Ecole Normale Supérieure Paris Année 2014-2015
Algèbre 1

Corrigé de la Feuille d'exercices 2

Exercice 6. Considérer l'action de H sur G/H par translation. Cette action est triviale si, et seulement si, H est distingué dans G. Et une action est triviale si, et seulement si, ses orbites sont réduites à un élément. Il est clair que l'orbite de eH est réduite à un seul élément. Soit $g \in \mathrm{G}$. Alors le cardinal de l'orbite de gH divise le cardinal de H. Par hypothèse ce cardinal vaut 1 ou $n \geq p$. Comme la somme des cardinaux des orbites vaut p et qu'on a déjà une orbite de cardinal 1, on ne peut pas avoir que le cardinal de $o(gH)$ soit égal à $n \geq p$. Donc elle vaut 1.

Exercice 7.
D'un côté le cardinal de $C = \{(g, x) \in G \times X \; | g \cdot x = x\}$ vaut

$$\sum_{g \in G} |\{x \in X \; : g \cdot x = x\}| = \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|$$

De l'autre, il vaut

$$\sum_{x \in X} |\{g \in G \; : g \cdot x = x\}| = \sum_{x \in X} |\mathrm{Stab}(x)| = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|o(x)|} = \sum_{o \text{ orbite}} \sum_{\substack{x \in X \\ o(x) = o}} \frac{|G|}{|o|} = n|G|$$

où n est le nombre d'orbites. On déduit que $n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|$.

Exercice 9. On suppose qu'il existe un groupe simple G d'ordre 180.
(1) Le nombre de 5-Sylows vaut 1, 6 ou 36. On ne peut pas avoir 1 car G est simple. Supposons qu'on a 6 5-Sylows. Alors G agit par conjugaison sur l'ensemble de 5-Sylows, d'où un morphisme non trivial $G \to \mathscr{S}_6$. On le compose avec la signature $\mathscr{S}_6 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et on déduit un morphisme $G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui doit être trivial (sinon il aurait un noyau distingué dans G). Donc le morphisme $G \to \mathscr{S}_6$ a image incluse dans $\mathscr{A}_6$. De même c'est un morphisme injectif. Son image est donc un sous-groupe de cardinal 180 de $\mathscr{A}_6$, c'est-à-dire, d'indice 2 et donc distingué dans $\mathscr{A}_6$. Ceci contredit la simplicité de $\mathscr{A}_6$. On déduit que le nombre 5-Sylows vaut 36 et on a donc $36 \times 4 = 144$ éléments d'ordre 5.
(2) Le nombre de 3-Sylows vaut 1, 4 ou 10. On ne peut pas avoir 1 car G est simple. On ne peut pas avoir 4 (sinon G agit par conjugaison sur l'ensemble de 3-Sylows, d'où un morphisme non trivial non injectif $G \to \mathscr{S}_4$). Donc ce nombre vaut 10.

Montrons que l'intersection de deux 3-Sylows T et S distincts ne peut pas contenir un élément $g \neq e$. Sinon considérons le centralisateur $Z(g) = \{h \in G : hg : gh\}$ de g. C'est un sous-groupe de G qui contient T et S (puisque ce sont deux groupes commutatifs, car d'ordre 9). Par Lagrange on déduit que les ordre possibles de $Z(g)$ sont 18, 36, 45, 90 ou 180. On ne peut pas avoir $Z(g) = G$, sinon g appartiendrait au centre de G, qui serait non-trivial distingué. On ne peut pas avoir $|Z(g)| = 36$, 45 ou 90 car G agit par translations sur $G/Z(g)$ d'où un morphisme non trivial de G vers $\mathscr{S}_a$ avec a l'indice de $Z(g)$ dans G. Enfin, on ne peut pas avoir $|Z(g)| = 18$ car un groupe d'ordre 18 n'a qu'un seul 3-Sylow (et on a supposé $T \neq S$). On déduit qu'il y a 10×8 éléments d'ordre divisant 9.
(3) $90 + 144 > 180$...

Exercice 10. On suppose qu'il existe un groupe simple G d'ordre 252.

1. On a, comme toute à l'heure, $6 \times 36 = 216$ éléments d'ordre 7.

2. La seuele différence par rapport à l'exo précédent c'est qu'il faut montrer qu'on ne peut pas avoir que $Z(g)$ ait ordre 36. Mais, si c'était le cas, on aurait que G est la réunion disjointe de $Z(g)$ et de ses éléments d'ordre 7. La conjugaison préserve l'ordre donc $Z(g)$ serait distingué !

3. $216 + 56 > 252$...

Exercice 11. Il est facile de voir comme dans les exos précédents que le nombre de 3-Sylows n'est pas 1 ou 4. Il est donc 10. Le nombre de 5-Sylows pour la même raison vaut 6. Cela nous fait $10 \times 2 + 6 \times 4 = 44$ éléments d'ordre 3 et 5. Le nombre de 2-Sylows vaut 5 ou 15. Si c'est 5, on fait agir notre groupe dans l'ensemble de ses 2-Sylows d'où un morphisme injectif vers $\mathscr{S}_5$. Il est donc isomorphe à son image, qui est un sous-groupe d'indice 2 dans $\mathscr{S}_5$, c'est-à-dire $\mathscr{A}_5$ (preuve ?).
Si c'est 15, soient T et S deux 2-Sylows. On ne peut pas avoir $T \cap S = \{e_G\}$, cela ferait trop d'éléments. Soit $g \in T \cap S \backslash \{e_G\}$. Considérons le centralisateur $Z(g) = \{h \in G : hg : gh\}$ de g. Comme tout à l'heure, on déduit que les ordre possibles de $Z(g)$ sont 12, 20, 60. On ne peut pas avoir $Z(g) = G$, sinon g appartiendrait au centre de G. Alors, on fait agir G sur $G/Z(g)$ d'où un morphisme de G vers $\mathscr{S}_i$ avec $i = 3, 5$. 3 c'est trop peu. 5 implique $G = \mathscr{A}_5$...

Exercice 12. Vous pouvez aussi considérer une preuve alternative en montrant comme toute à l'heure que l'intersection de deux 3-Sylows est réduite à l'identité.

Exercice 13. Plus de détails dans le livre de D. Perrin *Cours d'Algèbre*, chapitre 4, exo 5.3.