

Homologie de Khovanov

Mathieu Cossutta

Martin Olbermann

Exposé proposé par Olivier Schiffmann

Résumé

Pour functorialiser le polynôme de Jones (un des meilleurs invariants de nœuds existant) Khovanov a créé un nouvel invariant de nœuds à valeurs dans les modules gradués, l'homologie de Khovanov. Dans une première partie, nous décrirons le polynôme de Jones, puis la construction de Khovanov qui utilise une théorie topologique des champs quantiques. On démontre ensuite que c'est un invariant, puis on conclut par quelques applications.

Table des matières

1	Définition d'un nœud et invariant de Jones	2
1.1	Nœuds	2
1.2	Diagrammes	2
1.3	Les mouvements de Reidemeister	3
1.4	Résolutions d'un diagramme	3
1.5	Le crochet de Kauffman	4
1.6	Le polynôme de Jones	5
2	Une théorie topologique des champs quantiques	5
2.1	Algèbre de Frobenius	5
2.2	(1+1)-TQFT	6
3	Homologie de Khovanov	7
3.1	Complexe et module gradué	8
3.2	Cube commutatif	8
3.3	Complexe associé à un cube	9
3.4	Construction du cube et du complexe associé à un diagramme	10
3.5	Lien avec le crochet de Kauffman	12
4	Démonstration du théorème principal	12
4.1	Invariance par R1	13
4.2	Invariance par R2	13
4.3	Invariance par R3	15

5 Exemples et applications	17
5.1 Un calcul explicite	17
5.2 Homologie du nœud miroité	18
5.3 Application aux nombres de croisements	19
5.4 Homologie sur \mathbb{Q}	20
5.5 Généralisations et résultats ultérieurs	22
Bibliographie	23

1 Définition d'un nœud et invariant de Jones

1.1 Nœuds

a) Un entrelac L à m composantes est un sous-ensemble de \mathbb{R}^3 constitué de m courbes disjointes simples, fermées et linéaires par morceaux . Un entrelac à une composante est appelé un nœud.

b) Les entrelacs L_1 et L_2 sont dits équivalents s'il existe un homéomorphisme orienté $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ linéaire par morceaux tel que $h(L_1) = L_2$. (C'est en fait une relation d'équivalence.)

Les courbes de L sont alors composées d'un nombre fini de segments. (En pratique, on suppose qu'il y a beaucoup de segments et on dessine des nœuds lisses.) On ne permet pas des courbes simples fermées arbitraires pour éviter les nœuds "sauvages", qui contiennent une infinité de "petits nœuds". (L'autre possibilité serait de définir un nœud comme une sous-variété différentielle de dimension 1 de \mathbb{R}^3 . Mais cela revient à une théorie équivalente, et travailler avec des nœuds linéaires par morceaux est plus facile.) Un entrelac orienté est un entrelac où on a donné un sens de parcours pour chaque composante. On a de même une notion d'équivalence d'entrelacs orientés.

La théorie des nœuds essaie de déterminer toutes ces classes d'équivalence et, pour deux nœuds donnés, de déterminer s'ils sont équivalents ou non. On essaie surtout de trouver des invariants de nœuds : ce sont des applications de l'ensemble des nœuds vers les nombres entiers ou vers un anneau de polynômes ou ... constantes sur les classes d'équivalence et relativement faciles à calculer. Ces invariants servent surtout à distinguer deux nœuds non-équivalents.

1.2 Diagrammes

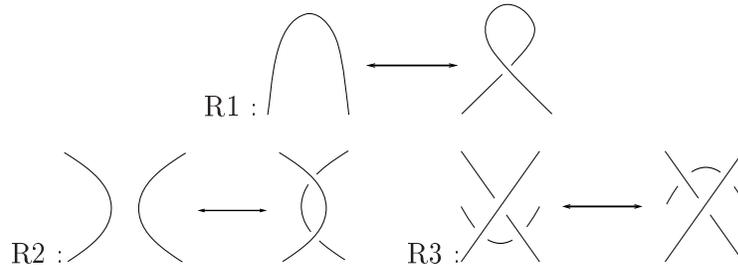
La façon la plus facile de représenter des nœuds est de travailler avec des diagrammes de nœuds. Un diagramme D d'un nœud est son image par une

projection générique $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire : chaque segment est projeté sur un segment de \mathbb{R}^2 , les projections de deux tels segments s'intersectent en au plus un point, et aucun point de D n'est dans l'image de plus de deux segments de L) avec l'information "dessus et dessous" pour chaque croisement de D . (Dans les dessins, on interrompt le segment qui passe au dessous de l'autre.)

1.3 Les mouvements de Reidemeister

On s'intéresse à la question suivante : quand est-ce que deux diagrammes d'entrelacs désignent deux entrelacs équivalents ? Le théorème suivant a été démontré par Reidemeister dans les années 30.

Théorème 1 *Soient D_1 et D_2 deux diagrammes de nœuds. D_1 et D_2 représentent deux entrelacs équivalents si et seulement si on peut obtenir D_2 à partir de D_1 par une suite (finie) des 4 mouvements locaux suivants (et leurs inverses) :*



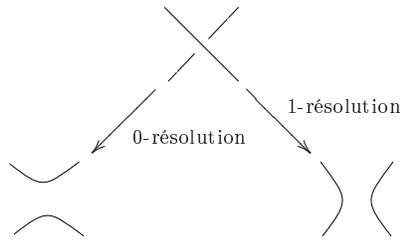
R4 : isotopies du diagramme (qui ne changent pas les croisements)

(On peut aussi considérer les mouvements symétriques à R1 ou R3, mais ceux-ci s'obtiennent à partir de R1 ou R3 et R2.)

Ce théorème permet de prouver très vite qu'une application avec domaine l'ensemble de tous les nœuds qui est définie à partir des diagrammes de nœuds est un invariant, c'est-à-dire constante sur les classes d'équivalence : il suffit de montrer que la valeur est la même pour deux diagrammes qui diffèrent d'un mouvement de Reidemeister.

1.4 Résolutions d'un diagramme

Soit D un diagramme à n croisements, pour simplifier un croisement il y a deux possibilités :



On appelle résolution d'un diagramme un diagramme obtenue en simplifiant tout les croisements. Le résultat obtenu est une union disjointe de cercles (il y a 2^n résolutions possibles). Notons \mathcal{I} l'ensemble des croisements. Soit $\mathcal{L} \subset \mathcal{I}$. On note $D(\mathcal{L})$ la résolution obtenue en prenant une 1-résolution des croisements de \mathcal{L} et une 0-résolution des autres.

1.5 Le crochet de Kauffman

Soit D une projection générique plane d'un nœud L . On associe un polynôme de Laurent $\langle D \rangle \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ avec les règles suivantes :

1. Le crochet d'un cercle vaut $q + q^{-1}$:

$$\langle \bigcirc \rangle = q + q^{-1}$$

2. Si on fixe un croisement le crochet de D vaut celui de la 0-résolution moins q fois celle de la 1-résolution :

$$\langle \times \rangle = \langle \smile \rangle - q \langle \frown \rangle$$

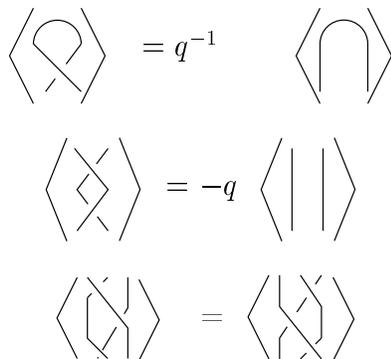
3. $\langle D_1 \sqcup D_2 \rangle = \langle D_1 \rangle \langle D_2 \rangle$ si on a une union disjointe.

Ces règles permettent de calculer un polynôme pour chaque diagramme plan.

On a alors :

$$\langle D \rangle = \sum_{\mathcal{L} \subset \mathcal{I}} (-q)^{|\mathcal{L}|} (q + q^{-1})^{\text{nbre de cercles de } D(\mathcal{L})}$$

On a pour les trois règles de Reidemeister :



On n'a donc pas encore un invariant de nœud. Le diagramme plan a une orientation héritée de celle de L . Soit $x(D)$ le nombre de croisements du type :



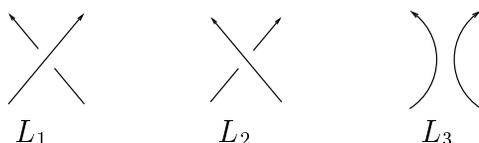
et $y(D)$ les autres.

Alors la quantité

$$K(D) = (-1)^{x(D)} q^{y(D)-2x(D)} \langle D \rangle$$

est un invariant de nœuds (orientés) : du point de vue des diagrammes elle est invariante par les mouvements de Reidemeister.

Si on considère trois nœuds L_1 , L_2 et L_3 qui diffèrent seulement de :



Alors

$$q^{-2}K(L_1) - q^2K(L_2) = (q^{-1} - q)K(L_3)$$

1.6 Le polynôme de Jones

Le polynôme de Jones $J(L)$ est déterminé par les deux propriétés suivantes :

1. Le polynôme de Jones du cercle est 1.
2. Pour les nœuds orientés L_1 , L_2 et L_3 on a :

$$t^{-1}J(L_1) - tJ(L_2) = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)J(L_3)$$

Ainsi le crochet de Kauffman et le polynôme de Jones sont liés par :

$$J(L)_{\sqrt{t}=-q} = \frac{K(L)}{q + q^{-1}}$$

2 Une théorie topologique des champs quantiques

2.1 Algèbre de Frobenius

Soit Ab la catégorie des groupes abéliens gradués et des morphismes gradués et Ab_0 la sous-catégorie avec pour morphismes les morphismes préservant le degré. \mathbb{Z} est un groupe abélien gradué avec la gradation triviale $deg(1) = 0$. Soit $A = \mathbb{Z}[x]/(x^2)$. A est un \mathbb{Z} -module libre gradué en posant

$deg(1) = 1$ et $deg(X) = -1$. Cette gradation s'étend aux puissances tensorielles de A (sur \mathbb{Z}) en posant $deg(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = deg(a_1) + \dots + deg(a_n)$.

On a les applications \mathbb{Z} -linéaires suivantes :

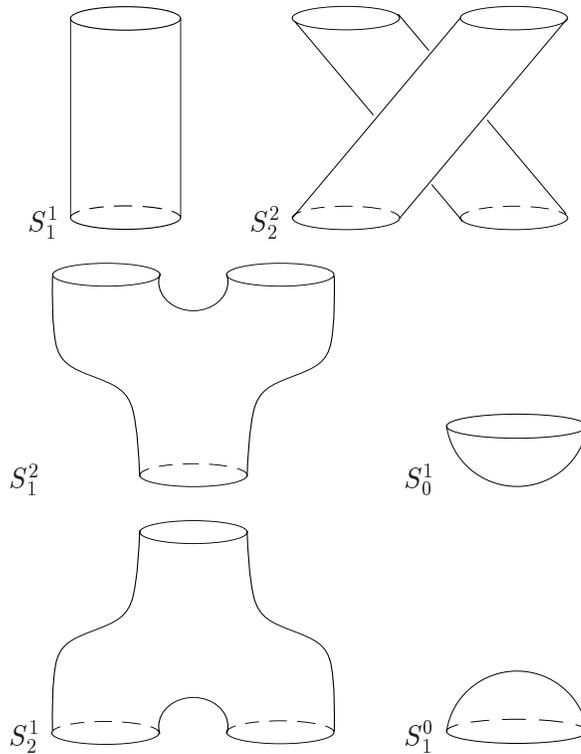
- $Id : A \rightarrow A$,
- $Perm : A \otimes A \rightarrow A \otimes A$ qui envoie $a \otimes b \mapsto b \otimes a$,
- la multiplication dans A peut être vue comme une application $m : A \otimes A \rightarrow A$,
- A est une algèbre commutative unitaire ; l'unité peut être vue comme une application $\iota : \mathbb{Z} \rightarrow A$ qui envoie $1 \in \mathbb{Z}$ vers $1 \in A$,
- on définit une application de comultiplication $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$ par $\Delta(1) = 1 \otimes X + X \otimes 1$ et $\Delta(X) = X \otimes X$,
- de même, on définit une application de counité $\varepsilon : A \rightarrow \mathbb{Z}$ par $\varepsilon(1) = 0$ et $\varepsilon(X) = 1$.

On s'aperçoit que les applications ainsi définies sont toutes graduées et qu'on a : $deg(m) = deg(\Delta) = -1$, $deg(Id) = deg(Perm) = 0$, $deg(\iota) = deg(\varepsilon) = 1$.

A est une algèbre de Frobenius, c'est à dire une algèbre commutative et associative avec une counité telle que la forme bilinéaire $(a, b) \mapsto \varepsilon(ab)$ est non dégénérée. Δ est l'application duale de m par cette forme bilinéaire.

2.2 (1+1)-TQFT

On considère les surfaces "élémentaires" suivantes :



Un cobordisme entre deux variétés A et B de dimension d est une variété C de dimension $d+1$ qui a comme bord l'union disjointe de A et B : $\partial C = \partial_0 C \cup \partial_1 C$ avec $\partial_1 C = B$ et $\partial_0 C = A$. Les six surfaces S_m^n décrivent des cobordismes entre une union disjointe de m cercles et une union disjointe de n cercles. Soit \mathcal{M} la catégorie avec objets les variétés de dimension 1 fermées à difféomorphisme près (c'est-à-dire des unions disjointes de cercles) et morphismes les cobordismes entre ces variétés engendrés par les surfaces $S_2^1, S_1^2, S_0^1, S_1^0, S_1^1, S_2^2$. Les objets de \mathcal{M} sont paramétrés par les entiers naturels ; on appelle \bar{n} l'objet "union disjointe de n cercles". Les morphismes entre \bar{m} et \bar{n} sont des surfaces compactes orientées S avec $\partial_1 S = \bar{n}$ et $\partial_0 S = \bar{m}$. On peut montrer qu'on peut toujours décomposer une telle surface en une union de surfaces élémentaires dont des cercles des bords ont été recollés. La composition de deux morphismes S et T s'obtient en recollant $\partial_1 S$ avec $\partial_0 T$.

Définition 1 On appelle $(1+1)$ -TQFT (topological quantum field theory) un foncteur de \mathcal{M} dans Ab qui vérifie les propriétés suivantes :

$$F(\emptyset) = \mathbb{Z} \text{ et } F(S_1 \sqcup S_2) = F(S_1) \otimes F(S_2)$$

Théorème 2 Les $(1+1)$ TQFT sont en correspondance bijective avec les algèbres de Frobenius.

Soit B une algèbre de Frobenius. On définit un foncteur F_B de la catégorie \mathcal{M} vers la catégorie Ab de la manière suivante : on pose $F(\bar{n}) = B^{\otimes n}$ pour les objets, et on pose $F(S_2^1) = m$, $F(S_1^2) = \Delta$, $F(S_0^1) = \iota$, $F(S_1^0) = \varepsilon$, $F(S_2^2) = Perm$, $F(S_1^1) = Id$ pour les morphismes élémentaires. On doit maintenant vérifier que F_B est ainsi bien défini, c'est-à-dire que pour deux façons différentes de décomposer une surface S en surfaces élémentaires, les deux applications définies par ces décompositions de S coïncident. Cela est dû à la structure d'algèbre de Frobenius.

Réciproquement soit F une $(1+1)$ -TQFT. On pose $B = F(\bigcirc)$ avec la multiplication définie par $F(S_2^1)$. La counité est définie par $F(S_1^0)$. Comme F est un foncteur B est une algèbre de Frobenius.

Dans la suite on applique la première construction à A . Et on appelle F le foncteur obtenu.

Théorème 3 Le degré de $F(S)$ est égal à la caractéristique d'Euler de S .

Démonstration : C'est vrai pour les surfaces élémentaires, et cela reste vrai si on recolle ces surfaces et si on prend des unions disjointes.

3 Homologie de Khovanov

A chaque diagramme on va associer un cube commutatif dont on prendra le complexe total. Un nouvel invariant ?

3.1 Complexe et module gradué

Soit $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ un \mathbb{Z} -module gradué de type fini et un complexe

$C : \dots \rightarrow C^i \xrightarrow{d^i} C^{i+1} \rightarrow \dots$ à valeurs dans Ab_0 . On définit :

– La caractéristique d'Euler graduée de M sur un corps k comme :

$$\chi(M) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} q^i \dim_k(M_i \otimes k)$$

(dans la suite sauf précision le corps k sera \mathbb{Q}).

– La caractéristique d'Euler de C comme :

$$\chi(C) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \chi(C^i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \chi(H^i(C))$$

– Le module gradué $M\{n\}$ dont la i -ème composante graduée est M^{i+n} .

Sa caractéristique d'Euler est : $q^{-n} \chi(M)$,

– Le complexe $C[n]$ tel que $C[n]^i = C^{i+n}$ et $d[n]^i = (-1)^n d_{n+i}$. Sa caractéristique d'Euler est : $(-1)^n \chi(C)$,

– le cône $C(f)$ d'un morphisme de complexes $f : C \rightarrow D$ tel que

$$C(f)^i = C[1]^i \oplus D^i, \quad d^i(m^{i+1}, n^i) = (-d_C m^{i+1}, f(m^{i+1}) + d_D n^i)$$

Sa caractéristique d'Euler est $\chi(D) - \chi(C)$.

Dans la suite on utilisera la notion de complexe de dimension n c'est à dire une suite de modules indexée par \mathbb{Z}^n et d'applications dont chaque carré élémentaire commute. Par récurrence on construit son complexe total. Par exemple de ce point de vue le cône d'un morphisme entre deux complexes est le complexe total du double complexe qu'il engendre.

3.2 Cube commutatif

Soit \mathcal{I} un ensemble fini de cardinal n et \mathcal{B} une catégorie additive.

– On note $r(\mathcal{I})$ l'ensemble des couples (\mathcal{L}, a) où \mathcal{L} est un sous-ensemble de \mathcal{I} et a un élément de \mathcal{I} n'appartenant pas à \mathcal{L} . On note $\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2$ l'union de deux parties disjointes de \mathcal{I} .

– Un \mathcal{I} -cube \mathcal{V} à valeurs dans \mathcal{B} est la donnée pour chaque sous-ensemble \mathcal{J} de \mathcal{I} d'un objet $\mathcal{V}(\mathcal{J})$ de \mathcal{B} et pour chaque élément $(\mathcal{L}, a) \in r(\mathcal{I})$ d'un morphisme $\xi_a^{\mathcal{V}}(\mathcal{L})$ de \mathcal{B} de façon à ce que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} V(\mathcal{L}) & \xrightarrow{\xi_a^{\mathcal{V}}(\mathcal{L})} & V(\mathcal{L}a) \\ \downarrow \xi_b^{\mathcal{V}}(\mathcal{L}) & & \downarrow \xi_b^{\mathcal{V}}(\mathcal{L}a) \\ V(\mathcal{L}b) & \xrightarrow{\xi_a^{\mathcal{V}}(\mathcal{L}b)} & V(\mathcal{L}ab) \end{array}$$

On peut représenter un \mathcal{I} -cube par un cube de dimension n dans l'espace euclidien dont les sommets sont les (a_1, \dots, a_n) avec $a_i \in \{0, 1\}$,

et les arêtes sont orientées dans le sens du sommet de somme maximum des coordonnées. En numérotant les éléments de \mathcal{I} on obtient une correspondance bijective entre les sommets et les parties de \mathcal{I} et entre les arêtes et les éléments de $r(\mathcal{I})$. On associe au sommet \mathcal{L} l'objet $V(\mathcal{L})$ et à l'arête (\mathcal{L}, a) le morphisme $\xi_a^V(\mathcal{L})$. Ainsi on a un cube commutatif ssi chaque carré élémentaire est commutatif. Ainsi un \mathcal{I} -cube devient un complexe de dimension n en rajoutant des zéros. On a donc une notion de sous-cube et de cube quotient.

- Un morphisme entre deux \mathcal{I} -cubes V et W est un morphisme de complexes de dimension n c'est à dire une collection de morphismes :

$$\phi(\mathcal{L}) : V(\mathcal{L}) \rightarrow W(\mathcal{L}) \quad \forall \mathcal{L} \subset \mathcal{I}$$

De façon à ce que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc} V(\mathcal{L}) & \xrightarrow{\phi(\mathcal{L})} & W(\mathcal{L}) \\ \downarrow \xi_a^V(\mathcal{L}) & & \downarrow \xi_a^W(\mathcal{L}) \\ V(\mathcal{L}a) & \xrightarrow{\phi(\mathcal{L}a)} & W(\mathcal{L}a) \end{array}$$

Cela donne alors au \mathcal{I} -cube une structure de catégorie. De plus si \mathcal{B} est abélienne cette nouvelle catégorie l'est aussi. Ainsi si on a deux \mathcal{I} -cubes à valeurs dans Ab_0 la somme directe en est encore un. Par contre en général on ne peut pas faire la somme directe de deux éléments de Ab (on obtient seulement un cube à valeur dans les \mathbb{Z} -modules).

- Soit $a \in \mathcal{I}$, notons $\mathcal{J} = \mathcal{I} - \{a\}$. On définit les deux \mathcal{J} -cubes suivants :

$$V_a(*0)(\mathcal{L}) = V(\mathcal{L}), \quad V_a(*1)(\mathcal{L}) = V(\mathcal{L}a) \quad \text{pour } \mathcal{L} \subset \mathcal{J}$$

3.3 Complexe associé à un cube

Soit V un cube commutatif. C'est un complexe de dimension n , on peut donc prendre son complexe total c'est à dire le complexe $\overline{\mathcal{C}}(V)$ défini par :

$$\overline{\mathcal{C}}^i(V) = \bigoplus_{\mathcal{L} \subset \mathcal{I}, |\mathcal{L}|=i} V(\mathcal{L}), \quad i \in \mathbb{Z}$$

Avec la différentielle :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{C}}^i(V) & \rightarrow & \overline{\mathcal{C}}^{i+1}(V) \\ x \in V(\mathcal{L}), |\mathcal{L}| = i & \mapsto & \sum_{a \in \mathcal{I} - \mathcal{L}} (-1)^{\alpha(\mathcal{L}, a)} \xi_a^V(\mathcal{L}) x \end{array} \right.$$

Proposition 1 *Soit $a \in \mathcal{I}$, le complexe $\overline{\mathcal{C}}(V)[1]$ est isomorphe au cône de l'application de $(\overline{\mathcal{C}}(V_a(*0)) \rightarrow \overline{\mathcal{C}}(V_a(*1)))$.*

C'est la définition quand on construit le complexe total par récurrence.

Proposition 2 *Si il existe $a \in \mathcal{L}$ tel que pour tout $\mathcal{L} \subset \mathcal{I} - \{a\}$, $\xi_a^V(\mathcal{L})$ est un isomorphisme, alors $\overline{\mathcal{C}}(V)$ est acyclique.*

En effet d'après la proposition précédente le complexe est isomorphe au cône d'un isomorphisme de complexes donc acyclique.

Proposition 3 *Soit V, W deux \mathcal{I} -cubes commutatifs alors on a un isomorphisme canonique :*

$$\overline{\mathcal{C}}(V \oplus W) = \overline{\mathcal{C}}(V) \oplus \overline{\mathcal{C}}(W)$$

Soit V un sous-cube de W . Alors on a un isomorphisme canonique :

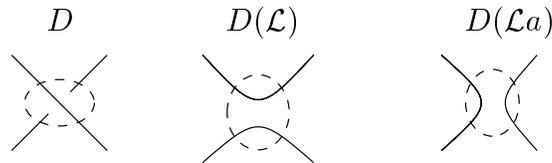
$$\overline{\mathcal{C}}(W/V) = \overline{\mathcal{C}}(W)/\overline{\mathcal{C}}(V)$$

3.4 Construction du cube et du complexe associé à un diagramme

Soit D une projection générique plane d'un nœud L , soit \mathcal{I} l'ensemble des croisements de D et n son cardinal. A D on va associer un \mathcal{I} -cube commutatif à valeurs dans Ab_0 . Pour cela on va d'abord construire un \mathcal{I} -cube commutatif à valeurs dans la catégorie \mathcal{M} auquel on appliquera le foncteur F .

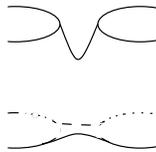
Une résolution est une union disjointe de cercles. On peut donc la considérer comme une variété de dimension 1 plongée dans le plan. De cette façon à $\mathcal{L} \subset \mathcal{I}$ on associe un objet $D(\mathcal{L})$ de \mathcal{M} .

Soit $(\mathcal{L}, a) \subset r(\mathcal{I})$, les surfaces $D(\mathcal{L})$ et $D(\mathcal{L}a)$ ne diffèrent l'une de l'autre qu'au voisinage du croisement a . Dans $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$, on considère $D(\mathcal{L})$ comme inclu dans $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ et $D(\mathcal{L}a)$ comme inclu dans $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$. Soit U un voisinage de a dans \mathbb{R}^2 tel que en dehors de U les deux courbes coïncident et à l'intérieur de U on soit dans la situation suivante :



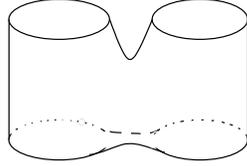
On construit la surface $S_a(\mathcal{L})$ incluse dans $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ de façon à ce que :

- Le bord de $S_a(\mathcal{L})$ soit l'union de $D(\mathcal{L})$ et de $D(\mathcal{L}a)$.
- En dehors de $U \times [0, 1]$, $S_a(\mathcal{L})$ soit $D(\mathcal{L}) \times [0, 1]$.
- Sur $U \times [0, 1]$, $S_a(\mathcal{L})$ vaut :



En prenant comme morphismes ces surfaces, on obtient un \mathcal{I} -cube à valeurs dans \mathcal{M} . De plus il est commutatif car si on a $a \neq b \in \mathcal{I}$, $S_b(\mathcal{L}a)S_a(\mathcal{L}) \simeq S_a(\mathcal{L}b)S_b(\mathcal{L})$ (en effet les modifications n'ont lieu qu'en des voisinages disjoints des deux croisements).

Ainsi l'application de F nous donne un \mathcal{I} -cube V commutatif à valeurs dans la catégorie Ab (mais pas dans Ab_0). De plus la surface suivante est de caractéristique d'Euler -1 :



Ainsi les cobordismes du cube sont de caractéristique d'Euler -1 . Donc le degré des morphismes du cube V aussi (théorème 3). Ainsi en posant :

$$V_D(\mathcal{L}) = V(\mathcal{L})\{-|\mathcal{L}|\}$$

et en gardant les mêmes morphismes, on obtient un cube commutatif V_D à valeurs dans Ab_0 (les morphismes conservent le degré).

On définit le complexe :

$$\overline{\mathcal{C}}(D) = \overline{\mathcal{C}}(V_D)$$

Il ne dépend pas de l'orientation des composantes de L . Finalement on peut définir notre complexe à la façon du crochet de Kauffman avec les axiomes suivants :

– Le complexe d'un cercle vaut :

$$\overline{\mathcal{C}}(\bigcirc) = A$$

– Si on fixe un croisement, le complexe de D vaut :

$$\overline{\mathcal{C}}(\times)[1] = \text{cône}(\overline{\mathcal{C}}(\smile) \rightarrow \overline{\mathcal{C}}(\searrow)\langle 1 \rangle)$$

(Le morphisme étant toujours donné par les cobordismes.)

– Si on a une union disjointe on fait le produit tensoriel :

$$\overline{\mathcal{C}}(D_1 \sqcup D_2) = \overline{\mathcal{C}}(D_1) \otimes \overline{\mathcal{C}}(D_2)$$

Au diagramme D on a associé deux nombres $x(D)$ et $y(D)$. On définit alors :

$$C(D) = \overline{\mathcal{C}}(D)[x(D)]\{2x(D) - y(D)\}$$

Pour $i, j \in \mathbb{Z}$ on note $H^i(D)$ le i -ème groupe de cohomologie de $C(D)$ et $H^{i,j}(D)$ la composante de degré j de $H^i(D)$. Alors on obtient à isomorphisme près des invariants de noeuds :

Théorème 4 *Si D est un diagramme d'un noeud orienté L , alors pour tout $i \in \mathbb{Z}$, la classe d'isomorphisme du \mathbb{Z} -module gradué $H^i(D)$ est un invariant de L .*

La démonstration de ce théorème fait l'objet de la quatrième partie.

3.5 Lien avec le crochet de Kauffman

Proposition 4 *Pour un noeud orienté L , on a :*

$$K(L) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \chi(H^i(D)).$$

Soit D un diagramme associé à L . Comme :

$$\chi(C(D)) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \chi(H^i(D))$$

On doit démontrer que :

$$K(L) = \chi(C(D))$$

Comme

$$\begin{aligned} \chi(C(D)) &= (-1)^{x(D)} q^{y(D)-2x(D)} \chi(\overline{C}(D)) \text{ et} \\ K(L) &= (-1)^{x(D)} q^{y(D)-2x(D)} \langle D \rangle \end{aligned}$$

Il suffit de démontrer que :

$$\langle D \rangle = \chi(\overline{C}(D))$$

Cela se voit en comparant la définition du crochet et la caractérisation du complexe d'un noeud. On vérifie bien qu'à chaque fois on fait la même opération. Ainsi on a bien le résultat.

4 Démonstration du théorème principal

Dans ce paragraphe, on montrera qu'un mouvement de Reidemeister induit un quasi-isomorphisme sur les complexes associés aux deux diagrammes et donc un isomorphisme en homologie.

L'invariance par R4 (isotopies du diagramme) est évidente. Pour l'invariance par R1, R2 et R3, on va se servir souvent du lemme suivant :

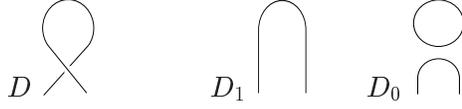
Proposition 5 *Soit C un complexe et C' un sous-complexe de C .*

Si C' est acyclique, alors C est quasi-isomorphe à C/C' ; si C/C' est acyclique, alors C' est quasi-isomorphe à C .

Démonstration : On a la suite exacte courte $0 \longrightarrow C' \longrightarrow C \longrightarrow C/C' \longrightarrow 0$ et on considère la suite exacte longue correspondante en homologie.

4.1 Invariance par R1

On considère les diagrammes suivants :



D_1 diffère de D par un mouvement R1. D_0 est la 0-résolution du croisement dans D . D_1 est isotope à la 1-résolution du croisement dans D .

V_D est un cube d'une dimension plus grande que V_{D_0} et V_{D_1} , on a $V_D(*0) = V_{D_0}$ et $V_D(*1) = V_{D_1}\{-1\}$.

L'application d'une arête de $V_D(*0)$ vers $V_D(*1)$ est toujours de la forme $m \otimes Id \otimes \dots \otimes Id$, où la multiplication m agit sur les facteurs A qui correspondent aux deux cercles qui apparaissent dans le morceau du diagramme de D_0 montré. (Ce morceau est pareil dans chaque résolution de D_0 .)

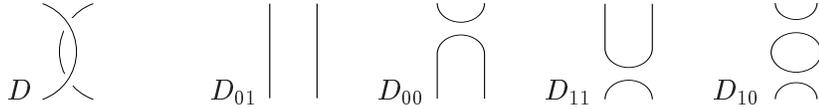
V_{D_0} est isomorphe à $A \otimes V_{D_1}$, où on a pris le produit tensoriel avec A en chaque sommet du cube.

Dans $V_D = (V_{D_0} \rightarrow V_{D_1}\{-1\})$, on a le sous-cube $(\langle 1 \rangle_{\mathbb{Z}} \otimes V_{D_1} \rightarrow V_{D_1}\{-1\})$, et ce sous-cube induit un sous-complexe acyclique car la multiplication avec $1 \in A$ est un isomorphisme.

Le complexe quotient est induit par le cube quotient $(\langle X \rangle_{\mathbb{Z}} \otimes V_{D_1} \rightarrow 0)$, il est donc isomorphe à $\overline{C}(D_1)\{1\}$. On a donc établi un quasi-isomorphisme $\overline{C}(D) \rightarrow \overline{C}(D_1)\{1\}$, c'est un quasi-isomorphisme $C(D) \rightarrow C(D_1)$, car $x(D_1) = x(D)$ et $y(D_1) = y(D) - 1$.

4.2 Invariance par R2

On considère les diagrammes suivants :



D_{01} diffère de D par un mouvement R2. D_{00} est la 0-résolution des deux croisements dans D , D_{11} est la 1-résolution des deux croisements dans D . D_{00} et D_{11} sont isotopes. D_{01} est isotope à la 0-résolution du premier et la 1-résolution du deuxième croisement dans D . D_{10} est isotope à la 1-résolution du premier et la 0-résolution du deuxième croisement dans D . $V_{D_{10}}$ est isomorphe à $A \otimes V_{D_{00}} = A \otimes V_{D_{11}}$.

On a $V_D(*ab) = V_{D_{ab}}\{-(a+b)\}$ pour $a, b \in \{0, 1\}$. V_D peut alors être considéré comme le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} V_{D_{00}} & \xrightarrow{m} & V_{D_{01}}\{-1\} \\ \downarrow \Delta & & \downarrow \Delta \\ V_{D_{10}}\{-1\} & \xrightarrow{m} & V_{D_{11}}\{-2\} \end{array}$$

où on a écrit m et Δ pour les applications qui sont le produit tensoriel de m respectivement Δ sur les facteurs A qui correspondent aux cercles qui apparaissent au croisement correspondant et Id sur les autres facteurs A .

De même, on a la décomposition en somme directe :

$$\overline{C}(D) = \overline{C}(D_{00}) \oplus \overline{C}(D_{01})\{-1\}[-1] \oplus \overline{C}(D_{10})\{-1\}[-1] \oplus \overline{C}(D_{11})\{-2\}[-2].$$

On a le sous-cube :

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \langle 1 \rangle_{\mathbb{Z}} \otimes V_{D_{11}}\{-1\} & \xrightarrow{m} & V_{D_{11}}\{-2\} \end{array}$$

qui induit un sous-complexe acyclique de $\overline{C}(D)$ car la multiplication m avec $1 \in A$ est un isomorphisme.

Le cube quotient V' est :

$$\begin{array}{ccc} V_{D_{00}} & \xrightarrow{m} & V_{D_{01}}\{-1\} \\ \downarrow \overline{\Delta} & & \downarrow \\ \langle X \rangle_{\mathbb{Z}} \otimes V_{D_{00}}\{-1\} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

avec $\overline{\Delta}(a) = X \otimes a$ pour tout $a \in V_{D_{00}}$. $\overline{\Delta}$ est donc un isomorphisme.

Le complexe quotient est :

$$C' = \overline{C}(D_{00}) \oplus \overline{C}(D_{01})\{-1\}[-1] \oplus \langle X \rangle_{\mathbb{Z}} \otimes \overline{C}(D_{00})\{-1\}[-1]$$

On définit $\alpha = m \circ \overline{\Delta}^{-1}$ et on considère le sous-complexe (qui n'est plus induit par un sous-cube) :

$$C'' = \overline{C}(D_{00}) \oplus \{(\alpha(z), z) \in \overline{C}(D_{01})\{-1\}[-1] \oplus \langle X \rangle_{\mathbb{Z}} \otimes \overline{C}(D_{00})\{-1\}[-1]\}$$

C'' est en effet un sous-complexe :

Soit d la différentielle dans C' , soit d_{ij} la différentielle dans les complexes $\overline{C}(D_{ij})$.

Alors pour $z \in \overline{C}(D_{00})$ on a :

$$d(z) = d_{00}(z) + (-1)^k (m(z) + \overline{\Delta}(z))$$

avec $d_{00}(z) \in \overline{C}(D_{00}) \subset C''$ et $(m(z), \overline{\Delta}(z)) = (\alpha(\Delta(z)), \overline{\Delta}(z)) \in C''$

Et pour $(\alpha(z), z) \in \overline{C}(D_{01})\{-1\}[-1] \oplus \langle X \rangle_{\mathbb{Z}} \otimes \overline{C}(D_{00})\{-1\}[-1]$ on a :

$$d(\alpha(z) + z) = (-1)^k (d_{01}(\alpha(z)) + d_{10}(z)) = (-1)^k (\alpha(d_{10}(z)) + d_{10}(z)) \in C''$$

C'' est isomorphe au complexe quotient :

$$C''' = \overline{C}(D_{00}) \oplus \langle X \rangle_{\mathbb{Z}} \otimes \overline{C}(D_{00})\{-1\}[-1]$$

par l'isomorphisme $(x, \alpha(z), z) \mapsto (x, z)$ (on vérifie aisément que c'est vraiment un isomorphisme de complexes, c'est-à-dire qu'il commute avec les différentielles). C''' est induit par le cube quotient :

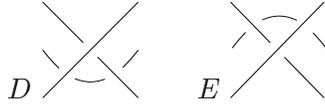
$$\begin{array}{ccc} V_{D_{00}} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \overline{\Delta} & & \downarrow \\ \langle X \rangle_{\mathbb{Z}} \otimes V_{D_{00}}\{-1\} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Mais $\overline{\Delta}$ est un isomorphisme, donc le complexe C''' (et alors C'') est acyclique.

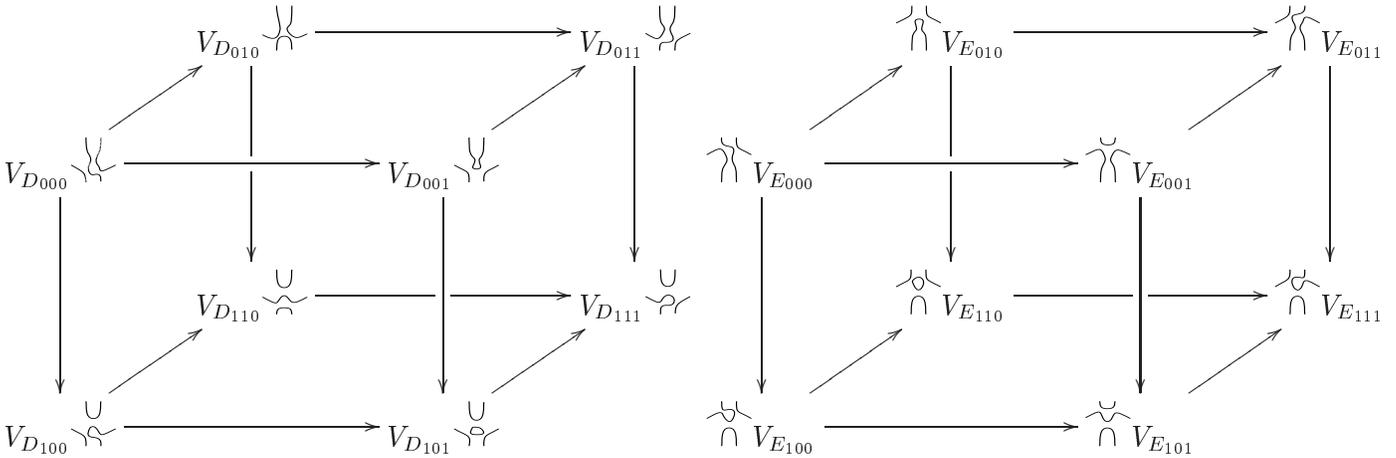
Comme C'' est acyclique, C' est quasi-isomorphe à $C'/C'' = \overline{C}(D_{01})\{-1\}[-1]$. De plus $\overline{C}(D)$ est quasi-isomorphe à $\overline{C}(D_{01})\{-1\}[-1]$, donc $C(D)$ est quasi-isomorphe à $C(D_{01})$, car $x(D_{01}) = x(D) - 1$ et $y(D_{01}) = y(D) - 1$.

4.3 Invariance par R3

On considère encore deux diagrammes D et E qui diffèrent d'un mouvement de Reidemeister et toutes leurs résolutions.



Les cubes V_D et V_E peuvent être considérés comme les diagrammes commutatifs :



Les faces supérieures de ces cubes correspondent aux résolutions de D_0 respectivement E_0 , les faces inférieures de ces cubes correspondent aux résolutions de D_1 respectivement E_1 .



On a donc une décomposition de $\overline{C}(D)$ et $\overline{C}(E)$ comme modules :

$$\overline{C}(D) = \overline{C}(D_0) \oplus \bigoplus_{i,j} \overline{C}(D_{1ij})\{-(1+i+j)\}$$

$$\overline{C}(E) = \overline{C}(E_0) \oplus \bigoplus_{i,j} \overline{C}(E_{1ij})\{-(1+i+j)\}$$

On s'aperçoit qu'on a la situation du mouvement R2 aux faces inférieures (dans D_1 et E_1). On peut donc appliquer le raisonnement du paragraphe dernier : on quotiente par des sous-complexes acycliques et obtient les complexes

$$\overline{C}(D) = \overline{C}(D_0) \oplus (\langle X \rangle_{\mathbb{Z}} \otimes \overline{C}(D_{100})\{-2\} \oplus \overline{C}(D_{110})\{-2\}) / \langle (z, \alpha(z)) \rangle$$

$$\overline{C}(E) = \overline{C}(E_0) \oplus (\langle X \rangle_{\mathbb{Z}} \otimes \overline{C}(E_{100})\{-2\} \oplus \overline{C}(E_{101})\{-2\}) / \langle (z, \alpha(z)) \rangle$$

qui sont isomorphes comme modules à

$$\tilde{C}(D) = \overline{C}(D_0) \oplus \overline{C}(D_{110})\{-2\}$$

$$\tilde{C}(E) = \overline{C}(E_0) \oplus \overline{C}(E_{101})\{-2\}$$

Mais $\tilde{C}(D)$ et $\tilde{C}(E)$ sont isomorphes par l'isomorphisme qui est l'identité sur $\overline{C}(D_0) = \overline{C}(E_0)$ (D_0 et E_0 étant isotopes) et qui envoie $y \in \overline{C}(D_{110})\{-2\}$ sur $y \in \overline{C}(E_{101})\{-2\}$ (D_{110} et E_{101} étant isotopes).

On peut montrer que la composée de ces isomorphismes $\overline{C}(D) \rightarrow \overline{C}(E)$ commute avec les différentielles, donc est un isomorphisme de complexes.

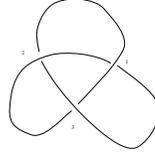
On a alors établi un quasi-isomorphisme entre $\overline{C}(D)$ et $\overline{C}(E)$, et par conséquent, $C(D)$ et $C(E)$ sont quasi-isomorphes, car $x(D) = x(E)$ et $y(D) = y(E)$.

Cela termine la démonstration du théorème principal.

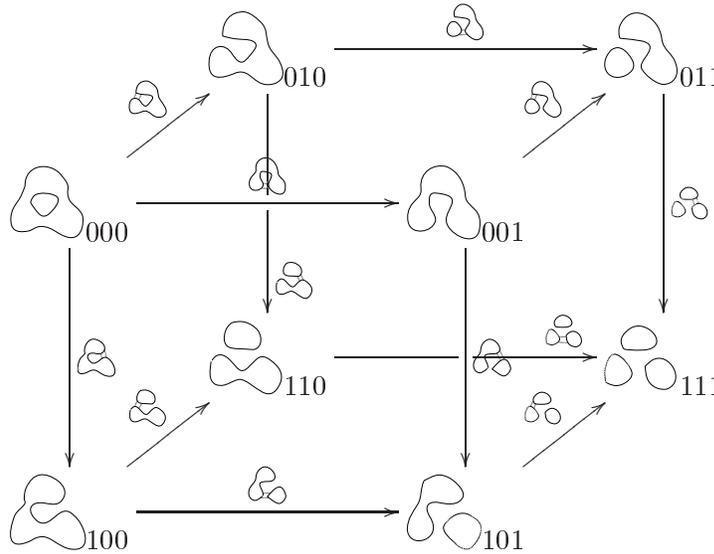
5 Exemples et applications

5.1 Un calcul explicite

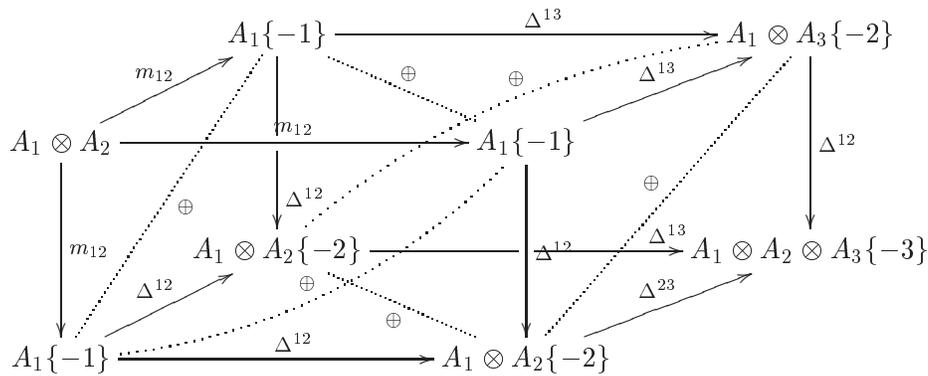
Le premier nœud non trivial est le nœud de trèfle :



Dans ce cas on va comprendre le calcul explicite, son diagramme dans \mathcal{M} est :



Appliquons le foncteur et la normalisation. On obtient le cube du trèfle :



(les sommes indiquent le complexe). On a alors (sans les gradations) un complexe de la forme $0 \rightarrow \mathbb{Z}^4 \xrightarrow{d^0} \mathbb{Z}^6 \xrightarrow{d^1} \mathbb{Z}^{12} \xrightarrow{d^2} \mathbb{Z}^8 \rightarrow 0$. En examinant

les morphismes on obtient pour les groupes d'homologie :

$$\begin{aligned}
H^0(\otimes) &= \mathbb{Z}\{-3\} \oplus \mathbb{Z}\{-1\} \\
H^1(\otimes) &= 0 \\
H^2(\otimes) &= \mathbb{Z}\{-5\} \\
H^3(\otimes) &= \mathbb{Z}\{-9\} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\{-7\} \\
H^i(\otimes) &= 0 \text{ si } i < 0 \text{ ou si } i > 3
\end{aligned}$$

5.2 Homologie du nœud miroité

Soit L un entrelac orienté et \bar{L} son image miroir obtenue en reflétant L par rapport à un plan arbitraire de \mathbb{R}^3 (la classe d'équivalence ne dépend pas du plan choisi).

Soit D un diagramme de L avec n croisements. On obtient un diagramme de \bar{L} en changeant tous les croisements dans D (cela correspond à une réflexion par rapport au plan sur lequel on projette). Soit \bar{D} ce diagramme de \bar{L} .

Soit $M = \bigoplus_i M^i$ un groupe abélien gradué de type fini. On définit une gradation sur son dual $M^* = \text{Hom}(M, \mathbb{Z})$ par $(M^*)^i = \text{Hom}(M^{-i}, \mathbb{Z})$. Si $f : M \rightarrow N$ est une application graduée, alors de même pour $f^* : N^* \rightarrow M^*$, où f^* , l'application duale de f , est définie par $\phi \mapsto \phi \circ f$.

Le complexe dual C^* du complexe $C : \dots \rightarrow C^i \xrightarrow{d^i} C^{i+1} \rightarrow \dots$ est défini par $(C^*)^i = (C^{-i})^*$ et $(d^*)^i$ comme l'application duale de la différentielle d^{-i-1} de C .

Pour un \mathcal{I} -cube V , on a aussi la notion de \mathcal{I} -cube dual $V^* : V^*$ est défini par $V^*(\mathcal{L}) = (V(\mathcal{I} \setminus \mathcal{L}))^*$ et $V^*(\mathcal{L}) \rightarrow V^*(\mathcal{L}a)$ comme le dual de $V(\mathcal{I} \setminus (\mathcal{L}a)) \rightarrow V(\mathcal{I} \setminus \mathcal{L})$.

Théorème 5 *Le cube $V_{\bar{D}}$ est isomorphe à $(V_D)^* \{-n\}$.*

Démonstration :

$A^* = \text{Hom}(A, \mathbb{Z})$ admet pour base $(\bar{1}, \bar{X})$ défini par

$$\bar{1}(1) = 0 \quad \bar{1}(X) = 1 \quad \bar{X}(1) = 1 \quad \bar{X}(X) = 0$$

En choisissant ces notations un peu étranges : A^* est le groupe abélien gradué avec base $(\bar{1}, \bar{X})$, $\text{deg}(\bar{1}) = 1$, $\text{deg}(\bar{X}) = -1$. Et si on identifie $(A \otimes A)^*$ et $A^* \otimes A^*$ par l'isomorphisme canonique, on a les applications $\bar{\Delta} = m^* : A^* \rightarrow A^* \otimes A^*$ et $\bar{m} = \Delta^* : A^* \otimes A^* \rightarrow A^*$ données par :

$$\begin{aligned}
\bar{m}(\bar{1} \otimes \bar{1}) &= \bar{1} & \bar{m}(\bar{X} \otimes \bar{X}) &= 0 & \bar{m}(\bar{1} \otimes \bar{X}) &= \bar{m}(\bar{X} \otimes \bar{1}) = \bar{X} \\
\bar{\Delta}(\bar{1}) &= \bar{1} \otimes \bar{X} + \bar{X} \otimes \bar{1} & \bar{\Delta}(\bar{X}) &= \bar{X} \otimes \bar{X}
\end{aligned}$$

A et A^* sont donc isomorphes comme groupes abéliens gradués, et par cet isomorphisme μ les applications m et Δ correspondent aux applications \overline{m} et $\overline{\Delta}$. Prendre le dual de V_D renverse alors toutes les flèches, remplace $A^{\otimes k}\{-m\}$ par $(A^*)^{\otimes k}\{m\}$, m par $\overline{\Delta}$ et Δ par \overline{m} . Dans \overline{D} , les 1-résolutions correspondent aux 0-résolutions dans D . Donc, remplacer V_D par $V_{\overline{D}}$ correspond à renverser toutes les flèches, remplacer $A^{\otimes k}\{-m\}$ par $A^{\otimes k}\{m-n\}$, m par Δ et Δ par m . L'isomorphisme μ induit donc un isomorphisme entre les cubes $V_{\overline{D}}$ et $(V_D)^*\{-n\}$.

Corollaire 1 *Le complexe $C(\overline{D})$ est isomorphe au dual du complexe $C(D)$.*

Démonstration : le théorème donne un isomorphisme entre $\overline{C}(\overline{D})$ et $\overline{C}((V_D)^*\{-n\}) = (\overline{C}(D))^*[-n]\{-n\}$. On a donc un isomorphisme :

$$\begin{aligned}
(C(D))^* &= (\overline{C}(D))^*[-x(D)]\{-2x(D) + y(D)\} \\
&= (\overline{C}(D))^*[-n + y(D)]\{-n + 2y(D) - x(D)\} \\
&= \overline{C}(\overline{D})[y(D)]\{2y(D) - x(D)\} \\
&= \overline{C}(\overline{D})[x(\overline{D})]\{2x(\overline{D}) - y(\overline{D})\} \\
&= C(\overline{D})
\end{aligned}$$

Un théorème classique d'algèbre homologique donne alors le résultat suivant :

Corollaire 2 *Si $H^{i,j}(L) = \mathbb{Z}^{r^{i,j}} \oplus G^{i,j}$ avec $G^{i,j}$ le sous-groupe (fini) de torsion de $H^{i,j}(L)$, alors on a $H^{i,j}(\overline{L}) = \mathbb{Z}^{r^{-i,-j}} \oplus G^{1-i,-j}$.*

5.3 Application aux nombres de croisements

Soit D un diagramme.

Définition 2 *D est dit +adéquat si pour tout croisement $a \in \mathcal{I}$, $D(\{a\})$ a un cercle de moins que $D(\emptyset)$.*

Du point de vue du cube cela veut dire que toute application partant de $V(\emptyset)$ est de la forme une copie de m tensorisée avec des copies de l'identité. Considérons la 0-ème différentielle de \overline{C} , $d_0 : D(\emptyset) \rightarrow \bigoplus D(\{a\})$. Elle n'est pas injective ssi chaque flèche contient une copie de m , c'est à dire si le diagramme est +adéquat.

Comme $\overline{C}^i = 0$ si $i < 0$ on a :

Proposition 6 *D est +adéquat ssi $\overline{H}^0(D) \neq 0$.*

Définition 3 *D est dit -adéquat si pour tout croisement $a \in \mathcal{I}$, $D(\mathcal{I} - \{a\})$ a un cercle de moins que $D(\mathcal{I})$.*

Du point de vue de cube cela veut dire que toute flèche arrivant en $V(\mathcal{I})$ est de la forme une copie de Δ tensorisée avec des copies de l'identité. Considérons d_{n-1} : elle n'est pas surjective ssi chaque flèche contient une copie de Δ c'est à dire ssi le diagramme est $-$ adéquat.

Comme $\overline{C}^i = 0$ si $i > n$ on a :

Proposition 7 *D est $-$ adéquat ssi $\overline{H}^n(D) \neq 0$.*

Définition 4 *Soit L un nœud orienté. On appelle longueur homologique de L :*

$$hl(L) = \max\{i : H^i(L) \neq 0\} - \min\{i : H^i(L) \neq 0\}$$

On note $c(L)$ le nombre minimal de croisements dans un diagramme de L.

Remarque : la définition de la longueur homologique est la même si on prend les groupes de cohomologie de \overline{C} .

Proposition 8 *Pour un nœud L :*

$$c(L) \geq hl(L)$$

En effet considérons un diagramme de L minimal (avec un nombre minimal de croisements) : on a alors $\overline{H}^i(L) = 0$ si $i < 0$ ou si $i > n$. D'où le résultat.

Corollaire 3 *Un diagramme adéquat (+adéquat et -adéquat) de L est minimal.*

On a démontré que $\overline{H}^0(L) \neq 0$ et $\overline{H}^n(L) \neq 0$. Donc $n \geq c(L) \geq hl(L) \geq n$.

Corollaire 4 *Soit L un nœud. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

- $c(L) = hl(L)$.
- L admet un diagramme adéquat.
- tous les diagrammes minimaux de L sont adéquats.

Remarque : il suffit de calculer $2n+2$ résolutions pour vérifier l'adéquation (c'est une vérification rapide).

On vérifie facilement qu'un diagramme alterné réduit est adéquat.

Corollaire 5 *Si L admet un diagramme alterné réduit avec n croisements, alors L n'admet pas de diagramme avec moins de n croisements, et tous les diagrammes de L avec n croisements sont adéquats.*

5.4 Homologie sur \mathbb{Q}

Bar-Nathan a implementé un algorithme de calcul de l'homologie de Khovanov dans [2]. Dans cet article il donne le calcul de la quantité suivante pour les nœuds premiers jusqu'à 11 croisements :

$$Kh(L)(t, q) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} t^r \chi(H^r(L))$$

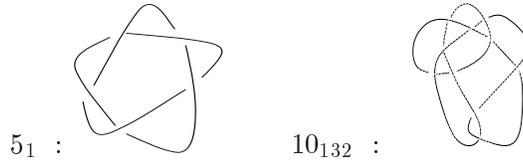
$Kh(L)$ est un nouvel invariant facilement calculable à l'ordinateur. Il décrit exactement l'homologie de Khovanov sur \mathbb{Q} c'est à dire les dimensions des $H^{i,j}(L)$. Pourtant il ne décrit l'homologie de Khovanov sur \mathbb{Z} que modulo la torsion.

En fait, pour chaque anneau k , on peut définir l'homologie de Khovanov sur k en remplaçant toujours $A = \mathbb{Z}[x]/(x^2)$ par $A = k[x]/(x^2)$, ce qui revient à tensoriser $C(L)$ avec k . Par les formules classiques d'algèbre homologique le calcul sur \mathbb{Z} et de certains Tor est suffisant pour décrire l'homologie sur les autres anneaux. D'où l'importance du calcul complet sur \mathbb{Z} . Dans le cas du trèfle il y a déjà de la torsion, ainsi $Kh(\infty)$ ne décrit pas $H(\infty)$. A chaque fois que les calculs ont été menés dans \mathbb{Z} , la torsion apparue a toujours été une 2-torsion, on peut se demander si c'est toujours le cas. (Il suffirait alors de faire les calculs dans \mathbb{Q} et \mathbb{F}_2 .) Personne n'a encore répondu à cette question.

De ces calculs (tous les nœuds jusqu'à 11 croisements), Bar-Nathan déduit plusieurs résultats, le premier d'entre eux :

Théorème 6 *$Kh(L)$ est strictement plus fort que le polynôme de Jones.*

En effet pour les deux nœuds suivants :



On trouve :

$$Kh(\text{5}_1) = q^{-5} + q^{-3} + \frac{1}{q^{15}t^5} + \frac{1}{q^{11}t^4} + \frac{1}{q^{11}t^3} + \frac{1}{q^7t^2}$$

$$Kh(\text{10}_{132}) = q^{-3} + q^{-1} + \frac{1}{q^{15}t^7} + \frac{1}{q^{11}t^6} + \frac{1}{q^{11}t^5} + \frac{1}{q^9t^4} + \frac{1}{q^7t^4} + \frac{1}{q^9t^3} + \frac{1}{q^5t^3} + \frac{2}{q^5t^2} + \frac{1}{qt}$$

Alors que la valeur en $t = -1$ est la même.

Enfin Bar-Natan, Garoufalidis, et Khovanov ont formulé deux conjectures sur le support des groupes de cohomologie dans [2] et [9]. Ces deux conjectures ont été démontrées par Eun Soo Lee dans les articles [3] et [4]. (La signature $\sigma(L) \in \mathbb{Z}$ d'un nœud est un invariant "classique" bien connu.)

Théorème 7 (Eun Soo Lee) *Soit L un nœud alterné. Alors :*

1. si $j \neq 2i + \sigma(L) \pm 1$ alors $H^{i,j}(L) = 0$
2. si $i \neq 0$ alors $H^{i,j}(L) = H^{i+1,j+4}(L)$

On peut regrouper ces deux propriétés sous la forme :

$$Kh(L)(t, q) = q^{\sigma(L)} \{(q^{-1} + q) + (q^{-1} + tq^3)Kh'(L)(tq^2)\}$$

où $Kh'(L)$ est un polynôme.

Or on a démontré que $Kh(-1, q) = (q + q^{-1})J(L)(q)$. Ainsi en reprenant l'expression du théorème en $(-1, it)$, on a :

$$J(it)(it + (it)^{-1}) = (it)^{\sigma(L)} \left\{ (it + (it)^{3/2})Kh'(t) \right\}.$$

En poursuivant le calcul on obtient donc une formule explicite :

$$Kh(t, q) = \frac{q^{\sigma(L)} (J(it^{1/2})(it^{1/2})^{-\sigma(L)}(q^2 t^{1/2} + q^{-2} t^{-1/2}) + t^{1/2} + t^{-1/2})}{qt^{1/2} + q^{-1} t^{-1/2}}$$

Corollaire 6 *Pour un nœud alterné, l'invariant $Kh(t, q)$ est déterminé par le polynôme de Jones et la signature du nœud et inversement.*

L'invariant de Khovanov reste plus fort : 10_{136} et 11_{92}^n ont la même signature et le même polynôme de Jones, mais n'ont pas le même polynôme $Kh(t, q)$

Quels nœuds satisfont ces deux principes ? Le calcul montre que c'est vrai pour la plupart des nœuds jusqu'à 10 croisements (12 exceptions sur environ 250 nœuds). De plus ces deux conjectures de nature différentes tombent pour les mêmes nœuds. Pourquoi ?

5.5 Généralisations et résultats ultérieurs

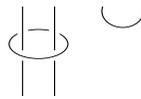
Dans ses articles suivants, Khovanov a essayé de généraliser sa construction.

1. Une première généralisation : l'homologie de Khovanov pour des tangles. Un (m, n) -tangle est une union disjointe d'entrelacs contenus dans $\mathbb{R}^2 \times]0, 1[$ et de $m + n$ courbes linéaires par morceaux non fermées telles que les extrémités sont les $2m + 2n$ points

$$\{1, 2, \dots, 2m\} \times \{0\} \times \{0\} \cup \{1, 2, \dots, 2n\} \times \{0\} \times \{1\}$$

La construction de Khovanov s'applique aux tangles en prenant la somme directe sur tous les entrelacs obtenus en réunissant les points de $\{1, 2, \dots, 2m\} \times \{0\} \times \{0\}$ (respectivement $\{1, 2, \dots, 2n\} \times \{0\} \times \{1\}$) deux par deux sans croisement.

Exemple : Au $(1,2)$ -tangle suivant :



on associe la somme directe des deux complexes relatifs aux entrelacs suivants :



2. Le but de Khovanov était de functorialiser le polynôme de Jones. Soit \mathcal{N} la catégorie suivante :
 - Les objets sont les entrelacs.
 - Les morphismes sont les surfaces orientées compactes de \mathbb{R}^4 ayant pour bord la source et le but du morphisme c'est à dire deux entrelacs.Il cherche à construire un foncteur de la catégorie \mathcal{N} dans Ab c'est à dire définir canoniquement les $C(L)$ par rapport aux morphismes. Jacobsson et Khovanov l'ont réussi dans un article ultérieur.
3. Khovanov a aussi fait le même type de catégorification pour d'autres invariants de nœuds.

Références

- [1] Bojko Bakalov and Alexander Kirillov Jr. *Lectures on tensor categories and modular functors*. American Mathematical Society, 2001.
- [2] D.Bar-Natan. On Khovanov's categorification of the Jones polynomial. *Algebraic and geometric topology*, 2 :337–370, 2002.
- [3] Eun Soo Lee. On Khovanov invariant for alternating links. preprint, 2002.
- [4] Eun Soo Lee. The support of the Khovanov's invariants for alternating knots. preprint, 2002.
- [5] W.B Raymond Lickorish. *An introduction to knot theory*. Springer, 2001.
- [6] M.Khovanov. A categorification of the Jones polynomial. *Duke Math. J.*, 101 :359–426, 2000.
- [7] M.Khovanov. A functor-valued invariant of tangles. *Algebraic and geometric topology*, 2 :665–741, 2002.
- [8] M.Khovanov. Patterns in knot cohomology I. preprint, 2002.
- [9] S.Garoufalidis. A conjecture on Khovanov's invariants. preprint, 2001.
- [10] Oleg Viro. Remarks on definition of Khovanov homology. preprint, 2002.