École normale supérieure Année 2014-2015
Algèbre 1

Corrigé de la Feuille d'exercices 7

Exercice 1

1. Elle est de rang 3, de signature $(1, 2)$.
2. Elle est de rang 2, de signature $(1, 1)$.
3. Elle est de rang 3, de signature $(3, 0)$.
4. Elle est de rang 2, de signature $(1, 1)$.
5. Elle est de rang 5, de signature $(1, 4)$.
6. Elle est de rang n^2, de signature $\left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}\right)$.
7. Elle est de rang n^2, de signature $(n^2, 0)$.
8. Elle est de rang 1, de signature $(1, 0)$.

Exercice 2

1. On a $B(1, X) = 1/2$ et $B(X, 1) = 0$ et donc B n'est ni symétrique ni antisymétrique.
2. On a $f(1) = 0$ et donc 1 est un vecteur isotrope.
3. Notons que la forme polaire de f n'est pas B mais sa symétrisé
$$1/2\,(B(P, Q) + B(Q, P))\,.$$
Un petit calcul donne $M_n = \left(\frac{i+j-2}{2(i+j-1)}\right)_{1 \le i,j \le n}$.
4. La signaure est $(1, 2)$.

Exercice 3 Soient b la forme bilinéaire associée et (x, y) une base de P constituée de vecteurs isotropes. Aussi, on a $z = x + \lambda y$ isotrope pour un $\lambda \in \mathbf{K}^\times$, ce qui veut dire $f(z) = 2\lambda b(x, y) = 0$. On a donc que $b(x, y) = 0$ et donc b est nulle sur P.

Exercice 4

1. Soient b et b' les formes bilinéaires respectives de f et f'. Si f est totalement isotrope, c'est clair. Supposons que ce ne soit pas le cas : il existe $x \in E$ avec $f(x) \neq 0$. Posons $a = f'(x)f(x)^{-1} \in \mathbf{K}^\times$. Soit $y \in E$. Les polynômes de deuxième degré $af(y+\lambda x)$ et $f'(y+\lambda x)$ (en la variable λ) ont mêmes zéros et même coefficient dominant $f'(x)$: ils sont donc égaux. En particulier on a $f'(y) = af(y)$.

2. Il suffit de considérer $x^2 + y^2$ et $x^2 + 2y^2$.

Cet exercice est un cas particulier du Théorème de zéros de Hilbert : soit $\mathbf{K}$ un corps algébriquement clos, $I \subset \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$ un idéal et notons $Z(I)$ l'ensemble de zéros communs à tous les polynômes de I. Si f est un polynôme qui s'annule sur $Z(I)$, alors il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $f^n \in I$.

Exercice 5 Soit η un élément triangulaire supérieur de $M_2(\mathbf{K})$ qui n'est pas diagonalisable. Considérons l'endomorphisme $\varphi : x \mapsto \eta x \eta^{-1}$ de $M_2(\mathbf{K})$; il préserve f. Un vecteur propre de φ est un élément $m \in M_2(\mathbf{K})$ vérifiant $\eta m = \lambda m \eta$ pour un certain $\lambda \in \mathbf{K}$. De ce fait, m envoie tout espace propre de η sur un espace propre de η (et donc le même dans le cas présent) ; et m est alors triangulaire supérieur lui-aussi. La somme des espaces propres de φ est donc un sous-espace propre de $M_2(\mathbf{K})$ et φ n'est pas diagonalisable.

Exercice 6 Notons b la forme bilinéaire associée à f.

a) Si $f|_H$ est non dégénérée, l'orthogonal de H pour b est de dimension 1, disons égal à $\mathbf{K}x$. Alors $b(u(x), u(h)) = b(x, h) = 0$ pour tout $h \in H$ donne $u(x) \in \mathbf{K}x$ et $f(u(x)) = f(x)$ donne $u(x) = \pm x$.

b) Si $f|_H$ est dégénérée, il existe $h \in H^\perp \cap H$ non nul. On peut le compléter en un plan hyperbolique (au passage, comme H est de codimension 1 cela force $H^\perp \cap H$ à être une droite) grâce à un $y \notin H$. Ecrivons $u(y) = \alpha y + h'$ avec $\alpha \in \mathbf{K}$ et $h' \in H$. On a $1 = b(y, h) = b(u(y), u(h)) = \alpha$ et $b(u(y) - y, n) = 0$ pour tout $n \in H$. On peut donc écrire $u(y) = y + \beta h$. Mais alors on a $f(y) + 2\beta = f(u(y)) = f(y)$, d'où $\beta = 0$.

Exercice 7

1. C'est clair. On a même que $f|_F$ est non dégénérée. Supposons le contraire : prenons un $t \in F \cap F^\perp$ non nul. On a alors $f(x + t) = f(x) > 0$ et l'existence d'un plan défini positif pour f. C'est absurde et $f|_F$ est non dégénérée. Elle est donc de signature $(1, \dim F - 1)$.
2. Supposons $f(t') \leq 0$ pour tout $t' \in F^\perp$. Comme on a $E = F \oplus F^\perp$ (pas de vecteur isotrope dans F), écrivons tout élément $e = t(e) + t'(e)$ suivant cette décomposition. On aurait alors $f(e) = f(t(e)) + f(t'(e)) \leq 0$, ce qui n'est pas vrai pour $(1, 0, \ldots, 0)$. De ce fait, il existe $x \in F^\perp$ avec $f(x) > 0$ et c'est une conséquence de la question 1.
3. Supposons $f|_F$ de rang $\leq \dim F - 2$. Alors $f|_F$ possède deux vecteurs isotropes qui se complètent en deux plans hyperboliques distincts dans E. Or E ne contient pas de somme directe de deux plans hyperboliques. L'hypothèse initiale est donc erronée.

Exercice 8

1. Les corps $\mathbf{C}$ et $\mathbf{F}_2$ ont tous deux 1 pour niveau.
2. Même argument que dans la classification des formes quadratiques sur un corps fini.

3. On a gratuitement $s(\mathbf{K}) \geq s(\mathbf{K}(X))$. Supposons donc $s(\mathbf{K}(X))$ fini, et notons s cette quantité. Il existe des fractions rationnelles $R_1(X), \dots, R_s(X)$ telles que l'on ait $R_1(X)^2 + \cdots + R_s(X)^2 = -1$.
   Supposons dans un premier temps $\mathbf{K}$ infini. En notant $Q(X)$ un dénominateur commun des $R_i(X)$, on obtient une identité $P_1(X)^2 + \cdots + P_s(X)^2 = -Q(X)^2$ dans $\mathbf{K}[X]$. Soit $\alpha \in \mathbf{K}$ un élément non zéro de Q, et pour tout i, soit $p_i^{(\alpha)} = P_i(\alpha)Q(\alpha)^{-1} \in \mathbf{K}$. On a alors $(p_1^{(0)})^2 + \cdots + (p_s^{(0)})^2 = -1$. Ceci donne $s(\mathbf{K}) \leq s(\mathbf{K}(X))$.
   Dans le cas où $\mathbf{K}$ est fini, par la question 2, on peut supposer $s(\mathbf{K}(X)) = 1$. Alors $R_1(X)$ s'écrit $P_1(X)/Q(X)$ avec $P_1(X), Q(X) \in \mathbf{K}[X]$. En choisissant $P_1(X)$ et $Q(X)$ premiers entre eux, on voit que $R_1(X)$ est un élément de $\mathbf{K}^\times$. Cela donne $s(\mathbf{K}) = 1$ aussi.
4. Si on a $s(\mathbf{K}) \leq n-1$, alors il existe $x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbf{K}$ tels que $x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + 1^2 = 0$. Réciproquement, si f_n a un vecteur isotrope $(x_1, \dots, x_n)$ avec $x_i \neq 0$, alors $\sum_{j \neq i} \left(\frac{x_j}{x_i}\right)^2 = -1$.
5. Montrons-le par récurrence sur $k \geq 0$. Le cas $k = 0$ est trivial. Supposons la propriété vraie au rang k et prouvons le rang $k+1$. Par hypothèse de récurrence, on a T_1 et T_2 vérifiant
$$ {}^tT_1T_1 = T_1{}^tT_1 = f_n(x_1, \dots, x_n)I_n, \quad {}^tT_2T_2 = T_2{}^tT_2 = f_n(x_{n+1}, \dots, x_{2n})I_n. $$
   On calcule ensuite
$$ \begin{pmatrix} {}^tT_1 & {}^tA \\ {}^tT_2 & {}^tB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ A & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tT_1T_1 + {}^tAA & {}^tT_1T_2 + {}^tAB \\ {}^tT_2T_1 + {}^tBA & {}^tT_2T_2 + {}^tBB \end{pmatrix}, $$
$$ \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tT_1 & {}^tA \\ {}^tT_2 & {}^tB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1{}^tT_1 + T_2{}^tT_2 & T_1{}^tA + T_2{}^tB \\ A^tT_1 + B^tT_2 & A^tA + B^tB \end{pmatrix}. $$
   (a) Si $f_n(x_1, \dots, x_n) \neq 0$, on prend $A = T_1^{-1t}T_2T_1$ et $B = -{}^tT_1$.
   (b) Sinon, si $f_n(x_{n+1}, \dots, x_{2n}) \neq 0$, on prend $A = -{}^tT_2$ et $B = T_2^{-1t}T_1T_2$.
   (c) Enfin, si $f_n(x_1, \dots, x_n) = f_n(x_{n+1}, \dots, x_{2n}) = 0$, on prend $A = -T_1$ et $B = T_2$.
6. Si $f_n(x)$ et $f_n(y)$ sont deux sommes non nulles de 2^k carrés d'éléments, il suffit de définir $x.y$ comme étant la première ligne de T_xT_y et on a $f_n(x.y) = f_n(x)f_n(y)$. De même, si $[-1].x$ désigne la première ligne de T_x^{-1}, on obtient $f_n([-1].x) = f_n(x)^{-1}$.
7. Supposons $s(\mathbf{K})$ fini, vérifiant $n := 2^k \leq s(\mathbf{K}) < 2n = 2^{k+1}$ pour un certain $k \geq 0$. Alors f_{2n} possède un vecteur isotrope par la question 4, disons $(x_1, \dots, x_{2n})$. On a donc $f_n(x_1, \dots, x_n) = -f_n(x_{n+1}, \dots, x_{2n}) \neq 0$. Mais alors $f_n(x_1, \dots, x_n)f_n(x_{n+1}, \dots, x_{2n})^{-1} = -1$ est une somme de 2^k carrés par la question 6.

+) Le corps $\mathbf{Q}_2$ est de niveau 4 (par approximation successives). Pour avoir un corps de niveau $n = 2^k$, on peut considérer $\mathbf{R}((X_i)_{1\leq i<n})[X_n]/(\sum X_i^2 + 1)$. Montrer qu'il n'est pas de niveau inférieur n'est pas immédiat : on pourra se reporter au Theorem 2.8 du chapitre 11 de Lam, *Algebraic theory of quadratic forms*.