Ecole Normale Supérieure Paris Année 2014-2015
Algèbre 1

Corrigé de la Feuille d'exercices 6

Exercices 1 – 6. Vous pouvez trouver les solutions à ces exercices et bien d'autres sur le même sujet dans le livre *Éléments de géométrie - Actions de groupes*, chapitre 2, de Rachid Mneimné. Cassini, 1997.

Exercices 7 – 10. Les solutions de ces exercices sont dans le poly, section II.2.4.

Exercice 11. Si $M \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$, le déterminant de sa réduction modulo p est encore 1 car l'expression du déterminant est la même quel que soit le corps. La réduction modulo p d'un produit est bien le produit des réductions car l'expression du produit de deux matrices est la même quel que soit le corps.
Toute matrice élémentaire $I_n + E_{ij}$ de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est l'image de la matrice $I_n + E_{ij} \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$. Comme les matrices élémentaires engendrent $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}(n, \mathbb{F}_p)$, le morphisme est surjectif.

Exercice 12.

1. On calcule $S^2 = R^3$ et $S^4 = R^6 = I_2$. Tout élément de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})/D(\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}))$ s'écrit donc comme la classe de $S^a R^b$, avec $0 \leq a \leq 1$ et $0 \leq b \leq 5$, soit au plus 12 éléments.
2. Il a un quotient d'ordre 2, via $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathfrak{S}_3 \twoheadrightarrow \{\pm 1\}$ et un quotient d'ordre 3 via $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \simeq \mathfrak{A}_4 \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, donc son indice est divisible par 6.
3. Les quotients de la question précédente sont abéliens, donc ce sont aussi des quotients de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})/D(\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}))$. Le cardinal de ce groupe est donc divisible par 2 et par 3 (on peut montrer que c'est 12 ; voir note 5 du poly).

Exercice 13.

1. Il suffit de calculer
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - acx - bc & a^2 x \\ -c^2 x & ac - bcx - bd \end{pmatrix}.$$
2. On a l'application $\begin{array}{ccc} k^\times & \to & \mathrm{T} \\ x & \mapsto & T_x \end{array}$. Elle est surjective car toute transvection de droite ke_1 (et donc d'hyperplan ke_1 aussi) a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & y \\ & 1 \end{pmatrix}$ dans une base (e_1, e_2)

où e_2 est n'importe quel supplémentaire de e_1 et y un certain élément de $k^\times$. La question (a) nous donne la bijection voulue.

3. Pour $\mathbb{C}$, T est un singleton. Pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{F}_p$, c'est un ensemble à 2 éléments. Pour $\mathbb{Q}$, T est infini : il suffit pour cela de considérer les nombres premiers, qui ont des classes distinctes dans $\mathbb{Q}^\times/\mathbb{Q}^{\times 2}$.

Exercice 15.

a) Comme le groupe $\operatorname{Isom}^+ X$ est le noyau du déterminant $\operatorname{Isom} X \to \{\pm 1\}$, il est normal dans $\operatorname{Isom} X$. Il est d'indice au plus 2, et si 0 est centre de symétrie, alors la matrice scalaire -1 est élément de $\operatorname{Isom} X$; l'indice est alors exactement 2, et cela nous permet d'écrire un produit semi-direct $\operatorname{Isom} X = \operatorname{Isom}^+ X \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Comme -1 est dans le centre de $\operatorname{Isom} X$, ce produit est en fait direct.

b) Le groupe $\operatorname{Isom} \Delta$ agit fidèlement sur les sommets de Δ : cela nous fournit une injection $\operatorname{Isom} X \hookrightarrow \mathscr{S}_4$. De plus, il contient les transpositions (symétries de plan le plan médian à une arête) ; on a donc $\operatorname{Isom} X \simeq \mathscr{S}_4$. Ces fameuses symétries n'appartenant pas à $\operatorname{Isom}^+ X$, ce dernier est un sous-groupe d'indice 2 de $\operatorname{Isom} X$, et $\operatorname{Isom}^+ X$ est alors isomorphe à $\mathscr{A}_4$.
Le groupe $\mathscr{A}_4$ ne peut être facteur direct de $\mathscr{S}_4$ puisqu'une transposition et un 3-cycle de supports non disjoints ne commutent pas.

c) Le groupe $\mathscr{A}_4$ est composé de du neutre, de doubles transpositions et de 3-cycles. Ainsi, ses seuls éléments d'ordre une puissance de 2 sont les doubles transpositions, et deux doubles transpositions quelconques engendrent un sous-groupe d'ordre 4 unique, composé de toutes les doubles transpositions. Aussi, le sous-groupe engendré est d'ordre 4, isomorphe à V_4.
Le conjugué d'un élément d'ordre 2 étant encore d'ordre 2, ce sous-groupe est normal dans $\operatorname{Isom}^+ X$. Comme $\operatorname{Isom}^+ X$ contient aussi une rotation d'un tiers de tour et d'axe une hauteur de Δ, on a $\operatorname{Isom}^+ X \simeq V_4 \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Ce produit n'est pas direct car $\mathscr{A}_4$ n'est pas abélien.

d) Une isométrie préservant C agit sur les grandes diagonales du cubes (car ce sont les plus longues distances entre sommets du cube). Cela nous fournit un morphisme $\operatorname{Isom} C \to \mathscr{S}_4$. Notons (A, B, C, D) une face du cube (numérotée dans cet ordre), et $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$, $[DD']$ ces diagonales. En composant la symétrie de plan le plan médiateur à $[AC']$ et la symétrie de plan (A, C, A', C'), on échange $[AA']$ et $[CC']$ en fixant $[BB']$ et $[DD']$. Par symétrie du problème et le fait que les transpositions engendrent $\mathscr{S}_4$, on sait que le morphisme $\operatorname{Isom}^+ X \to \mathscr{S}_4$ est surjectif. Il est injectif parce qu'une isométrie positive qui fixe trois diagonales est triviale. L'autre isomorphisme est une conséquence de (a).

e) Considérons les tétraèdres réguliers (A, B', C, D') et (A', B, C', D). Le groupe $\operatorname{Isom}^+ C$ agit sur l'ensemble formé de ces deux tétraèdres et fournit un morphisme non trivial $\mathscr{S}_4 \to \mathscr{S}_2$: c'est la signature.

f) La composée de deux symétries de plans orthogonaux correspond à une double transposition.