(X\times X,\mu\otimes\mu)}$. On vérifie facilement que A_K est auto-adjoint si et seulement si K est symétrique en les variables x et y.

8. Il est facile de vérifier que la famille $(e_{i,j})_{(i,j)\in I^2}$ est orthonormée. Montrons que cette famille est totale. Soit $k \in L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$ tel que $\langle k, e_{i,j}\rangle = 0$ pour tout $(i, j) \in I^2$. En écrivant

$$\langle k, e_{i,j}\rangle = \int_X \left(\int_X k(x, y)e_j(y)d\mu(y)\right) e_i(x)d\mu(x)$$

utilisant le fait que $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de $L^2(X, \mu)$, on obtient que la fonction $x \mapsto \int_X k(x, y)e_j(y)d\mu(y)$ est nulle pour tout j. Et en utilisant le fait que $(e_j)_{j\in I}$ est une base hilbertienne de $L^2(X, \mu)$, on en déduit que k est nul.

9. On remarque que, pour tous $(i, j) \in I^2$, on a

$$\langle K, e_{i,j}\rangle_{L^2(X\times X,\mu\otimes\mu)} = \langle A_K(e_i), e_j\rangle_{L^2(X,\mu)}.$$

En utilisant la définition de $\|A_K\|_{\mathcal{HS}}$, puis la formule de Parseval dans $L^2(X, \mu)$, puis l'inégalité ci-dessus, puis la formule de Parseval dans $L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|A_K\|_{\mathcal{HS}} &= \left(\sum_{i\in I} \|A_K(e_i)\|^2_{L^2(X,\mu)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{i\in I}\sum_{j\in I} \langle A_K(e_i), e_j\rangle^2_{L^2(X,\mu)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{i\in I}\sum_{j\in I} \langle K, e_{i,j}\rangle^2_{L^2(X\times X,\mu\otimes\mu)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|K\|_{L^2(X\times X,\mu\otimes\mu)}.
\end{aligned}$$

10. Réciproquement, soit $A \in \mathcal{HS}$. Pour $(i,j) \in I^2$, notons $k_{i,j} := \langle Ae_i, e_j\rangle$. On a alors

$$\sum_{(i,j)\in I^2} |k_{i,j}|^2 = \sum_{(i,j)\in I^2} \langle Ae_i, e_j\rangle^2 = \sum_{i\in I} \|Ae_i\|^2 = \|A\|^2_{\mathcal{HS}} < +\infty.$$

Puisque la famille $(e_{i,j})_{(i,j)\in I^2}$ est orthonormée dans $L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$, ceci entraine que la fonction

$$K := \sum_{(i,j)\in I^2} k_{i,j} e_{i,j}$$

est dans $L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$. Pour tout $(i,j) \in I^2$, on a alors $\langle A(e_i), e_j\rangle = k_{i,j} = \langle A_K e_i, e_j\rangle$. Comme (e_i) est une base hilbertienne de $L^2(X,\mu)$, ceci montre que $A = A_K$.

11. La question 9 montre que $K \mapsto A_K$ définit une isométrie entre $L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$ et $\mathcal{HS}(H)$. La question 10 montre que cette isométrie est surjective.

---

10. Théorème ergodique de Von Neumann

1. Soit H un espace de Hilbert et T un endomorphisme continu de H de norme inférieure ou égale à 1. Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note $T_n := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k$ la moyenne des $n+1$ premiers itérés de T, et on veut montrer que

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = P(x) \quad \text{pour tout } x \in H$$

où P est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - T)$.

a. Comme $|||T||| \leq 1$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que l'on a $\langle Tx, x\rangle \leq \|x\|^2$, avec égalité seulement si $Tx = x$. Comme $|||T^*||| = |||T|||$, la même assertion est vraie pour T^*. On a donc

$$(Tx = x) \Leftrightarrow (\langle Tx, x\rangle = \|x\|^2) \Leftrightarrow (\langle x, T^*x\rangle = \|x\|^2) \Leftrightarrow (\langle T^*x, x\rangle = \|x\|^2) \Leftrightarrow (T^*x = x).$$

Ceci montre que $\mathrm{Ker}(I - T) = \mathrm{Ker}(I - T^*)$. On rappelle par ailleurs que, pour tout opérateur S, on a $H = \mathrm{Ker}(S) \oplus \overline{\mathrm{Im}(S)}$ (et les deux facteurs de cette décompositions sont orthogonaux). En appliquant cela à $S = (I - T)^* = I - T^*$, et en utilisant l'égalité $\mathrm{Ker}(I - T) = \mathrm{Ker}(I - T^*)$, on obtient la décomposition demandée :

$$H = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - T) \oplus \overline{\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - T)}$$

(et les deux facteurs de cette décompositions sont orthogonaux).

b. Si $x \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - T)$, alors il existe $z \in H$ tel que $x = z - Tz$. On a alors $T_n(x) = \frac{1}{n+1}(z - T^{n+1}z)$. Comme $|||T^{n+1}||| \leq |||T|||^{n+1} \leq 1$, on en déduit immédiatement que $T_n x$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Supposons maintenant que $x \in \overline{\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - T)}$. Soit $\epsilon > 0$. On peut trouver $x' \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - T)$ tel que $\|x - x'\| \leq \epsilon$. D'après ce qui précède, il existe N tel que, pour n plus grand que N, on a $\|T_n x'\| \leq \epsilon$. Par ailleurs, on a clairement $|||T_n||| \leq |||T||| \leq 1$. Ainsi, pour n plus grand que N, on a $\|T_n x\| \leq \|T_n x'\| + \|T_n(x - x')\| \leq \epsilon + \epsilon$. Ceci montre que $T_n x$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

c. Soit x dans H. D'après la question a, on peut écrire $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Ker}(I - T)$, $z \in \overline{\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - T)}$, et $\langle y, z \rangle = 0$. Le vecteur y est donc le projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Ker}(I - T)$. Comme $Ty = y$, on a $T_n y = y$. Par ailleurs, la question b. montre que $T_n z \to 0$. Ainsi $T_n x$ tend bien vers le projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Ker}(I - T)$.

2. *Application.* On applique le théorème ergodique de Von Neumann à l'opérateur T défini par $Tf(x) = f(x+\alpha)$. Cet opérateur a évidemment une norme inférieure à 1. Pour montrer le résultat, il suffit de voir que $\mathrm{Ker}(I - T)$ est réduit aux fonctions constantes. C'est facile, par exemple, en utilisant le fait que $(e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base de Hilbert de H.