Ecole Normale Supérieure Paris Année 2013-2014
Algèbre 1

Feuille d'exercices 6b

Exercice 2

a) Il suffit de calculer

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-acx-bc & a^2x \\ -c^2x & ac-bcx-bd \end{pmatrix}.$$

b) On a l'application $\begin{array}{ccc} k^\times & \to & \mathrm{T} \\ x & \mapsto & T_x \end{array}$. Elle est surjective car toute transvection de droite ke_1 (et donc d'hyperplan ke_1 aussi) a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & y \\ & 1 \end{pmatrix}$ dans une base (e_1, e_2) où e_2 est n'importe quel supplémentaire de e_1 et y un certain élément de $k^\times$. La question (a) nous donne la bijection voulue.

c) Pour $\mathbb{C}$, T est un singleton. Pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{F}_p$, c'est un ensemble à 2 éléments. Pour $\mathbb{Q}$, T est infini: il suffit pour cela de considérer les nombres premiers, qui ont des classes distinctes dans $\mathbb{Q}^\times/\mathbb{Q}^{\times 2}$.

Exercice 3

a) Une involution annule le polynôme X^2-1, d'où une décomposition $V = E_+(s) \oplus E_-(s)$. Cette dernière est b-orthogonale puisque si e_+ et e_- sont des éléments respectivement de $E_+(s)$ et $E_-(s)$, alors on a

$$-b(e_+, e_-) = b(s(e_+), s(e_-)) = b(e_+, e_-) = 0.$$

b) L'application $s \mapsto E_+(s)$ est une bijection comme voulue.

c) Soit $\mathscr{F}$ une telle famille. Elle est composée d'involutions de type $(2r, 2m-2r)$ pour un r fixé (puisque les éléments de $\mathscr{F}$ sont conjugués). Comme ils commutent, tous les éléments de $\mathscr{F}$ se diagonalisent dans une base symplectique commune. Aussi, il convient de remarquer que si V a pour base symplectique $(e_1, e_2, \ldots, e_{2m})$ avec $b(e_{2i-1}, e_{2i}) = -b(e_{2i}, e_{2i-1}) = 1$ et $b(e_i, e_j) = 0$ autrement, alors on a $e_{2j} \in E_+(s) \Leftrightarrow e_{2j-1} \in E_+(s)$. De ce fait, $E_+(s)$ est déterminé par un choix de r vecteurs, et on a $|\mathscr{F}| \leq C_m^r$.

En particulier si s est une involution extrémale, alors elle est incluse dans une famille maximale d'involutions conjuguées commutant deux à deux à m éléments. Parce que cette dernière propriété est conservée par un automorphisme de $\mathrm{Sp}_{2m}(k)$ et que l'on a $C_m^r \neq m$ pour $r \notin \{1, m-1\}$, tout automorphisme de $\mathrm{Sp}_{2m}(k)$ envoie involutions extrémales sur involutions extrémales.

d) Si s et t sont deux involutions extrémales avec $s \neq \pm t$, on a

$$C(\{s,t\}) = \{u \text{ extrémale} \mid E_2(u) \subseteq E_{2m-2}(s) \cap E_{2m-2}(t),\ E_{2m-2}(u) \supseteq E_2(s) + E_2(t)\}.$$

On en déduit

$$C(C(\{s,t\})) = \{u \text{ extrémale} \mid E_2(u) \subseteq E_2(s) + E_2(t),\ E_{2m-2}(u) \supseteq E_{2m-2}(s) \cap E_{2m-2}(t)\}.$$

Si s et t forment un couple minimal, alors on a $st \neq ts$ puisqu'on a $\dim E_2(t) \cap E_2(s) = 1$ non paire. De plus, si $s', t' \in C(C(\{s,t\}))$ vérifient $s't' \neq t's'$, alors $E_2(s') + E_2(t') \subseteq E_2(s) + E_2(t)$, qui est de dimension 3. Ainsi on a $\dim E_2(s') \cap E_2(t') = 1$ et (s', t') est un autre couple minimal avec $E_2(s') + E_2(t') = E_2(s) + E_2(t)$. Il s'ensuit $E_{2m-2}(s') \cap E_{2m-2}(t') = E_{2m-2}(s) \cap E_{2m-2}(t)$ et $C(C(\{s', t'\})) = C(C(\{s,t\}))$.
Si s et t ne sont pas un couple minimal, alors on a $\dim E_2(s) \cap E_2(t) \in \{0, 2\}$. Dans le cas où cette dimension vaut 2, la question (b) donne $s = \pm t$ et on a alors $st = ts$. Supposons donc $E_2(s) \cap E_2(t) = \varnothing$. Dans ce cas-là, $E_2(s) + E_2(t)$ est de dimension 4, et on peut trouver s' et t' un couple minimal avec $E_2(s') + E_2(t') \subsetneq E_2(s) + E_2(t)$ et $E_{2m-2}(s') \cap E_{2m-2}(t') \supsetneq E_{2m-2}(s) \cap E_{2m-2}(t)$. On a alors $C(C(\{s', t'\})) \neq C(C(\{s,t\}))$.

e) Si $\pm s, \pm t, \pm u$ sont six éléments distincts de I, l'espace $E_2(s) \cap E_2(t) \cap E_2(u)$ est de dimension 1 ou 0. Dans le premier cas, on note V_1 la droite obtenue et dans le second cas, on a $E_2(u) \subseteq E_2(s) + E_2(t) =: V_3$. Les ensembles maximaux correspondants sont alors respectivement

$$I_1(V_1) := \{v \text{ involution extrémale} \mid V_1 \subseteq E_2(v)\},$$

$$I_3(V_3) := \{v \text{ involution extrémale} \mid E_2(v) \subseteq V_3\}.$$

Et tous les ensembles maximaux I sont de l'un de ces deux types.

f) Si V_3 est de dimension 3, on peut trouver $V_4 \supseteq V_3$ de dimension 4 et non isotrope. Alors si w est une involution extrémale avec $V_4 \subseteq E_{2m-2}(w)$, tout élément v de $I_3(V_3)$ vérifie $E_2(v) \subseteq E_{2m-2}(w)$ et $E_2(w) \subseteq V_4^{\perp} \subseteq E_{2m-2}(v)$. De ce fait, w commute avec tout élément de $I_3(V_3)$. Or il n'existe pas d'élément de $\mathrm{Sp}_{2m}(k)$ commutant avec tout élément de $I_1(V_1)$. On en déduit que tout automorphisme de $\mathrm{Sp}_{2m}(k)$ préserve $\{I_1(x) \mid x \in \mathbb{P}^{2m-1}(k)\}$.

Soit ϕ un automorphisme de $\mathrm{Sp}_{2m}(k)$. On lui associe la bijection $\theta_\phi : \mathbb{P}^{2m-1}(k) \to \mathbb{P}^{2m-1}(k)$ via $\phi.I_1(x) = I_1(\theta_\phi x)$. Maintenant, $x, y \in \mathbb{P}^{2m-1}(k)$ sont deux droites orthogonales si et seulement si elles engendrent un plan anisotrope; ceci est encore équivalent à $I(x) \cap I(y) = \varnothing$. Cette dernière propriété est conservée par ϕ, de sorte que θ_ϕ préserve l'orthogonalité. On en déduit que θ_ϕ préserve l'alignement, et par le théorème fondamental de la géométrie projective, il existe $a \in \Gamma\mathrm{L}_{2m}(k)$ tel que l'on ait $\theta_\phi(kx) = k(ax)$ pour tout $x \in k^{2m} \smallsetminus \{0\}$. Comme a préserve l'orthogonalité, on a même $a \in \Gamma\mathrm{Sp}_{2m}(k)$. Si s est une involution extrémale, on a $\{s\} = I_1(e_1) \cap I_1(e_2)$ si e_1 et e_2 sont deux droites engendrant $E_2(s)$. On en déduit $\phi(s) = asa^{-1}$. Si g est un élément de $\mathrm{Sp}_{2m}(k)$, gsg^{-1} est une involution extrémale et on a

$$agsg^{-1}a^{-1} = \phi(gsg^{-1}) = \phi(g)\phi(s)\phi(g)^{-1} = \phi(g)asa^{-1}\phi(g)^{-1}.$$

Ceci s'écrit encore $g^{-1}a^{-1}\phi(g)as = sg^{-1}a^{-1}\phi(g)a$; autrement dit, $g^{-1}a^{-1}\phi(g)a$ commute à toute involution extrémale et préserve donc tout plan hyperbolique. Il s'ensuit que $g^{-1}a^{-1}\phi(g)a$ préserve les droites et est donc une homothétie, disons $\lambda(g)I_{2m}$. Mais alors, $g \mapsto \lambda(g)$ fournit un morphisme $\mathrm{Sp}_{2m}(k) \to k^\times$. Par simplicité de $\mathrm{PSp}_{2m}(k)$, le noyau de ce dernier est $\{1\}$, $Z(\mathrm{Sp}_{2m}(k))$ ou $\mathrm{Sp}_{2m}(k)$. Les deux premiers cas ne permettent pas de factoriser λ par l'abélianisé; c'est donc le dernier cas qui se présente, et λ est trivial.