École normale supérieure Année 2014-2015
Algèbre 1

Corrigé Feuille d'exercices 12

Exercice 5 (Réciprocité de Frobenius, point de vue de représentations) On veut identifier $E = \mathrm{Hom}_G(\rho, \mathrm{Ind}_H^G(\pi))$ et $E' = \mathrm{Hom}_H(\rho_{|H}, \pi)$. On définit deux morphismes

$$\begin{array}{rlrl} F : & E \to E' & G : & E' \to E \\ & \alpha \mapsto \alpha_{|H} & & \beta \mapsto G(\beta)(v)(x) = \beta(xv) \end{array}$$

Ils sont bien définis et inverses l'un de l'autre.

Exercice 6 (Réciprocité de Frobenius, point de vue de caractères)

$$\begin{aligned} \langle \phi, \psi^G \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \phi(x^{-1}) \psi^G(x) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G, y \in G/H} \phi(x^{-1}) \psi^0(yxy^{-1}) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G, y \in G/H} \phi(yx^{-1}y^{-1}) \psi^0(yxy^{-1}) \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \phi(h^{-1}) \psi^0(h) \\ &= \langle \phi_{|H}, \psi \rangle \end{aligned}$$

Exercice 7 (Théorème de Frobenius)

1. L'hypothèse nous dit que $\{1\} \cup \bigcup_{x \in X} (\mathrm{Stab}_G\, x \smallsetminus \{1\})$ est une union disjointe. Le cardinal de $\bigcup_X \mathrm{Stab}\, x$ est alors $n(|H| - 1) + 1 = |G| - n + 1$. Ainsi le cardinal de G_0 est n.
2. D'abord remarquons que $\chi_\sigma(g)$ est égal au cardinal de Fix g. On veut montrer que la représentation de permutation σ contient la représentation triviale. Pour cela calculons :
$$\langle \chi_\sigma, 1 \rangle = \frac{1}{|G|} \Big(n + \sum_{g \notin G_0} \chi_\sigma(g) \Big) = 1.$$
3. On a $\phi(1) = \psi(1)$ et $\phi(g) = \psi(1)$ si g ne fixe aucun point de X. Si g fixe un point de X, alors il existe $h \in H$ conjugué à g et on a $\phi(g) = \psi(h)$. On calcule ensuite
$$\begin{aligned} \langle \phi, \phi \rangle &= \tfrac{1}{|G|} \Big(\psi(1)^2 + \sum_{g \in G_0 \smallsetminus \{1\}} \psi(1)^2 + \sum_{g \neq 1,\, g \in \bigcup \mathrm{Stab}\, x} \phi(g) \overline{\phi(g)} \Big) \\ &= \tfrac{1}{|G|} \Big(\psi(1)^2 + \sum_{g \in G_0 \smallsetminus \{1\}} \psi(1)^2 + n \sum_{h \in H \smallsetminus \{1\}} \psi(h) \overline{\psi(h)} \Big). \end{aligned}$$

Reste à utiliser le fait que ψ est un caractère irréductible pour en déduire que $\langle \phi, \phi \rangle$ vaut 1. Dès lors, ϕ est le caractère d'une représentation irréductible ou alors son opposé. Mais on a $\phi(1) = \psi(1) > 0$, d'où le résultat.
Comme on a $\phi(g) = \phi(1)$ pour tout $g \in G_0$, on sait que G_0 est dans le noyau de la représentation correspondant à ϕ.
Soit $g \in G \smallsetminus G_0$. Alors g est conjugué à un élément $h \in H \smallsetminus \{1\}$. Comme les caractères irréductibles forment une base des fonctions centrales sur H, il existe un caractère irréductible ψ avec $\psi(h) \neq \psi(1)$. Dès lors, g n'est pas dans le noyau de la représentation ϕ correspondante à ce ψ.
Au final, G_0 est exactement l'intersection des noyaux des représentations de caractère $\psi_G - \psi(1)\chi$, où ψ parcourt l'ensemble des caractères irréductibles de H. En tant que tel, G_0 est bien un sous-groupe normal de G.

Exercice 8 (Critère de Mackey)

1. On a une décomposition d'espaces vectoriels $V = \bigoplus_{G/H} gW$. Pour $s \in \mathscr{S}$, on définit $V_{(s)} = \bigoplus_{KsH/H} gW$; c'est une sous-K-représentation de V, et on a $V = \bigoplus_{\mathscr{S}} V_{(s)}$. Le groupe K agit transitivement sur les gW pour $g \in KsH/H$ et le stabilisateur de sW est H_s. On peut donc réécrire $V_{(s)} = \bigoplus_{K/H_s} g(sW) = \mathrm{Ind}_{H_s}^{K}\ sW$. Et sW est isomorphe à W_s en tant que H_s-représentation.
2. En appliquant la question (1) à $K = H$, on sait que V est isomorphe à $\bigoplus_{\mathscr{S}} \mathrm{Ind}_{H_s}^{H}\ W_s$ en tant que H-représentation. Appliquons la réciprocité de Frobenius :

$$\mathrm{Hom}_G(V, V) \simeq \bigoplus\nolimits_{\mathscr{S}} \mathrm{Hom}_H(W, \mathrm{Ind}_{H_s}^{H}\ W_s).$$

En appliquant une réciprocité de Frobenius à droite cette fois-ci, on obtient

$$\mathrm{Hom}_H(W, \mathrm{Ind}_{H_s}^{H}\ W_s) \simeq \mathrm{Hom}_{H_s}(W|_{H_s}, W_s).$$

Les dimensions étant additives, V est irréductible si et seulement si $\dim \mathrm{Hom}_H(W, W) = 1$ et $\dim \mathrm{Hom}_{H_s}(W|_{H_s}, W_s) = 0$ pour tout $s \in \mathscr{S} \smallsetminus \{1\}$.

Exercice 9 (Représentations complexes de $\mathfrak{S}_n$)

1. Soient $g \in \mathfrak{S}_n$, $T = T_\lambda$ et $T' = gT$. On veut montrer qu'il existe i et j dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ qui sont sur la même ligne dans T et sur la même colonne dans T'. Supposons que deux tels indices n'existent pas. Alors tous les éléments de la première ligne de T se retrouvent dans des colonnes distinctes de T'. On peut donc trouver $q_1 \in gQ_\lambda g^{-1}$ tel que q_1T' ait la même première ligne (à permutation sur la ligne près) que T. Soit alors $p_1 \in P_\lambda$ tel que p_1T et q_1T' ont même première ligne. Soit S_λ^1 l'ensemble des permutations de $\mathfrak{S}_n$ fixant point à point la première ligne de p_1T. On peut de même trouver $q_2 \in gQ_\lambda g^{-1} \cap S_\lambda^1$ et $p_2 \in P_\lambda \cap S_\lambda^1$ tels que p_2p_1T et q_2q_1T' ont leurs deux premières lignes identiques. On considère ensuite S_λ^2 le sous-groupe de S_λ^1 fixant les points des deux premières lignes de p_2p_1T, etc. Par récurrence, on a finalement $p \in P_\lambda$ et $q \in Q_\lambda$ tels que $pT = gqg^{-1}T'$. Autrement dit, on a $pq^{-1} = g \in P_\lambda Q_\lambda$.

2. Si g s'écrit pq avec $p \in P_\lambda$ et $q \in Q_\lambda$, on a $a_\lambda g b_\lambda = \varepsilon(q) c_\lambda$.
   Si g n'est pas élément de $P_\lambda Q_\lambda$, soit $t \in P_\lambda$ donné par la question (1). On a alors

$$a_\lambda g b_\lambda = a_\lambda t g b_\lambda = a_\lambda g(g^{-1} t g) b_\lambda = -a_\lambda g b_\lambda,$$

   de sorte que cette quantité est nulle.
3. Soit $g \in \mathfrak{S}_n$. Pour répéter l'argument de la question (2), il nous suffit de trouver $t \in P_\lambda$ tel que $g^{-1}tg$ soit un élément de Q_μ. On pose $T = T_\lambda$ et $T' = gT_\mu$. Si on a $\lambda_1 > \mu_1$, l'existence d'indices i et j qui sont sur la même ligne de T et la même colonne de T' est clair par principe des tiroirs. Si on a $\lambda_1 = \mu_1$, il existe $p_1 \in P\lambda$ et $q_1 \in gQ_\lambda g^{-1}$ tels que $T_2 := p_1 T$ et $T'_2 := q_1 T'$ ont même première ligne. On travaille ensuite sur la deuxième ligne de T_2 et T'_2, etc. Comme l'hypothèse dit $\lambda > \mu$, il existe un plus petit indice α avec $\lambda_\alpha > \mu_\alpha$. Par principe des tiroirs, la α-ème ligne de T_α va alors contenir deux indices qui sont dans la même colonne de T'_α. C'est gagné.
4. Les applications $\begin{array}{ccc} eM & \to & \mathrm{Hom}_A(Ae, M) \\ em & \mapsto & (ae \mapsto aem) \\ f(e) & \leftarrow & f \end{array}$ sont inverses l'une de l'autre.
   Par la question (2), on a $c_\lambda^2 = l_\lambda(b_\lambda a_\lambda) c_\lambda$. Aussi, comme on a $c_\lambda^2(1) = 1$, le coefficient $l_\lambda(b_\lambda a_\lambda)$ n'est pas nul. Il s'ensuit que $l_\lambda(b_\lambda a_\lambda)^{-1} c_\lambda$ est un idempotent.
5. Supposons $\lambda \geq \mu$. On a par la question (4) :

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(V_\lambda, V_\mu) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(\mathbf{C}[\mathfrak{S}_n] c_\lambda, \mathbf{C}[\mathfrak{S}_n] c_\mu) \simeq c_\lambda \mathbf{C}[\mathfrak{S}_n] c_\mu.$$

   Si on a $\lambda > \mu$, cet espace est nul par la question (3). Dans le cas $\lambda = \mu$, l'espace est de dimension 1 par la question (2). De ce fait, on sait que les V_λ sont irréductibles et que V_λ et V_μ sont isomorphes si et seulement si $\lambda = \mu$. Enfin, il y a autant de classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$ que de partitions de n, ce qui permet de conclure.

Exercice 10

a) Soit V une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_n$. Par réciprocité de Frobenius, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(U_\lambda, V) \simeq \mathrm{Hom}_{P_\lambda}(\mathrm{id}, V).$$

De plus, $\mathbf{C}[P_\lambda] a_\lambda$ est isomorphe à la P_λ-représentation triviale puisque pour tout $p \in P_\lambda$, on a $pa_\lambda = a_\lambda$. Enfin, le dernier isomorphisme provient des propriétés du produit scalaire :

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(U_\lambda, V) \simeq \mathrm{Hom}_{P_\lambda}(\mathbf{C}[P_\lambda] a_\lambda, V) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(\mathbf{C}[\mathfrak{S}_n] a_\lambda, V).$$

b) On a

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(U_\lambda, V_\mu) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(\mathbf{C}[\mathfrak{S}_n] a_\lambda, \mathbf{C}[\mathfrak{S}_n] c_\mu) \simeq a_\lambda \mathbf{C}[\mathfrak{S}_n] c_\mu.$$

Ce dernier est nul dans le cas $\lambda < \mu$ et est de dimension 1 si $\lambda = \mu$.

c) Soit ν une partition de $n-1$. Toute injection $\iota : \mathfrak{S}_{n-1} \hookrightarrow \mathfrak{S}_n$ se prolonge linéairement en $\iota : \mathbf{C}[\mathfrak{S}_{n-1}] \hookrightarrow \mathbf{C}[\mathfrak{S}_n]$ et confère à V_λ une structure de $\mathfrak{S}_{n-1}$-représentation. On a par la question (4) de l'exercice 9 :

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_{n-1}}(V_\nu, V_\lambda) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_{n-1}}(\mathbf{C}[\mathfrak{S}_{n-1}]c_\nu, \mathbf{C}[\mathfrak{S}_n]c_\lambda) \simeq \iota(c_\nu)\mathbf{C}[\mathfrak{S}_n]c_\lambda.$$

En choisissant ι correspondant à l'inclusion canonique de $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ dans $\{1, 2, \ldots, n\}$, on obtient la condition $\nu_i \leq \lambda_i$ pour tout i pour que cet espace de morphismes soit non nul. Autrement dit, il est nécessaire d'avoir $\nu \in R(\lambda)$.
Réciproquement, soit $\nu \in R(\lambda)$. Si σ désigne le n-cycle $(1\ 2\ \cdots\ n)$, alors on a $\mathfrak{S}_n = \bigoplus_{k=0}^{n-1} \mathfrak{S}_{n-1}\sigma^k$. On a ainsi

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_{n-1}}(V_\nu, V_\lambda) = \bigoplus_{k=0}^{n-1} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_{n-1}}(\mathbf{C}[\mathfrak{S}_{n-1}]c_\nu, \mathbf{C}[\mathfrak{S}_{n-1}]\sigma^k c_\lambda).$$

Un seul de ces termes est non nul, de dimension 1, et si n_0 est la case enlevée de λ pour obtenir ν alors cela correspond au terme $k = n - n_0$.

d) La réciprocité de Frobenius nous donne

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} V_\nu, V_\lambda) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_{n-1}}(V_\nu, V_\lambda)$$

et le résultat suit de la question précédente.