École normale supérieure Année 2014-2015

Algèbre 1

Corrigé Feuille d'exercices 11

Exercice 1 1. C'est évident.

2. $\mathfrak{S}_3$ est engendré par $(1,2)$ et $(1,2,3)$. Il suffit de montrer donc que l'espace engendré par α et β est stable par $T((1,2))$ et $T((1,2,3))$. Un simple calcul donne $T((1,2))(\alpha) = \beta$, $T((1,2))(\beta) = \alpha$, $T((1,2,3))(\alpha) = j\alpha$ et $T((1,2,3))(\beta) = j^2\beta$. Un simple calcul montre qu'aucun sous-module de W de dimension 1 est stable sous $\mathfrak{S}_3$ et donc W est irréductible.

3. Remarquons que si C est une classe de conjugaison dans $\mathfrak{S}_3$ alors $\sum_{g\in C} e_g$ est stable par T. On trouve ainsi trois sous-espace estables sous $\mathfrak{S}_3$, à savoir :

$$W_1 = \mathbf{C}_{\mathrm{Id}}, \qquad W_2 = \mathbf{C}(e_{(1,2)} + e_{(1,3)} + e_{(2,3)}), \qquad W_3 = \mathbf{C}(e_{(1,2,3)} + e_{(1,3,2)}).$$

Enfin, si on note ε la signature on a que :

$$T(g)(e_{(1,2,3)} - e_{(1,3,2)}) = \varepsilon(g)(e_{(1,2,3)} - e_{(1,3,2)})$$

(on le vérifie pour $(1,2)$ et $(1,2,3)$). L'espace $W_4 = \mathbf{C}(e_{(1,2,3)} - e_{(1,3,2)})$. est donc stable sous $\mathfrak{S}_3$. On a finalement :

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4 \oplus W.$$

La représentation triviale y apparaît trois fois, la signature une fois et l'unique représentation de dimension 2 une fois (voir aussi exercice 8).

Exercice 2 Soit W l'espace vectoriel de de base $\{e_g\}_{g\in G}$. Rappelons que la représentation regulière ρ_R de G opère sur W par $\rho_R(h)e_g = e_{hg}$.
Notons :

$$\begin{array}{rcl} \phi : V & \longrightarrow & W \\ e_g & \mapsto & \rho(g)v \end{array}$$

On a que ϕ est G-invariant et est donc un isomophisme entre ρ_R et ρ.

Exercice 3 1. La composition de deux morphismes de groupes est un morphisme de groupes.

2. Supposons ρ réductible et soit τ une sous-représentation propre de ρ. Alors $\tau \circ \pi$ est une sous-représentation propre de $\rho \circ \pi$. On déduit que $\rho \circ \pi$ n'est pas irréductible. Réciproquement, si $\rho \circ \pi$ n'est pas irréductible, il existe τ une sous-représentation propre de $\rho \circ \pi$. Puique π est surjectif, on a que τ est stable sous ρ et donc ρ n'est pas irréducitble.

Exercice 4 On sait que G admet un sous-groupe distingué H d'indice p. On a donc que $G/H \simeq \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. On injecte $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ dans les racines p-ièmes de l'unité dans $\mathbf{K}^\times$. On a donc une représentation de dimension 1 par composition $G \to G/H \to \mathbf{K}^\times$.

Exercice 5 Il faut donc montrer que $|G|$ divise $\chi(1)$. On calcule $\langle \mathrm{triv}, \chi \rangle$ où triv denote la représenation triviale de G. On a que $\langle \mathrm{triv}, \chi \rangle = \chi(1)/|G|$ et donc $|G|$ divise $\chi(1)$.

Exercice 6
1. On décompose le caractère χ en somme de caractères irréductibles : $\chi = \sum_i a_i \chi_i$. Il faut donc montrer que $\sum_i a_i^2 \geq \sum_i a_i$ ce qui est vrai car $a_i \in \mathbf{N}$.
2. Notons ψ la restriction du caractère χ à A. D'après 1), on a $\sum_{x \in A} |\psi(x)|^2 \geq \mathrm{Card}(A)\psi(1) = \mathrm{Card}(A)\chi(1)$. D'autre part, puisque χ est irréductible on a que $\sum_{g \in G} |\chi(g)|^2 = \mathrm{Card}(G)$. On a donc $\mathrm{Card}(G) \geq \sum_{x \in A} |\chi(x)|^2 = \mathrm{Card}(A)\chi(1)$ d'où $\chi(1) \leq n$.
   Si $\chi(1) = n$ alors $\sum_{x \in G \setminus A} |\chi(x)|^2 = 0$, c'est-à-dire si $\chi(x) = 0$ pour tout $x \in G \setminus A$.

Exercice 7
1. Calculons le produit scalaire : $\langle \phi\psi, \phi\psi \rangle = 1/|G| \sum_{g \in G} \phi(g)\psi(g)\overline{\phi(g)\psi(g)}$. Puisque ψ est de degré 1 on a que $\psi(g)\overline{\psi(g)} = 1$ pour tout $g \in G$. On a donc que $\langle \phi\psi, \phi\psi \rangle = \langle \phi, \phi \rangle$ et donc $\phi\psi$ est irréductible si et seulement si ϕ ets irréductible.
2. On a que $\left\langle \mathrm{triv}, \psi\overline{\psi} \right\rangle = \langle \psi, \psi \rangle$. Si ψ est non irréductible alors $\langle \psi, \psi \rangle > 1$ et donc triv apparaît dans $\psi\overline{\psi}$ avec multiplicité ≥ 2 donc $\psi\overline{\psi}$ est réductible. Si ψ est irréducitble alors $\left\langle \mathrm{triv}, \psi\overline{\psi} \right\rangle = 1$ et donc $\psi\overline{\psi}$ est irréductible si et seulement si $\psi\overline{\psi} = \mathrm{triv}$. Mais cela n'est pas possible car $\psi\overline{\psi}(1) > 1$ parce que ψ est de degré ≥ 2 et $\mathrm{triv}(1) = 1$.
3. D'après 1), $\phi\psi$ est irréductible et donc par hypothèse $\phi\psi = \phi$, d'où le résultat.

Exercice 8 Fait en cours.

Exercice 9
1. Le groupe G s'insère dans une suite exacte scindée.

$$0 \to \mathbf{F}_q \to G \to \mathbf{F}_q^\times \to 0$$

   Il y a alors $q-1$ représentations de dimension 1 ; et comme il y a q classes de conjugaison, il reste une représentation irréductible de dimension supérieure. Sa trace vaut $q-1$ sur $\{1\}$ et -1 sur $\{x \mapsto x + b \mid b \in \mathbf{F}_q^\times\}$.

2. Elle correspond à la représentation sur

$$\left\{f : \mathbf{F}_q \to \mathbf{C} \;\middle|\; \sum_{\mathbf{F}_q} f(x) = 0\right\}.$$

Exercice 10 1. On a par la formule de Burnside :

$$\langle \chi, 1 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_G \chi(g) = \frac{1}{|G|} \sum_G |\mathrm{Fix}\, g| = 1.$$

3. Le même raisonnement qu'en (1) donne l'équivalence entre (i) et (ii). De plus, si ψ est le caractère de θ, on a

$$\langle \chi^2, 1 \rangle = \langle 1, 1 \rangle + 2\langle \psi, 1 \rangle + \langle \psi^2, 1 \rangle = 1 + \frac{1}{|G|} \sum_G \psi^2(g) = 1 + \langle \psi, \psi \rangle.$$

L'équivalence entre (ii) et (iii) s'en suit.