École normale supérieure Année 2014-2015
Algèbre 1

Corrigé de la Feuille d'exercices 10

Exercice 1

1. On sait déjà la structure de $A \otimes_{\mathbf{K}} B$ en tant que $\mathbf{K}$-espace vectoriel. La multiplication. est définie par $a \otimes b \times a' \otimes b' = aa' \otimes bb'$. Elle est naturellement compatible à la loi additive :

$$(a_1 \otimes b_1 + a_2 \otimes b_2)\, a' \otimes b' = (a_1 \otimes b_1)(a' \otimes b') + (a_2 \otimes b_2)(a' \otimes b') = a_1 a' \otimes b_1 b' + a_2 a' \otimes b_2 b';$$

   et $\mathbf{K}$ est central dans l'algèbre $A \otimes_{\mathbf{K}} B$ ainsi définie.

2. On a une première application naturelle d'algèbres $\varphi : \mathbf{K}[x] \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{K}[y] \to \mathbf{K}[x, y]$ induite par l'application bilinéaire $(P(x), Q(y)) \mapsto P(x)Q(y)$. On a ensuite une application linéaire $\psi : \mathbf{K}[x, y] \to \mathbf{K}[x] \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{K}[y]$ définie par $\sum_{m,n} \lambda_{m,n} x^m y^n \mapsto \sum_{m,n} \lambda_{m,n}\, x^m \otimes y^n$ (ces sommes sont finies !). On vérifie que $\psi \circ \varphi$ et $\varphi \circ \psi$ induisent bien l'identité sur chacun des espaces en question.

3. L'image de $\widetilde{\varphi} : \mathbf{K}(x) \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{K}(y) \to \mathbf{K}(x, y)$ est incluse dans le sous-espace strict

$$V := \left\{ R(x, y) \in \mathbf{K}(x, y) \mid \exists (Q_1(x), Q_2(y)) \in \mathbf{K}[x] \times \mathbf{K}[y],\ R(x, y) Q_1(x) Q_2(y) \in \mathbf{K}[x, y] \right\}.$$

   Ceci montre bien que $\widetilde{\varphi}$ n'est pas surjective. Définissons

$$\widetilde{\psi} : \begin{array}{ccc} V & \to & \mathbf{K}(x) \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{K}(y) \\ \dfrac{\sum_{m,n} \lambda_{m,n} x^m y^n}{Q_1(x) Q_2(y)} & \mapsto & \sum_{m,n} \lambda_{m,n} \dfrac{x^m}{Q_1(x)} \otimes \dfrac{y^n}{Q_2(y)} \end{array}.$$

   On s'aperçoit que $\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}$ est l'identité, et on a donc l'injectivité voulue.

Exercice 2

1. L'application

$$1 \otimes a + i \otimes b + j \otimes c + k \otimes d \mapsto \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}$$

   définit bien un isomorphisme de $\mathbf{C}$-algèbres.

2. On va montrer que $H \otimes_{\mathbf{R}} H$ est isomorphe à $M_2(\mathbf{R}) \otimes_{\mathbf{R}} M_2(\mathbf{R})$ (qui est isomorphe à $M_4(\mathbf{R})$, puisque pour toute $\mathbf{K}$-algèbre A on a que $M_n(\mathbf{K}) \otimes_A \simeq M_n(A)$).
   Notons $\sigma_i = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$, $\sigma_j = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$ et $\sigma_k = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$. On pose ensuite

   $$\alpha(1 \otimes 1) = 1 \otimes 1, \quad \alpha(i \otimes 1) = \sigma_i \otimes \sigma_j, \quad \alpha(j \otimes 1) = \sigma_j \otimes 1, \quad \alpha(k \otimes 1) = \sigma_k \otimes \sigma_j.$$

   Ces matrices vérifient les relations des quaternions. Faisons la même chose de manière symétrique :

   $$\alpha(1 \otimes 1) = 1 \otimes 1, \quad \alpha(1 \otimes i) = \sigma_j \otimes \sigma_i, \quad \alpha(1 \otimes j) = 1 \otimes \sigma_j, \quad \alpha(1 \otimes k) = \sigma_j \otimes \sigma_k.$$

   Cela suffit pour prolonger α en un morphisme d'algèbres et on vérifie (dimensions !) que c'est un isomorphisme.

Exercice 3
L'image d'un tenseur pur $\lambda \otimes v$ est une application $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(U, v)$ de la forme $u \mapsto \lambda(u)v$. L'image de Φ est l'ensemble des morphismes $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(U, V)$ dont l'image est de dimension finie. C'est un isormorphisme si U ou V sont de dimension finie.
Exercice 4
Définissons l'application bilinéaire suivante

$$b : \begin{array}{ccc} (E^*)^n \times E^n & \to & \mathbf{K} \\ ((\alpha_i)_i, (x_j)_j) & \mapsto & \det((\alpha_i x_j)_{ij}) \end{array}.$$

Pour tout $(x_j)_j$, l'application $b(\cdot, (x_j))$ est alternée et passe donc au quotient pour définir $\bigwedge^n E^* \times E^n \to \mathbf{K}$. De la même manière, c'est encore alterné en l'autre variable et b induit donc une application $\bar{b} : \bigwedge^n E^* \times \bigwedge^n E \to \mathbf{K}$. Cette dernière est non dégénérée : il suffit de prendre pour $(\alpha_i)_i$ la base duale de (x_i) pour obtenir 1. L'application $(\alpha_i)_i \mapsto b((\alpha_i), \cdot)$ est l'isomorphisme $\bigwedge^n E^* \xrightarrow{\sim} \left(\bigwedge^n E\right)^*$ voulu.

Exercice 5
L'application $\bigwedge^i E \times \bigwedge^{n-i} E \to \bigwedge^n E$ plus l'isomorphisme non-canonique $\bigwedge^n E \simeq$ montrent que $(\bigwedge^i E)^*$ est non-canoniquement isomorphe à $\bigwedge^{n-i} E$.

Exercice 6
Si $f : \bigwedge^n E \to F$, on peut lui associer $(e_i)_i \mapsto f(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)$.
Si E et F sont de dimension finie, on peut construire l'application réciproque de la manière suivante : notons $\phi : \bigwedge^n E^* \xrightarrow{\sim} \left(\bigwedge^n E\right)^*$ l'isomorphisme de l'exercice 1. Notons $(f_1, \ldots, f_r)$ une base de F et $(f_1^*, \ldots, f_r^*)$ la base duale. Si $g : E^n \to F$ est n-linéaire alternée, on lui associe $\sum_j \phi(f_j^* \circ g) f_j$.
Si E ou F n'est pas de dimension finie, on pourra passer par l'algèbre tensorielle.

Exercice 7

1. Si on a $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r = 0$ avec les λ_i dans $\mathbf{K}$, on peut supposer $\lambda_{i_0} = 1$ pour un certain i_0. Alors on a
$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_r = -\sum_{j \neq i_0} \lambda_j\, u_1 \wedge \cdots \wedge u_{i_0-1} \wedge u_j \wedge u_{i_0+1} \wedge \ldots u_r = 0.$$
Si la famille $(u_i)_i$ est libre, notons F le sous-espace de E engendré : la droite $\bigwedge^r F \subseteq \bigwedge^r E$ est alors engendrée par $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r$.
2. Si $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r$ est non nul, notons F le sous-espace de E de base $(u_1, \ldots, u_r)$. Alors $\bigwedge^r F \to$ défini par $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \mapsto 1$ peut se prolonger par 0 sur un supplémentaire de $\bigwedge^r F$ et on obtient $f : \bigwedge^r E \to$.

Exercice 8

1. Il s'agit de $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \mapsto u(x_1) \wedge \cdots \wedge u(x_n)$.
2. L'image de $\bigwedge^n u$ est $\bigwedge \big(\mathrm{im}\ u\big)$.

Exercice 9

1. D'abord, la multiplication ainsi définie est bien associative. Ensuite, la distributivité par rapport à l'addition permet de définir la multiplication sur $A \otimes B$ et de lui fournir la structure d'algèbre voulue.
2. En tant que $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, l'isomorphisme est clair puisque l'on a, pour tout $n \geq 0$:
$$\bigwedge^n (V \oplus W) \simeq \bigoplus_{k=0}^{n} \big(\bigwedge^k V\big) \otimes_{\mathbf{K}}^{\mathrm{su}} \big(\bigwedge^{n-k} W\big) = \mathrm{gr}^n \Big(\big(\bigwedge V\big) \otimes_{\mathbf{K}}^{\mathrm{su}} \big(\bigwedge W\big)\Big).$$
Reste à vérifier la compatibilité avec la multiplication, qui se fait sur les éléments purs ; pour cela, calculons le produit à gauche :
$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \wedge w_{k+1} \wedge \cdots \wedge w_n) \wedge (v'_1 \wedge \cdots \wedge v'_{k'} \wedge w'_{k'+1} \wedge \cdots \wedge w'_{n'}) = (-1)^{(n-k)k'} v_I \wedge w_J,$$
où on a posé $v_I = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \wedge v'_1 \wedge \cdots \wedge v'_{k'}$ et $w_J = w_{k+1} \wedge \cdots \wedge w_n \wedge w'_{k'+1} \wedge \cdots \wedge w'_{n'}$.

Exercice 10

1. Notons r la dimension de E. Projeter sur la composante en degré 0 de l'algèbre extérieure une relation $zy = 0$ montre que la condition est nécessaire. Réciproquement, on vérifie formellement que $z_0^{-1} \sum_{i=0}^{r} \big(-z_0^{-1} \sum_{n \geq 1} z_n\big)^{\wedge i}$ est une somme finie qui constitue l'inverse cherché.

2. Seuls un nombre fini de z_n sont non nuls. Chacun s'écrit alors comme une somme finie
$$z_n = z_{n,1}^{(1)} \wedge \cdots \wedge z_{n,n}^{(1)} + \cdots + z_{n,1}^{(\alpha_n)} \wedge \cdots \wedge z_{n,n}^{(\alpha_n)}.$$
Il suffit alors de considérer pour F le sous-espace de E engendré par tous les $z_{n,i}^k$ avec $n \geq 0$ tel que $z_n \neq 0$, $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq k \leq \alpha_n$. Le résultat suit.

Exercice 11

1. Soit $\lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_k g_k = 0$ une relation de dépendance linéaire de longueur minimale sur E. On peut supposer cette relation de longueur ≥ 2. Parce que les caractères sont distincts, on a l'existence d'un élément $y \in E$ avec $g_1(y) \neq g_2(y)$. On a d'une part $g_1(y) \sum_i \lambda_i g_i(x) = 0$, et d'autre part $\sum_i \lambda_i g_i(xy) = \sum_i \lambda_i g_i(x) g_i(y) = 0$. En soustrayant, on obtient une combinaison linéaire non triviale et strictement plus courte, ce qui est absurde.
2. Pour tout $g \in G$, on a
$$\eta \circ g(v \otimes e) = \eta(v \otimes g(e)) = \eta(g(v) \otimes g(e)) = g(e)g(v) = g(ev).$$
3. Montrons d'abord que η est surjective. Notons $g_1 = \mathrm{Id}, \ldots, g_n$ les éléments de G. On renomme aussi $x_0 := 1 \in E$. Soit v un élément non nul de V. Posons, pour tout $j \in [0, n-1]$, $v_j = \sum_i g_i(x_j v) \in V^G$. Par la question (a), la matrice $(g_i(x_j))_{ij}$ est inversible, et en inversant le système précédent, on obtient les $g_i(v)$ en combinaison linéaire des v_j. La relation donnant $g_0(v)$ affirme alors la surjectivité voulue.
Montrons ensuite que η est injective. En effet, si ce n'est pas le cas, soit $(v_1, \ldots, v_m)$ une famille de V^G qui est F-libre mais non E-libre ; on la suppose aussi de longueur minimale. Soit $\sum_i \lambda_i v_i$ une combinaison linéaire non triviale sur E. Comme les λ_i ne sont pas tous dans F, on peut supposer $\lambda_1 \notin F$ et $\lambda_m = 1$. Choisissons $g \in G$ avec $g(\lambda_1) \neq \lambda_1$. On obtient alors une relation $\sum_{i=1}^{m-1} (g(\lambda_i) - \lambda_i) v_i = 0$, qui contredit la minimalité de m.