Ecole Normale Supérieure Paris Année 2013-2014
Algèbre 1

Corrigé de la Feuille d'exercices 7

Exercice 2

a) Notons ψ_ϕ l'image de ϕ. Pour tous $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in k$, on vérifie :
$\psi_\phi((\lambda + i\mu)x, y) = \lambda\phi(x, y) + i\lambda\phi(x, iy) - \mu\phi(x, iy) + i\mu\phi(x, y) = (\lambda + i\mu)\psi_\phi(x, y)$;
$\psi_\phi(x, (\lambda + i\mu)y) = \lambda\phi(x, y) + i\lambda\phi(x, iy) + \mu\phi(x, iy) - i\mu\phi(x, y) = (\lambda - i\mu)\psi_\phi(x, y)$.
Réciproquement, tout forme sesquilinéaire ψ sur $E' \times E'$ s'écrit $\psi = \phi_1 + i\phi_2$ où ϕ_1 et ϕ_2 sont des formes k-bilinéaires sur $E \times E$. On a, pour tous $x, y \in E \times E$, les égalités $\phi_1(ix, iy) + i\phi_2(ix, iy) = \psi(ix, iy) = \psi(x, y) = \phi_1(x, y) + i\phi_2(x, y)$. Autrement dit, ϕ_1 et ϕ_2 sont invariantes par i. Aussi, on a $\phi_1(x, iy) + i\phi_2(x, iy) = \psi(x, iy) = -i\psi(x, y) = \phi_2(x, y) - i\phi_1(x, y)$, de sorte que l'on a $\phi_2(x, y) = \phi_1(x, iy)$.

b) On a $\psi_\phi(y, x) = \phi(y, x) - i\phi(iy, x)$.

c) Si ϕ est symétrique invariante par i, on a $\phi(x, iy)+\phi(y, ix) = \phi(x, iy)+\phi(iy, -x) = 0$.

Exercice 3

a) Supposons (i). Alors u^* stabilise $\ker d_\phi$. Soit S un supplémentaire de $\ker d_\phi$ dans E; si $u_0^* : E \to E$ désigne l'identité de $\ker d_\phi$ prolongée par 0 sur S, $u^* + u_0^*$ est un endomorphisme satisfaisant aussi l'égalité voulue. De ce fait, on a $u_0^* = 0$ et $\ker d_\phi = 0$. Aussi, on a $d_\phi(y) \circ u = d_\phi(u^*(y))$ pour tout $y \in E$.
Réciproquement, supposons (ii). L'inclusion ${}^t u(d_\phi(E)) \subseteq d_\phi(E)$ nous permet de définir une application ensembliste $u^* : E \to E$ vérifiant $\phi(u(x), y) = \phi(x, u^*(y))$ pour tous $x, y \in E$. L'injectivité de d_ϕ nous assure l'unicité d'un tel u^*, et sa linéarité en découle.

b) Soient k un corps et E un espace vectoriel sur k possédant une base dénombrable $(e_n)_{n\geq 1}$. On définit une forme bilinéaire ϕ sur $E \times E$ en posant $\phi(e_i, e_j) = \delta_{i,j+1}$ pour tous $i, j \geq 1$. Soit u l'application linéaire définie par $e_i \mapsto \delta_{1i}e_2$. Alors on a ${}^t u(e_2^*) = e_1^* \notin d_\phi(E)$ et $e_2^* \in d_\phi(E)$.

Exercice 4

b) Soit b un élément du noyau de u. La condition implique alors $\phi_1(., b) = 0$, et comme ϕ_1 est non dégénérée, on a $b = 0$.

c) D'après (a) et les hypothèses de non dégénérescence, pour tout $y \in E_1$, $d_{\phi_1}(y)$ et $d_{\phi_2}(u(y))$ sont deux éléments non nuls de E_1^* possédant le même hyperplan. Alors, il existe $m(y) \in k^\times$ vérifiant $\phi_2(u(x), u(y)) = \phi_1(x, y)m(y)$ pour tout $x \in E_1$.

d) On voit tout d'abord que $m : E_1 \to k^\times$ est constante sur les droites. Maintenant, si y et y' sont deux éléments non colinéaires de E_1 (qui est alors de dimension supérieure à 2), on a $\phi_1(x, y + y')m(y + y') = \phi_1(x, y)m(y) + \phi_1(x, y')m(y')$. En prenant successivement x dans $\ker d_{\phi_1}(y) \setminus \ker d_{\phi_1}(y')$ et $\ker d_{\phi_1}(y) \setminus \ker d_{\phi_1}(y')$ (c'est possible parce que ϕ_1 est non dégénérée!), on obtient $m(y) = m(y')$ et le résultat voulu.

Exercice 5

2) Le nombre de vecteurs de $\mathbb{F}_{q^2}^n$ est $q^{2n} = 1 + z_n + (q-1)y_n$. Aussi, en séparant le cas où la dernière coordonnée est nulle ou non, on obtient $z_{n+1} = z_n + (q-1)(q+1)y_n$. On en déduit $z_{n+1} = (q^{2n} - 1)(q + 1) - qz_n$; comme z_1 vaut 0, on prouve la formule voulue par récurrence.

3) Les éléments de $\mathscr{U}_n(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$ sont en bijection avec les bases orthonormales de $\mathbb{F}_{q^2}^n$. On en déduit

$$|\mathscr{U}_n(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)| = \prod_{i=1}^{n} q^{i-1}(q^i - (-1)^i) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n}(q^i - (-1)^i).$$

4) La condition ${}^t u^{(q)} u = 1$, où $u^{(q)}$ désigne la matrice de coefficients les puissances q-ème des coefficients de la matrice $u \in \mathscr{U}_n(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$, donne $\det \mathscr{U}_n(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q) = \{x^{q+1} \mid x \in \mathbb{F}_{q^2}^\times\}$. On a alors

$$|\mathrm{SU}_n(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)| = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=2}^{n}(q^i - (-1)^i), \quad |\mathrm{PSU}_n(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)| = \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n \wedge (q+1)} \prod_{i=2}^{n}(q^i - (-1)^i).$$

Exercice 6

a) On compte le nombre de bases symplectiques de $\mathbb{F}_2^4$: $(2^4 - 1) \cdot 2^3 \cdot (2^2 - 1) \cdot 2 = 720$.

b) On fait agir $\mathscr{S}_6$ sur $\mathbb{F}_2^6$ par permutation des coordonnées. Le sous-espace $E = \{(x_i)_i \in \mathbb{F}_2^6 \mid \sum_i x_i = 0\}$ est stable par cette action. Cet espace est muni de la forme bilinéaire alternée $b : (x, y) \mapsto \sum_i x_i y_i$. Le sous-espace $E^\perp = \mathbb{F}_2(1,1,1,1,1,1)$ est encore stable par $\mathscr{S}_6$ et on a donc une action de $\mathscr{S}_6$ sur $E/E^\perp$ qui est de dimension 4 comme voulu. De plus, la forme b se factorise $E \times E \to E/E^\perp \times E/E^\perp \to \mathbb{F}_2$.

c) On a donc un morphisme $\mathscr{S}_6 \to \mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_2)$. Comme $\mathscr{A}_6$ est simple et que l'image a plus de 2 éléments, ce dernier est injectif. La cardinalité permet de conclure.