Ecole Normale Supérieure Paris Année 2013-2014
Algèbre 1

Corrigé de la Feuille d'exercices 6

Exercice 1 Soient b la forme bilinéaire associée et (x, y) une base de P constituée de vecteurs isotropes. Aussi, on a $z = x + \lambda y$ isotrope pour un $\lambda \in k^\times$, ce qui veut dire $q(z) = 2\lambda b(x, y) = 0$. On a donc que $b(x, y) = 0$ et donc b est nulle sur P.

Exercice 2

1. Soient b et b' les formes bilinéaires respectives de q et q'. Si q est totalement isotrope, c'est clair. Supposons que ce ne soit pas le cas: il existe $x \in E$ avec $q(x) \neq 0$. Posons $a = q'(x)q(x)^{-1} \in k^\times$. Soit $y \in E$. Les polynômes de deuxième degré $aq(y+\lambda x)$ et $q'(y+\lambda x)$ (en la variable λ) ont mêmes zéros et même coefficient dominant $q'(x)$: ils sont donc égaux. En particulier on a $q'(y) = aq(y)$.
2. Il suffit de considérer $x^2 + y^2$ et $x^2 + 2y^2$.

Cet exercice est un cas particulier du Théorème de zéros de Hilbert : soit k un corps algébriquement clos, $I \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ un idéal et notons $Z(I)$ l'ensemble de zéros communs à tous les polynômes de I. Si f est un polynôme qui s'annule sur $Z(I)$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n \in I$.

Exercice 3

1. Elle est de rang n^2, de signature $(\dfrac{n(n+1)}{2}, \dfrac{n(n-1)}{2})$.
2. Les signatures respectives sont $(n^2, 0)$ et $(1, 0)$.
3. La forme bilinéaire associée au déterminant est
$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right) \mapsto \frac{1}{2}(\alpha d + a\delta - b\gamma - \beta c).$$
Un sous-espace isotrope maximal est $kE_{11} \oplus kE_{12}$. Les plans hyperboliques associés sont $kE_{11} \oplus k(2E_{22})$ et $kE_{12} \oplus k(-2E_{21})$. La réunion des bases de ces deux plans (qui sont orthogonaux!) constitue une base hyperbolique.

   Soit η un élément triangulaire supérieur de $M_2(k)$ qui n'est pas diagonalisable. Considérons l'endomorphisme $\varphi : x \mapsto \eta x \eta^{-1}$ de $M_2(k)$; il préserve β. Un vecteur propre de φ est un élément $m \in M_2(k)$ vérifiant $\eta m = \lambda m \eta$ pour un certain $\lambda \in k$. De ce fait, m envoie tout espace propre de η sur un espace propre de η (et donc le même dans le cas présent); et m est alors traingulaire supérieur lui-aussi. La somme des espaces propres de φ est donc un sous-espace propre de $M_2(k)$ et φ n'est pas diagonalisable.

Exercice 4 Notons b la forme bilinéaire associée à q.

a) Si $q|_H$ est non dégénérée, l'orthogonal de H pour b est de dimension 1, disons égal à kx. Alors $b(u(x), u(h)) = b(x, h) = 0$ pour tout $h \in H$ donne $u(x) \in kx$ et $q(u(x)) = q(x)$ donne $u(x) = \pm x$.

b) Si $q|_H$ est dégénérée, il existe $h \in H^\perp \cap H$ non nul. On peut le compléter en un plan hyperbolique (au passage, comme H est de codimension 1 cela force $H^\perp \cap H$ à être une droite) grâce à un $y \notin H$. Ecrivons $u(y) = \alpha y + h'$ avec $\alpha \in k$ et $h' \in H$. On a $1 = b(y, h) = b(u(y), u(h)) = \alpha$ et $b(u(y) - y, n) = 0$ pour tout $n \in H$. On peut donc écrire $u(y) = y + \beta h$. Mais alors on a $q(y) + 2\beta = q(u(y)) = q(y)$, d'où $\beta = 0$.

Exercice 5

1. C'est clair. On a même que $q|_F$ est non dégénérée. Supposons le contraire: prenons un $f \in F \cap F^\perp$ non nul. On a alors $q(x + f) = q(x) > 0$ et l'existence d'un plan défini positif pour q. C'est absurde et $q|_F$ est non dégénérée. Elle est donc de signature $(1, \dim F - 1)$.

2. Supposons $q(f') \leq 0$ pour tout $f' \in F^\perp$. Comme on a $E = F \oplus F^\perp$ (pas de vecteur isotrope dans F), écrivons tout élément $e = f(e) + f'(e)$ suivant cette décomposition. On aurait alors $q(e) = q(f(e)) + q(f'(e)) \leq 0$, ce qui n'est pas vrai pour $(1, 0, \ldots, 0)$. De ce fait, il existe $x \in F^\perp$ avec $q(x) > 0$ et c'est une conséquence de la question (a).

3. Supposons $q|_F$ de rang $\leq \dim F - 2$. Alors $q|_F$ possède deux vecteurs isotropes qui se complètent en deux plans hyperboliques distincts dans E. Or E ne contient pas de somme directe de deux plans hyperboliques. L'hypothèse initiale est donc erronée.

Exercice 6

1. Les corps $\mathbb{C}$ et $\mathbb{F}_2$ ont tous deux 1 pour niveau.

2. Même argument que dans la classification des formes quadratiques sur un corps fini.

3. On a gratuitement $s(k) \geq s(k(X))$. Supposons donc $s(k(X))$ fini, et notons s cette quantité. Il existe des fractions rationnelles $R_1(X), \ldots, R_s(X)$ telles que l'on ait $R_1(X)^2 + \cdots + R_s(X)^2 = -1$.
Supposons dans un premier temps k infini. En notant $Q(X)$ un dénominateur commun des $R_i(X)$, on obtient une identité $P_1(X)^2 + \cdots + P_s(X)^2 = -Q(X)^2$ dans $k[X]$. Soit $\alpha \in k$ un élément non zéro de Q, et pour tout i, soit $p_i^{(\alpha)} = P_i(\alpha)Q(\alpha)^{-1} \in k$. On a alors $(p_1^{(0)})^2 + \cdots + (p_s^{(0)})^2 = -1$. Ceci donne $s(k) \leq s(k(X))$.
Dans le cas où k est fini, par la question (b), on peut supposer $s(k(X)) = 1$. Alors $R_1(X)$ s'écrit $P_1(X)/Q(X)$ avec $P_1(X), Q(X) \in k[X]$. En choisissant $P_1(X)$ et $Q(X)$ premiers entre eux, on voit que $R_1(X)$ est un élément de $k^\times$. Cela donne $s(k) = 1$ aussi.

4. Si on a $s(k) \leq n-1$, alors il existe $x_1, \dots, x_{n-1} \in k$ tels que $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + 1^2 = 0$. Réciproquement, si q_n a un vecteur isotrope $(x_1, \dots, x_n)$ avec $x_i \neq 0$, alors $\sum_{j \neq i} \left(\frac{x_j}{x_i}\right)^2 = -1$.

5. Montrons-le par récurrence sur $k \geq 0$. Le cas $k = 0$ est trivial. Supposons la propriété vraie au rang k et prouvons le rang $k+1$. Par hypothèse de récurrence, on a T_1 et T_2 vérifiant

$$ {}^tT_1 T_1 = T_1 {}^tT_1 = q_n(x_1, \dots, x_n) I_n, \quad {}^tT_2 T_2 = T_2 {}^tT_2 = q_n(x_{n+1}, \dots, x_{2n}) I_n. $$

On calcule ensuite

$$ \begin{pmatrix} {}^tT_1 & {}^tA \\ {}^tT_2 & {}^tB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ A & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tT_1 T_1 + {}^tAA & {}^tT_1 T_2 + {}^tAB \\ {}^tT_2 T_1 + {}^tBA & {}^tT_2 T_2 + {}^tBB \end{pmatrix}, $$

$$ \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tT_1 & {}^tA \\ {}^tT_2 & {}^tB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 {}^tT_1 + T_2 {}^tT_2 & T_1 {}^tA + T_2 {}^tB \\ A {}^tT_1 + B {}^tT_2 & A {}^tA + B {}^tB \end{pmatrix}. $$

   (a) Si $q_n(x_1, \dots, x_n) \neq 0$, on prend $A = T_1^{-1} {}^tT_2 T_1$ et $B = -{}^tT_1$.
   (b) Sinon, si $q_n(x_{n+1}, \dots, x_{2n}) \neq 0$, on prend $A = -{}^tT_2$ et $B = T_2^{-1} {}^tT_1 T_2$.
   (c) Enfin, si $q_n(x_1, \dots, x_n) = q_n(x_{n+1}, \dots, x_{2n}) = 0$, on prend $A = -T_1$ et $B = T_2$.

6. Si $q_n(x)$ et $q_n(y)$ sont deux sommes non nulles de 2^k carrés d'éléments, il suffit de définir $x.y$ comme étant la première ligne de $T_x T_y$ et on a $q_n(x.y) = q_n(x) q_n(y)$. De même, si $[-1].x$ désigne la première ligne de T_x^{-1}, on obtient $q_n([-1].x) = q_n(x)^{-1}$.

7. Supposons $s(k)$ fini, vérifiant $n := 2^k \leq s(k) < 2n = 2^{k+1}$ pour un certain $k \geq 0$. Alors q_{2n} possède un vecteur isotrope par la question (d), disons $(x_1, \dots, x_{2n})$. On a donc $q_n(x_1, \dots, x_n) = -q_n(x_{n+1}, \dots, x_{2n}) \neq 0$. Mais alors $q_n(x_1, \dots, x_n) q_n(x_{n+1}, \dots, x_{2n})^{-1} = -1$ est une somme de 2^k carrés par la question (f).

+) Le corps $\mathbb{Q}_2$ est de niveau 4 (par approximation successives). Pour avoir un corps de niveau $n = 2^k$, on peut considérer $\mathbb{R}((X_i)_{1 \leq i < n})[X_n]/(\sum X_i^2 + 1)$. Montrer qu'il n'est pas de niveau inférieur n'est pas immédiat: on pourra se reporter au Theorem 2.8 du chapitre 11 de Lam, *Algebraic theory of quadratic forms.*