Ecole Normale Supérieure Paris Année 2013-2014
Algèbre 1

Quelques corrections de la Feuille d'exercices 1

Exercice 5. Il n'y a pas d'exemple différent de $\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2, \mathscr{S}_3$. La seule preuve que je connais utilise la classification des groupes simples. Avez-vous trouvé plus simple ?
Exercice 7. On pourra par exemple considérer un antécédent x de 2 par un tel morphisme. Quelle serait l'image de $x/2$?
Exercice 8. Soit $g \in G$ la préimage d'un générateur de $G/Z(G)$. Soient $x, y \in G$. Alors il existe $a, b \in \mathbb{Z}$, $x', y' \in Z(G)$ tels que $x = g^a x'$, $y = g^b y'$. On a $xy = g^a x' g^b y' = g^{a+b} x' y' = g^{a+b} y' x' = yx$.
Exercice 9. Posons

$$E_\infty :=< (0,1) > \quad \text{et,} \quad \forall 0 \leq i \leq p-1, \quad E_i :=< (1,i) > .$$

Montrer que les $p+1$ groupes E_∞ et E_i, pour $0 \leq i \leq p-1$ sont deux à deux distincts. M. Montrer que si G est un sous groupe de $\mathbb{F}^2$ différent du groupe trivial $\{(0,0)\}$ et de $\mathbb{F}^2$, alors G est cyclique engendré par un élément $(\bar{x}, \bar{y})$ où $\bar{\cdot}$ représente la réduction modulo p. Montrer ensuite, en distinguant selon que $\bar{x} = \bar{0}$ ou non, que G est l'un des groupes énumérés précédemment. En déduire le nombre de sous-groupes de $\mathbb{F}^2$.
Exercice 10. Les classes à gauche de G modulo H sont $\{H, G-H\}$. Les classes à droite de G modulo H sont $\{H, G-H\}$. Si $g \notin H$ on a donc $gH = G - H = Hg$.
Exercice 11. C'est fait en cours. Considérer l'application

$$\phi : G/H \to G/K \text{ donnée par } (g \bmod H) \mapsto (g \bmod K)$$

Montrer qu'elle est surjective de noyau K/H.
Exercice 12.

1. Non : penser au groupe libre engendré par deux éléments a et b, et H le sous-groupe engendre par les $a^n b^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ (qui aurait un nombre fini de b consecutifs, si H était de type fini).

2. Soit H un sous-groupe d'indice fini d'un groupe finiment engendré G. Montrons que H est finiment engendré. En effet, soient $g_1, \ldots, g_n$ des générateurs de G et $g_{n+1}, \ldots, g_{2n}$ leur inverse respectif. Soient $u_1 := 1, \ldots, u_r$ un ensemble de représentants de $H \backslash G$. Par définition, pour tous i et j, il existe $h_{ij} \in H$ tel que l'on ait $u_i g_j = h_{ij} u_k$ pour un certain k. Montrons que les h_{ij} (pour $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq 2n$) génèrent H.

En effet, si $h \in H$, il s'écrit comme un produit $h = g_{j_1} \cdots g_{j_s}$ (car les g_i contiennent un système de générateurs avec les inverses). On a alors

$$h = u_1 h = h_{1j_1} u_{k_2} (g_{j_2 \cdots g_{j_s}}) = \cdots = h_{1j_1} h_{k_2 j_2} \cdots h_{k_m j_m} u_{k_{m+1}}.$$

Finalement, on a $u_{k_{m+1}} = u_1 = 1$ puisque h est un élément de H, et le résultat est prouvé.

+) Les intéressés (et surtout motivés!) sont invités à consulter le théorème de Nielsen-Schreier respectivement dans Knapp, *Basic Algebra* et Serre, *Arbres, amalgames et* SL_2.

Exercice 13. Juste pour $e = 1$ ou $e = 2$ et c'est tout. Si $e = 2^n$, $n \geq 2$ alors on considère $G = \mathbb{Z}/2^n \times \mathrm{H}_8$ et si G est d'exposant e impair on prend un premier p impair dans la décomposition de e et on condière le groupe $\mathbb{Z}/e \times U(p)$ où p est le sous groupe de $\mathrm{GL}_p(\mathrm{F}_p)$ des matrices traingualaires supérieures avec des 1 sur la diagonale, qui est d'exposant p mais pas commutatif car $p > 2$).

Exercice 14. 4) L'injection précédente $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ a en fait image dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Si on note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, le vecteur $v = e_1 + \cdots + e_n$ est fixe par tout élément de G (vu dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$). Prenons W un supplémentaire orthogonal de $\mathbb{R}v$ dans $\mathbb{R}^n$. La restriction à W donne l'injection voulue.