Ecole Normale Supérieure Paris Année 2013-2014
Algèbre 1

Corrigé de la Feuille d'exercices 5

Exercice 6.

a) Ce produit scalaire hermitien est invariant par G, et G est donc un sous-groupe fini de son groupe unitaire $\mathrm{U}_{(G)}$. Mais ce dernier est conjugué à $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$: si φ envoie une base $(\ |\ )_G$-orthonormale de $\mathbb{C}^n$ sur la base canonique, on a $\varphi \mathrm{U}_{(G)} \varphi^{-1} = \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$.

b) On veut montrer que u et $w := huh^{-1}$ sont égaux. D'abord, ils ont même polynôme caractéristique et h induit un isomorphisme de $E_u(\lambda)$ sur $E_w(\lambda)$ si λ est dans le spectre de u et $E_u(\lambda)$ désigne l'espace propre correspondant. Comme u est diagonalisable, il suffit de voir $E_u(\lambda) = E_w(\lambda)$ pour tout λ pour conclure. Supposons que ce ne soit pas le cas pour un certain λ_0. Parce que u et w commutent et que u est diagonalisable, on a, pour tout λ:

$$E_w(\lambda) = \big(E_w(\lambda) \cap E_u(\lambda)\big) \bigoplus \Big(\bigoplus_{\mu \neq \lambda} h(E_u(\lambda)) \cap E_u(\mu) \Big).$$

Prenons alors $x \in E_u(\lambda_0)$ de norme 1 avec $h(x) \in E_u(\mu_0) \subseteq E_u(\lambda_0)^\perp$. Mais on a alors $||x - h(x)||^2 = ||x||^2 + ||h(x)||^2 = 2$, ce qui contredit $||\mathrm{Id} - h|| < \sqrt{2}$.

c) Comme u et v sont unitaires, on a $||\mathrm{Id} - [u,v]|| = ||vu - uv||$. Aussi, on a $vu - uv = (\mathrm{Id} - v)(\mathrm{Id} - u) - (\mathrm{Id} - u)(\mathrm{Id} - v)$, de sorte que l'on a

$$||\mathrm{Id} - [u,v]|| \leq 2||\mathrm{Id} - u||||\mathrm{Id} - v||.$$

Le reste suit par récurrence.

d) Par (c), la suite (v_k) stationne si et seulement si elle stationne sur Id. Supposons qu'elle stationne à partir du rang $k_0 \geq 1$ minimal. Si $k_0 \geq 2$, alors on a $v_{k_0} = \mathrm{Id}$ et $v_{k_0 - 1}$ commute avec u. En appliquant (b) et (c), on obtient que u commute avec $v_{k_0} - 2$, de sorte que v_{k_0-1} est déjà l'identité. Par minimalité de k_0, on a $k_0 = 1$.

e) Comme G est fini, toute suite (v_k) dans G est stationnaire à partir d'un certain rang et H_δ est abélien. Aussi, comme G est un sous-groupe de $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$, H_δ est normal dans G.

f) Pour $v \in \overline{B}\Big(t, \dfrac{\delta}{2}\Big)$, on a

$$||v|| \leq ||v-t|| + ||t|| \leq \frac{\delta}{2} + 1, \quad ||v|| \geq ||t|| - ||v-t|| \geq 1 - \frac{\delta}{2}.$$

g) Notons Λ le volume de la boule unité fermée. Par homogénéité et (f), on a $|T|\Big(\dfrac{\delta}{2}\Big)^{2n^2}\Lambda \leq \Big(1+\dfrac{\delta}{2}\Big)^{2n^2}\Lambda - \Big(1-\dfrac{\delta}{2}\Big)^{2n^2}\Lambda$. En prenant $\delta = \dfrac{1}{4}$, on obtient que H_δ est un sous-groupe de G normal et abélien d'indice majoré par $9^{2n^2}7^{2n^2}$.