Mémoire de magistère

Juin 2003

Raphaël Côte

Sur les solutions de l'équation des ondes géométriques

Magistère de Mathématiques Fondamentales et Appliquées et d'Informatique

École normale supérieure

raphael.cote@ens.fr

Table des matières

Chapitre 1

Introduction au thème de recherche

Une partie des travaux de F. Merle porte sur l'étude qualitative des solutions de certaines EDP, notamment l'équation de Schrödinger, KdV, l'équation de la chaleur etc. Plus précisément, il s'agit d'étudier le comportement explosif de solutions dont la donnée initiale se trouve dans un voisinage d'une solution d'énergie minimale (le *ground state* ou état fondamental). On obtient alors des résultats spectaculaires : il y a effectivement explosion (en temps fini), et le profil à l'explosion est bien défini. Ces résultats ont été obtenus en particulier pour l'équation de Schrödinger nonlinéaire critique (NLS) et pour celle de Korteweg-de Vries (KdV).

1.1 L'exemple de l'équation de Schrödinger nonlinéaire

A titre d'exemple, et pour mieux appréhender le type de propriétés recherché dans le cadre des wave maps, voici une présentation succincte d'un théorème dans le cas de NLS critique, issue de [1]. Merci à Pierre Raphael qui a eu la gentillesse de relire cette introduction !

On considère les solutions $u : [0,T[\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ qui satisfont l'équation :

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = -|u|^{4/n}u \\ u(t=0) = u_0 \end{cases} \tag{NLS}$$

Toute étude d'une EDP d'évolution commence par un théorème d'existence locale, qui s'écrit dans le cas de (NLS) :

Théorème. – *Soit $u_0 \in H^1$. Il existe une unique solution maximale de (NLS) dans $\mathcal{C}([0,T^*[,H^1)$, et le temps de vie $T^* > 0$ ne dépend que de $\|u_0\|_{H^1}$.*

Cet énoncé est générique de ce que l'on attend d'un théorème d'existence locale : continuité en temps (ce qui donne un sens à la condition initiale), et pas de restriction sur la taille H^1 de la donnée, sauf en ce qui concerne le temps d'existence. T^* est une fonction décroissante de $\|u_0\|_{H^1}$.

Dans le cas de NLS, $H^1 = \{u \in L^2 | \nabla u \in L^2\}$ est de plus un espace dans lequel il est agréable de travailler, car il apparaît comme l'espace d'énergie. On dira qu'il y a explosion lorsque l'on ne peut plus appliquer le théorème d'existence locale, c'est-à-dire dans le cas de NLS si $\|\nabla u(t)\|_{L^2} \to \infty$ (comme on va le voir dans la suite $\|u\|_{L^2}$ est conservée).

Par ailleurs, NLS est une équation qui possède plusieurs symétries : c'est un système hamiltonien. Si u est solution de NLS alors :

– (Invariance espace-temps-phase) $u(t-t_0, x-x_0)e^{i\gamma_0}$ aussi, $t_0 \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^n, \gamma_0 \in \mathbb{R}$,

- (Invariance galliléenne) $u(t,x-\beta t)e^{i\frac{\beta}{2}(x-\frac{\beta}{2}t)}$ aussi, $\beta \in \mathbb{R}^n$,
- (Propriété d'échelle) $u_\lambda(t,x) = \lambda^{n/2}u(\lambda^2 t, \lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarquons que $\|u_\lambda\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}$: c'est de là que provient la notion d'exposant critique. En conséquence, (et d'après un théorème de Noether), toute solution conserve certaines quantités (quand elles sont définies) :

- (Masse) $\displaystyle\int |u(t,x)|^2 dx$,
- (Energie) $\displaystyle E(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u(t,x)|^2 - \frac{1}{2+4/n}\int |u(t,x)|^{2+4/n} = E_0$,
- (Moment) $\displaystyle Im \int \bar{u}\nabla u(t,x)$,
- (Identité du Viriel) $\displaystyle \frac{d^2}{dt^2}\int |x|^2|u(t,x)|^2 dx = 16E_0$

L'identité du Viriel prouve que toute solution d'énergie strictement négative telle que $u_0 \in \Sigma = H^1 \cap \{xu \in L^2\}$ explose en temps fini.

Par ailleurs, grâce á la propriété d'échelle et une application du théorème d'existence locale dans H^1, on en déduit déjà un minorant du taux d'explosion (pour les solutions explosives) : $|\nabla u(t)|_{L^2} \geq C(u_0)(T-t)^{-1/2}$.

Une solution très particulière joue un rôle très important : l'état fondamental Q. Il s'agit de l'unique fonction de H^1, strictement positive, tendant vers 0 à l'infini, solution de l'équation elliptique non-linéaire :

$$\Delta Q + Q|Q|^{4/n} = Q$$

(l'existence et l'unicité de cette solution est un théorème non trivial). Le ground state est relié à NLS par le fait que $u(t,x) = e^{it}Q(x)$ est une solution - stationnaire - de NLS (onde solitaire). Remarquons qu'alors $Q_\gamma(x) = \gamma^{n/4}Q(\gamma^{1/2}x)$ est aussi associé à une solution stationnaire, à savoir $u_\gamma(t,x) = e^{i\gamma t}Q_\gamma(x)$. Décrivons un peu les propriétés de Q : c'est une fonction à symétrie radiale, C^∞ et à décroissance exponentielle, d'énergie $E(Q) = 0$. En fait, Q réalise le minimum dans l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg :

$$\forall v \in H^1, \quad \frac{1}{2+4/n}\int |v|^{2+4/n} \leq \frac{1}{2}\int |\nabla v|^2 \left(\frac{\int |v|^2}{\int Q^2}\right)^{2/n}$$

Ceci implique en particulier que si $\|u_0\|_{L^2} < \|Q\|_{L^2}$, la conservation de l'énergie entraîne un contrôle de $\|\nabla u(t)\|_{L^2} \leq C(u_0)$, et la solution est globale en temps.

Mais dans un voisinage de Q, on a le résultat précis pour les solutions d'énergie négative :

Théorème. [F. Merle, P. Raphael, 2001] – *Il existe $\alpha > 0$ tel que ce qui suit soit vérifié. Soit $u_0 \in H^1$ tel que :*

$$\int Q^2 < \int |u_0|^2 \leq \int Q^2 + \alpha \quad et \quad E(u_0) \leq \frac{1}{2}\left(Im\frac{\int \overline{u_0}\nabla u_0}{\|u_0\|_{L^2}}\right)^2$$

Alors la solution u associée explose en temps fini T et il existe des paramètres $\lambda_0(t) = \frac{\|\nabla Q\|_{L^2}}{\|\nabla u(t)\|_{L^2}}$, $x_0(t)$ et $\gamma_0(t)$ tels que :

$$e^{i\gamma_0(t)}\lambda_0(t)^{n/2}u(t,\lambda_0(t)x + x_0(t)) \longrightarrow Q \text{ dans } \dot{H}^1 \text{ quand } t \uparrow T$$

De plus pour $n = 1$, on a l'estimée suivante :

$$\|u(t)\|_{H^1} \leq C\sqrt{\frac{\log|\log|T-t||}{|T-t|}}$$

Remarque : Cf [1] pour plus de détails.

Terminons par quelques remarques sur ce théorème. Tout d'abord, il entraîne que pour des données initiales dans un voisinage pointé de Q (parmi les donnés d'énergie nulle), on a explosion, ce qui est en soit même un résultat non trivial. D'autre part, il montre l'existence d'un profil à l'explosion, à savoir Q (aux symétries du problème près). Enfin, résultat tout à fait remarquable, l'estimation du taux d'explosion rejoint les prédictions numériques.

1.2 Le problème des ondes géométriques

1.2.1 EDP vérifiée par une Onde Géométrique

Mon thème de recherche est d'essayer de voir ce qu'il en est pour le problème des ondes géométriques (*wave map* en anglais).

Les ondes géométriques ne sont pas réellement issues d'un problème physique. Du point de vue des physiciens (qui les appellent des σ-modèles), ce sont des modèles simplifiés pour les structures étendues en théorie des champs ; les mathématiciens les voient plutôt comme une situation géométrique simple pour l'étude de l'existence globale et la formation de singularités.

Une onde géométrique est une fonction U de l'espace-temps de Minkowski $(\mathbb{R}^{1+n}, \eta)$ $(\eta = diag(-1, 1, \dots, 1))$ à valeur dans une variété riemannienne (N, g), qui est un point critique de l'action :

$$S(U) = \int g_{ab} \partial_\alpha U^a \partial_\beta U^b \eta^{\alpha\beta} d^n x dt \qquad (*)$$

(Il s'agit juste du Lagrangien standard $\langle \partial_\alpha U, \partial^\alpha U \rangle_g$ intégré en temps et en espace, où $\partial^\alpha = \eta^{\alpha\beta}\partial_\beta$). C'est la définition variationnelle d'une onde géométrique. À cette définition est associée un système d'EDP dans les coordonnées locales :

$$\partial^\alpha \partial_\alpha U^a + \Gamma^a_{bc}(U) \partial_\alpha U^b \partial^\alpha U^c = 0 \qquad (**)$$

où les Γ^a_{bc} sont les symboles de Christoffel associés à la variété N (le deuxième terme représente la seconde forme fondamentale).

Pour comprendre ce que $(*)$ signifie, plaçons nous dans le cas où $N = \mathbb{R}$, et $g = 1$. On a alors :

$$S_{\mathbb{R}}(U) = \int_t \int_x \left(-|U_t|^2 + |\nabla U|^2 \right) dx dt$$

Dire que U est un point critique signifie exactement que pour toute fonction test $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$0 = dS_{\mathbb{R}}(U).\phi = 2 \int_t \int_x \left(-U_t \phi_t + \nabla U . \nabla \phi \right) dx dt$$

On intègre par partie en t le premier terme, et en x le second :

$$0 = \int_t \int_x \left(U_{tt} - \Delta U \right) \phi dx dt$$

On retrouve donc, au sens $\mathcal{D}'$ (en fait H^1 suffit pour avoir le droit de faire les intégrations par parties), l'équation des ondes libre :

$$U_{tt} - \Delta U = 0$$

L'équation $(**)$ est obtenue de manière similaire : on trouvera dans l'introduction du chapitre 4 une manière détaillée de l'obtenir, et l'expression dans le cas de la sphère $N = \mathbb{S}^2$.

En fait, $(**)$ peut se comprendre d'une manière plus géométrique. Supposons par exemple que $N \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ et qu'elle possède un voisinage tubulaire (d'épaisseur uniforme δ) V_δ et d'une projection $\pi : V \to N$ (c'est le cas si N est compacte). Alors, pour tout $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{1+n}, \mathbb{R}^m)$, en posant $\epsilon < \delta/\|\phi\|_\infty$, $U_\epsilon = \pi_N(U + \epsilon\phi)$ est bien définie, de $\mathbb{R}^{1+n} \to N$. U est critique pour $\int S$, ce qui nous donne :

$$0 = \left(\frac{d}{d\epsilon}\int S(U_\epsilon)\right)\Bigg|_{\epsilon=0} = \int_{\mathbb{R}^{1+n}} \langle \partial_\alpha d\pi_N(U).\phi | \partial^\alpha U\rangle_g dx^n dt$$

On en déduit après intégration par partie que $\langle d\pi_N(U).\phi|\Box u\rangle_g = 0$. Mais $d\pi_N(U)$ est une projection pour tout U, et est donc auto-adjointe, soit :

$$\langle \phi \mid d\pi_N(U).\Box U\rangle_g \;=\; 0.$$

Ceci étant valable pour tout $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{1+n}, \mathbb{R}^m)$, on obtient finalement $d\pi_N(U).\Box U = 0$. Ainsi, une onde géométrique U vérifie :

$$\Box U \perp T_U N$$

C'est ce qu'on appelle l'équation extrinsèque satisfaite par une onde géométrique.

1.2.2 Onde Géométrique équivariante

Cependant il est difficile d'étudier les ondes géométriques dans toute leur généralité. À titre d'exemple, on ne dispose pas encore d'un théorème d'existence locale dans l'espace d'énergie ($H^{n/2}$) pour des ondes géométriques quelconques.

Il apparaît que le cas $n = 2$ est particulièment important, et on demande souvent aux ondes géométriques d'avoir une certaine symétrie (radiale par exemple).

L'équation étudiée dans les chapitre 4 et 5 est une forme très particulière d'onde géométrique. Tout d'abord on demande que N soit la variété $[0, C[\times_{\sin}\mathbb{S}^1$: c'est-à-dire que N est la boule ouverte de rayon C (dans $\mathbb{R}^2$), et qu'en utilisant les coordonnées

$$\text{Pour } x \in N \quad r = |x|, \quad \xi = x/|x|,$$

sa métrique s'écrive :

$$ds^2 = dr^2 + \sin^2(r)d\xi^2.$$

On demande de plus que U ne soit pas quelconque, mais de la forme :

$$U^j(t,x) = \frac{x^j}{r}u(t,r) \quad (j = 1, 2)$$

où les x^j sont les coordonnées cartésiennes d'espace de l'espace de départ $\mathbb{R}^2$, et donc u représente la norme de U. On dit que U est équivariante corotationnelle.

On obtient alors une EDP sur u, qui s'écrit :

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r - \dfrac{\sin 2u}{2r^2} \\ u|_{t=0} = u_0 \\ u_t|_{t=0} = u_1 \end{cases} \tag{1.1}$$

Remarquons que la notion de onde géométrique équivariante ne peut être définie dans le cas général que si N est à symétrie sphérique.

Une onde géométrique minimise par définition l'action définie par le Lagrangien standard : il est donc normal de trouver le D'Alembertien (radial, en dimension 2), et on a affaire à une équation d'onde semi-linéaire. L'équation (1.1) écrite ci-dessus renferme toutes ces conditions : désormais on ne s'intéressera qu'à (1.1), et non à la manière dont elle a été obtenue.

1.2.3 Quelques propriétés

Par construction de l'onde géométrique comme extremum d'une certaine action, on obtient la conservation d'une énergie, à savoir :

$$E(u) = \int \left(|u_t|^2 + |u_r|^2 + \frac{\sin^2 u}{r^2} \right) r dr$$

On a aussi une propriété d'échelle :

$$u(t,r) \text{ onde géométrique } \iff u_\lambda(t,r) = u(\lambda t, \lambda r) \text{ onde géométrique}$$

De plus comme il s'agit d'une équation d'onde, on aura aussi la propagation à vitesse finie de l'énergie (dans notre cas, la vitesse est 1). Notons :

$$E(u,R) = \int_0^R \left(|u_t|^2 + |u_r|^2 + \frac{\sin^2 u}{r^2} \right) r dr$$

Cela s'écrit alors (par exemple) :

$$E(u(t),R) \leq E(u(t+\tau), R + |\tau|)$$

où $E(u(t),R)$ désigne l'énergie au temps t, entre $r = 0$ et $r = R$. Une conséquence explicite s'écrit :

$$\text{Si } Supp(u_0) \cup Supp(u_1) \subset [a,b], \text{ alors } Supp(u(t)) \subset [a-t, b+t] \cap \mathbb{R}^+.$$

(C'est cette propriété que l'on sous-entend en général quand on parle de propagation à vitesse finie).

Enfin, lorsque l'on s'intéresse à l'équation des ondes semi-linéaire, un des outils fondamentaux est l'inégalité de Strichartz. Il s'agit d'une estimée linéaire entre une fonction v et son D'Alembertien $\Box v$. Cette estimée est notamment au coeur des théorèmes d'existence locale. Voici une version relativement simple de l'inégalité de Strichartz : si $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, on a

$$\|v\|_{L^q([0,T],L^p(\mathbb{R}^n))} \leq C(n,p,q,r) \left(\|v(t=0,\cdot)\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|\Box v\|_{L^1([0,T],L^2(\mathbb{R}^n))} \right)$$

où les indices r et q vérifient : $r \geq 2^* = 2n/(n-2)$ et la condition dite de “gap” $1/q + n/r = n/2 - 1$. Remarquons que C ne dépend pas de T). Dans le cas des ondes géométriques équivariantes, ce n'est pas tout à fait cette estimée que l'on utilise, mais une généralisation dans des espaces de Besov homogènes.

Ces faits permettent d'obtenir des résultats précieux :

- Décroissance de l'énergie sur les cônes et évanescence du flux : en notant $v(\ell) = u(-\ell,\ell)$, pour $T \leq T' \leq 0$, on a

$$E(u(T),T) - E(u(T'),T') = \int_{T'}^{|T|} \left(v'^2 + \frac{\sin^2 v}{\ell^2} \right) \ell d\ell \ = \ \mathrm{Flux}(u,T',T) \geq 0$$

  et $\mathrm{Flux}(u,0,T) \to 0$ quand $T \to 0$,

- Théorème d'existence locale dans l'espace d'énergie H^1 et non dans H^2 que donne la théorie standard des équations des ondes semi-linéaires (c'est un résultat de Shatah et Tahvildar-Zadeh),
- Condition d'explosion (issue de la démonstration du théorème d'existence locale) : il existe une constante $\varepsilon_0 > 0$ telle que :

$$\text{Si } u \text{ explose en } T, \text{ alors } \liminf_{t \uparrow T} E(u(t), T-t) \geq \varepsilon_0$$

(ε_0 ne dépend pas de l'onde géométrique u considérée). Cette condition d'explosion est donc en fait une condition de concentration de l'énergie en 0. Elle a un avantage tout à fait significatif sur une condition du type "$\|u\|_H \to \infty$" : sa signification "physique" la rend beaucoup plus maniable.
- Évanescence de l'énergie dans les cônes "extérieurs" (c'est un résultat profond dû à Shatah et Chritodoulou [2]) : pour $\lambda \in]0,1[$ fixé,

$$E^\lambda_{\text{ext}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\lambda|t|}^{|t|} \left(\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} u_r^2 + \frac{\sin^2 u}{r^2} \right) r dr \xrightarrow{t \to 0} 0$$

Rappelons encore une fois que le théorème d'existence locale (ainsi que la condition d'explosion qui en découle) n'est ici valable que pour les ondes géométriques équivariantes et les ondes géométriques radiales.

Enfin, pour simplifier les notations, on supposera souvent qu'une wave map u explose en $T = 0$, et en conséquence, les données initiales correspondront à un $t < 0$ (souvent se sera $t = -1$) : ceci est justifié par l'invariance en temps de l'équation.

Il s'avère que la dimension 2 (au départ) est critique pour les ondes géométriques, à trois égards. L'espace d'énergie H^1 s'injecte presque dans L^∞, mais pas tout à fait (exposant critique de l'injection de Sobolev) : ainsi la contrainte de rester dans N (si N est bornée), ou (si N n'est pas bornée) la métrique introduite impose aussi le fait d'être L^∞ (cf chapitre 4).

D'autre part, il n'existe pas de solution autosimilaire d'énergie finie, ce qui est le cas en dimension supérieure (pour $\mathbb{R}^{1+3}$ par exemple). Une solution autosimilaire est de la forme $u(t,r) = v(r/t)$. Si on se donne une condition initiale régulière compatible à $t = -1$, on obtient alors naturellement une solution explosant à $t = 0$. Cela permet de conclure alors facilement qu'il n'y a pas d'existence globale, même à données initiales très régulières. A contrario, dans notre cas des ondes géométriques à symétries dans $\mathbb{R}^{1+2}$, on ne connaît pas d'exemple de données initiales régulières qui induisent une explosion en temps fini : il existe des solutions auto-similaires, mais elles sont d'énergie infinie (cf chapitre 4 pour plus de détails).

Enfin l'énergie est conservée par changement d'échelle (i.e. $E(u_\lambda) = E(u)$), et on peut espérer obtenir une théorie à données petites. En effet, si on avait $E(u_\lambda) = \lambda^\alpha E(u)$ (avec $\alpha \neq 0$), quitte à changer d'échelle, on aurait pu supposer u d'énergie aussi petite que l'on veut : ainsi l'hyptohèse de données grandes ou petites n'aurait rien apporté au problème. Par contre, dans notre cas, supposer les données d'énergie petite apporte effectivement quelque chose : on espère obtenir un résultat d'existence globale (c'est-à-dire $T = \infty$ dans le théorème d'exitence locale).

Le problème est délicat, plusieurs auteurs y ont contribué (notamment M. Struwe, J. Shatah, T. Tao). Un résultat assez général à été obtenu par T. Tao, qui a montré l'existence globale de solutions à données initiales d'énergie petites, pour des ondes géométriques (sans symétries) à valeur dans la sphère de dimension quelconque.

1.2.4 Le problème de l'explosion

Venons en au problème précis qui fera l'objet de la thèse. On connaît une solution (au changement d'échelle et différentes invariances près) stationnaire de (1.1) :

$$Q(r) = 2\arctan(r)$$

Cette onde géométrique réalise le minimum de l'énergie parmi les fonctions qui s'annulent en 0 en tendent vers π en $+\infty$. L'idée est d'étudier ce qui se passe pour des ondes géométriques u vérifiant :

$$E(Q) < E(u) \leq E(Q) + \alpha$$

(et bien sûr, $u(t, 0) = 0$, $u(t, r) \to \pi$ quand $r \to \infty$) : remarquons que ces conditions sont préservées au cours du temps sous la condition de non-concentration de l'énergie).

Avant de s'intéresser au caractère d'évolution d'une onde géométrique, il faut obtenir quelques résultats "statiques".

On étudie tout d'abord la Hessienne d_Q^2E de l'énergie E au point Q (cf chapitre 4). La propriété d'échelle entraîne qu'il existe un noyau non restreint à 0 : on s'aperçoit qu'il est en fait égal à $rQ_r\mathbb{R}$. Le problème est alors de savoir si l'énergie est coercive dans un hyperplan supplémentaire au noyau (et pour quelle norme). Il s'avère que c'est le cas, dans l'espace de Hardy de dim 2 :

$$H = H^1 \cap \{u/r \in L^2(rdr)\}$$

(qui est en fait l'espace vectoriel "tangent" au point Q pour les u d'énergie finie au sens où si u est d'énergie suffisamment proche de Q, $u(0) = 0$, $u \to \pi$ en $+\infty$, alors $u - Q \in H$).

Un autre résultat est l'existence d'une décomposition pour u :

$$u = Q_\lambda + \varepsilon$$

ε est ici d'énergie petite, et λ représente le changement d'échelle nécessaire pour que u ait le "profil" Q. Ensuite, quitte à changer un peu le paramètre d'échelle, on peut supposer que la décomposition vérifie en plus une contrainte sur ε (souvent ces contraintes sont des conditions d'orthogonalités, mais dans notre cas, il s'agit d'une contrainte non-linéaire : cf. chapitre 5) : l'intérêt d'imposer cette contrainte et de s'assurer que l'on reste toujours éloigné du noyau de d_Q^2E.

Une conséquence est un premier renforcement de la condition d'explosion : comme l'énergie de ε est petite, si u explose, $\lambda \to \infty$, mais alors toute l'énergie de Q est concentrée, et n'est compensée au plus que par celle de ε.

Dans le chapitre 5, on étudie 2 conséquences de ces décompositions sur des ondes géométriques que l'on suppose être explosives :

- À quelle vitesse $\lambda \to \infty$. A priori, la vitesse finie de propagation donne que pour une onde géométrique explosant en $T = 0$, on a :

  $$\lambda(t)|t| \geq 1$$

  (c'est le taux auto-similaire). On cherche à montrer qu'en fait, $\lambda(t)|t| \to \infty$.
- Quelle est l'énergie minimale concentrée lors de l'explosion. On a vu qu'elle doit être supérieure à quelque chose de la forme $\left((\sqrt{E(Q)} - \sqrt{E(\varepsilon)}\right)^2$. En fait, on aimerait obtenir la concentration d'une énergie supérieure à $E(Q)$.

Il reste de nombreux points à éclairer. Notamment, il faut enlever une hypothèse technique pour compléter les résultats du chapitre 5, et deux "vrais" problèmes : déterminer s'il y a ou non explosion (en temps fini ou non), et dans le cas explosif, essayer de dégager un profil à l'explosion (lié à Q) - c'est là que réside la dynamique du problème.

Références

[1] F. Merle & P. Raphael : *On Blow-up for profile for the critical nonlinear Schrödinger equation*, Preprint, 2001.

[2] J. Shatah & M. Struwe : *Geometric Wave equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics 2, 1998.

[3] J. Shatah & A. Tavildar-Zadeh : *On the Cauchy Problem for equivariant wave maps*, Communications on Pure and Applied Maths, 47 (p. 719-753), 1994.

[4] J. Ginibre & G. Velo : *Generalized Strichartz Inequalities for the Wave Equation*, J. of Func. Anal., 133 (p. 50-68), 1995.

[5] T. Tao : *Global regularity of wave map II. Small energy in two dimension*, Comm. Math. Phys., 224 (p. 443-544), 2001.

[6] P. Bizón, T. Chmaj & Z. Tabor : *Formation of singularitites for equivariant (2+1)-dimensional wave maps into the 2-sphere*, Nonlinearity, 14 (p. 1041-1053), 2001.

Chapitre 2

Propriétés qualitatives des ondes géométriques critiques á l'explosion

Début de thèse[1]

Introduction

Le but de cette note est de présenter quelques résultats concernant la vitesse d'explosion et l'énergie concentrée à l'explosion d'une onde géométrique (explosive) d'énergie proche de de celle de Q (solution stationnaire).

En particulier, on exhibe un paramètre qui détermine s'il y a ou non explosion, et la vitesse à la laquelle se concentre l'explosion.

Sous une condition de continuité du flot pour la topologie H^1-faible, on montre que ce taux à l'explosion est plus grand que le taux autosimilaire (issu de la propriété d'échelle), et on en déduit en corollaire que l'énergie concentrée à l'explosion est supérieure à l'énergie totale de Q.

2.1 Décomposition d'une onde géométrique et premiers résultats

2.1.1 Calculs préliminaires sur l'énergie

Soit $u : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_r^+ \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{rr} + \dfrac{1}{r} u_r - \dfrac{\sin 2u}{2r^2} \\ (u, u_t)|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

On a la conservation de l'énergie :

$$E(u(t)) \stackrel{def}{=} \int_0^\infty \left(u_t^2 + u_r^2 + \frac{\sin^2 u}{r^2} \right) r dr = E(u_0)$$

Ce qui nous amène à la :

Définition 2.1. – On note $E_a^b(u) = \displaystyle\int_a^b \left(u_t^2 + u_r^2 + \frac{sin^2 u}{r^2} \right) r dr$, et $E(u,t) = E_0^{|t|}(u)$.

[1] Sous la direction de F. Merle (2002-2003)

On s'intéresse ici à la quantité $F(t) = E(u(t), b(t))$ où b est une certaine fonction régulière :

Lemme 2.1.

$$\frac{d}{dt}F(t) = \left[b\left(b_t\left(u_t^2+u_r^2\right)+2u_tu_r\right)+b_t\frac{\sin^2 u}{b}\right](t, b(t))$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F(t) &= \frac{d}{dt}\int_0^{b(t)}\left(u_t^2+u_r^2+\frac{\sin^2 u}{r^2}\right)rdr \\
&= b_t(t)b(t)\left(u_t^2(t,b(t))+u_r^2(t,b(t))+\frac{\sin^2 u(t,b(t))}{b(t)^2}\right) \\
&\quad +2\int_0^{b(t)}\left(u_{tt}u_t+u_{rt}u_r+\frac{\sin 2u}{2r^2}u_t\right)rdr \\
&= b_t(t)b(t)\left(u_t^2(t,b(t))+u_r^2(t,b(t))+\frac{\sin^2 u(t,b(t))}{b(t)^2}\right) \\
&\quad +2\int_0^{b(t)}\left(\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r-\cancel{\frac{\sin 2u}{2r^2}}\right)u_t+u_{rt}u_r+\cancel{\frac{\sin 2u}{2r^2}}u_t\right)rdr \\
&= b_t(t)b(t)\left(u_t^2(t,b(t))+u_r^2(t,b(t))+\frac{\sin^2 u(t,b(t))}{b(t)^2}\right) \\
&\quad +2\left[u_ru_tr\right]_0^{b(t)} \\
&= b(t)\left(b_t(t)\left(u_t^2(t,b(t))+u_r^2(t,b(t))\right)+2u_t(t,b(t))u_r(t,b(t))\right) \\
&\quad +b_t(t)\frac{\sin^2 u(t,b(t))}{b(t)}
\end{aligned}$$

□

Corollaire 2.1. *1. Si $\lambda \leq 1$, $E(u(t), R+\lambda t)$ est décroissante en t. En partuclier, $E(u(t), R+\lambda t)$ admet une limite quand $t \to 0$. D'autre part, on a la propagation à vitesse finie de l'énergie ($R \geq 0$, $|\tau| \leq |t|$) :*

$$E(u(t), R) \leq E(u(t+\tau), R+|\tau|)$$

2. Si $b(t)$ est tel que $F(t) = cste$, on a : $b_t \in [-1, 1]$. En particulier, $b(t)$ admet une limite en 0.

Preuve :

1. On pose $b(t) = R + \lambda t$.
2. On veut $\frac{d}{dt}F(t) = 0$. Tous les termes ne peuvent être de même signe, d'où la contrainte.

□

2.1.2 Première décomposition

Lemme 2.2. *Il existe $\alpha_0 > 0$ tel que ce qui suit soit vérifié. Pour tout $\alpha < \alpha_0$, si u est tel que $E(Q) \leq E(u) \leq E(Q)+\alpha$, $u(0) = 0$, et $u \to \pi$ en $+\infty$, alors u admet la décomposition :*

$$u - Q_\lambda = \varepsilon$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\|\varepsilon\|_H \leq \delta(\alpha)$ avec $\delta(\alpha) \to 0$ quand $\alpha \to 0$.

Preuve : Soit u_n tel que $E(Q) \leq E(u_n) \leq E(Q) + \frac{1}{n}$, $u_n = 0$, $u \to \pi$ en $+\infty$. On construit :

$$v_n(r) = u_n\left(\frac{r}{\lambda_n}\right), \quad \text{où } \lambda_n \text{ est tel que } v_n(1) = \frac{\pi}{2}$$

C'est possible car u_n est continu.

On a : $E(v_n) = E(u_n)$. En particulier, ∇v_n est bornée dans $L^2(rdr)$, donc converge faiblement pour une sous-suite vers w.De même, pour tout n, $\|v_n\|_{\mathcal{C}^0} \leq C(E(Q)+1) = C(5) = C$, donc v_n est uniformément bornée. Soit K un compact de $]0;+\infty[$. On a pour tout $x < y \in K$:

$$\begin{aligned}
\forall n, |v_n(x) - v_n(y)| &\leq \int_x^y |\partial_r v_n(r)| dr \\
&\leq \left(\int_x^y |\partial_r v_n(r)|^2 r dr\right)^{1/2} \left(\int_x^y \frac{dr}{r}\right)^{1/2} \\
&\leq \sqrt{\frac{5}{x}}\sqrt{|x-y|}
\end{aligned}$$

Puisque $\inf K > 0$, v_n est donc équicontinue sur K, ponctuellement bornée, donc d'après le théorème d'Ascoli, d'adhérence compacte dans $\mathcal{C}^0(K)$.

On pose $K_m = [1/m; m]$, pour $m \geq 2$ entier. On suppose que l'on a construit des extractions $\phi_1, \dots \phi_m$ telles que $v_{\phi_1 \circ \dots \circ \phi_m(n)} \to w_m$ dans $\mathcal{C}^0(K_m)$. On dispose alors d'une extraction ϕ_{m+1} et de $w' \in \mathcal{C}^0(K_{m+1})$ telles que $v_{\phi_1 \circ \dots \circ \phi_m \circ \phi_{m+1}(n)} \to w_{m+1}$ dans $\mathcal{C}^0(K_m)$. Par séparation de $\mathcal{C}^0(K_m)$, on a $w_{m+1}|_{K_m} = w_m$. On pose finalement $\psi(m) = \phi_1 \circ \dots \circ \phi_m(m)$, et pour $r > 0$, $v(r) = w_m(r)$ si $r \in K_m$ (c'est possible d'après la remarque précédente). Le procédé de diagonalisation nous assure alors que :

$$\forall m, v_{\psi(n)} \to v|_{K_m} \text{ dans } \mathcal{C}^0(K_m)$$

En particulier, v est continue sur $]0;+\infty[$, $v(1) = \pi/2$. De plus $v_{\psi(n)} \to v$ *pp* et dans $\mathcal{D}'(]0;+\infty[)$. Cela implique que $\nabla v = w$. Étudions un peu v. Par Fatou, on a :

$$\int \frac{\sin^2 v}{r} dr \leq \liminf \int \frac{\sin^2 v_n}{r} dr$$

De même, par limite faible, $\|v\|_{\dot{H}^1} \leq \liminf \|v_n\|_{\dot{H}^1}$, donc :

$$E(v) \leq \liminf E(v_n) \leq E(Q)$$

$E(v) < \infty$ donc v admet des limites en 0 et en $+\infty$, qui annulent sin. L'estimation ponctuelle d'énergie :

$$2|\cos(w(x)) - \cos(w(y))| \leq E_x^y(w)$$

donne que pour les v_n, $\limsup_n v_n(r) = \pi$, $\liminf_n v_n(r) = 0$, et ce pour tout $r > 0$. Ainsi (par convergence *pp*), $v(r) \in [0;\pi]$. Prouvons maintenant que :

$$\forall r \geq 1, v(r) \geq \frac{\pi}{2}, \text{ et } \forall r \leq 1, v(r) \leq \frac{\pi}{2}$$

On démontre une seule de ces inégalités, l'autre se déduisant de la même manière. Soit donc $r < 1$ tel que $v(r) > \pi/2$, on note $2\varepsilon = -\cos(v(r)) > 0$. On a convergence uniforme sur tout compact, donc il existe N tel que pour $n \geq N$, $v_n(r) \geq \pi/2 + \varepsilon$. On choisit finalement n tel que $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$. Alors :

$$\begin{aligned}
E(Q) + \frac{1}{n} \geq E(v_n) &= E_0^r(v_n) + E_r^1(v_n) + E_1^{+\infty}(v_n) \\
&\geq 2\left(|\cos(v_n(r)) - 1| + |\cos(v_n(r))| + 1\right) \\
&\geq 2 \cdot (2 + 2|\cos(v_n(r))|) \qquad \text{car } \cos(v_n(r)) < 0 \\
&\geq 4 + 4\varepsilon \quad = E(Q) + 4\varepsilon
\end{aligned}$$

Ce qui est absurde. Ainsi, $v(0) = 0$ et $v \to \pi$ en $+\infty$. Puisque $E(v) \leq E(Q)$, la caractérisation de Q donne que $E(v) = E(Q)$ et qu'il existe λ tel que $v = Q_\lambda$. Maintenant, $v(1) = \pi/2 = Q(1)$ donc $\lambda = 1$, $v = Q$.

Essayons à présent d'évaluer $E(v_n - Q)$. On a : $E(v_n) \to E(Q)$, ce qui implique l'égalité dans Fatou et dans les normes pour le passage à la limite faible dans $\dot{H}^1$.

En particulier, $v_n \to Q$ dans $\dot{H}^1$-fort. Pour la partie non-linéaire :

$$\begin{aligned}
\sin^2(v_n - Q) &= (\sin v_n \cos Q - \sin Q \cos v_n)^2 \\
&= \sin^2 v_n (1 - \sin^2 Q) + \sin^2 Q (1 - \sin^2 v_n) \\
&\quad -2 \sin Q \sin v_n \cos v_n \cos Q \\
&= \sin^2 v_n + \sin^2 Q - 2 \sin^2 v_n \sin^2 Q \\
&\quad -2 \sin Q \sin v_n \cos v_n \cos Q
\end{aligned}$$

On intègre dans $L^1(dr/r)$. Le premier terme vérifie l'égalité dans Fatou, donc :

$$\int \frac{\sin^2 v_n}{r} dr \to \int \frac{\sin^2 Q}{r} dr$$

Le deuxième terme ne pose pas de problème. Le troisième terme est dominé par $\sin^2 Q \in L^1(dr/r)$, donc vu la convergence ponctuelle, tend vers $\int \frac{\sin^4 Q}{r} dr$ grâce au théorème de convergence dominée. Enfin $\sin Q(r) = \frac{r}{1+r^2}$ donc $\sin Q \in L^1(dr/r)$, ce qui assure la convergence du quatrième terme dans $L^1(dr/r)$. En remontant les calculs précédents, on a donc :

$$\int \frac{\sin^2(v_n - Q)}{r} dr \to \int \frac{\sin^2(Q - Q)}{r} dr = 0$$

Ainsi, $E(v_n - Q) \to 0$ quand $n \to \infty$. Vu l'estimée d'énergie ponctuelle, cela implique en particulier que $v_n \to Q$ uniformément sur $\mathbb{R}^+$ tout entier. Mais si $E(v_n - Q) \leq 4$, vu que $v_n(0) - Q(0) = 0$ et $v_n - Q \to 0$ en ∞, par l'estimée ponctuelle, $|v_n| \leq \pi/2$. Mais alors, $|\sin v_n| \geq 2/\pi |v_n|$, et donc :

$$\|v_n - Q\|_H^2 \leq C E(v_n - Q) \to 0 \text{ quand } n \to \infty$$

□

Ainsi, si $E(u_0) \leq E(Q) + \alpha$, on peut faire cette décomposition pour tout temps t. On notera $\lambda_0(t)$ le changement d'échelle :

$$u(t,r) = Q_{\lambda_0(t)}(r) + \varepsilon(t, \lambda_0(t) r)$$

Lemme 2.3. *On a l'inégalité :*

$$\sqrt{E_a^b(u+v)} \leq \sqrt{E_a^b(u)} + \sqrt{E_a^b(v)}$$

Preuve : Notons tout d'abord que $|\sin(u+v)| = |\sin u \cos v + \cos u \sin v| \leq |\sin u| + |\sin v|$. On en déduit :

$$\begin{aligned} E_a^b(u+v) &\leq \int_a^b \left((u_t+v_t)^2 + (u_r+v_r)^2 + \frac{(|\sin u| + |\sin v|)^2}{r^2} \right) r dr \\ &\leq E_a^b(u) + E_a^b(v) + 2\int_a^b \left(u_t v_t + u_r v_r + \frac{|\sin u \sin v|}{r^2} \right) r dr \\ &\leq E_a^b(u) + E_a^b v) + 2\sqrt{E_a^b(u) E_a^b(v)} \text{ par Cauchy-Schwarz} \end{aligned}$$

Ce qui est exactement le résultat annoncé. □

Proposition 2.1. *Critère d'explosion : il existe une constante unviserselle $\varepsilon_0 > 0$ telle que :*

$$u \text{ explose au temps } T \iff E_0^{T-t}(u(t)) = E(u(t), T-t) \geq \varepsilon_0 \text{ pour } t < T$$

Remarquons que la fonction $t \mapsto E(u(t), T-t)$ est décroissante. Il existe donc une limite $E_T(u)$: on dira que u concentre l'énergie $E_T(u)$.

On supposera dans toute la suite que α est choisit de sorte que :

$$\alpha \leq \min\{\alpha_0, 1\} \quad \text{et} \quad \delta(\alpha) < \min\{\varepsilon_0, 1/4\}$$

Lemme 2.4. *Soit u une onde géométrique explosant en 0, telle que $E(u) \leq E(Q) + \alpha$. Alors u concentre au moins $E(Q) - 4\sqrt{\delta(\alpha)}$. En particulier :*

$$0 \leq \frac{1}{\lambda_u(t)|t|} \leq 1$$

Preuve : On considère la décomposition : $u(t) = Q_{\lambda(t)} + \varepsilon(t)$. On a évidemment :

$$E(\varepsilon(t)) \leq \delta(\alpha) < \varepsilon_0$$

Supposons que $\liminf_{t \uparrow 0} \lambda(t)|t| < \infty$. Alors il existe une suite (t_n) qui tend vers 0 en croissant, telle que $\lambda(t_n) \leq M$ pour une certaine constante M. Cela entraîne que $E(Q_{\lambda(t_n)}, t_n) \to 0$ quand $t \to 0$, et donc :

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} E(u(t_n), t_n) &\leq \liminf_{n\to\infty} E(Q_{\lambda(t_n)}, t_n) + E(\varepsilon(t_n), t_n) \\ &\qquad + 2\sqrt{E(Q_{\lambda(t_n)}, t_n) E(\varepsilon(t_n), t_n)} \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} E(\varepsilon(t_n)) \quad < \quad \varepsilon_0 \end{aligned}$$

Ce qui est absurde, car cela nie l'hypothèse que u explose en 0. Ainsi, $\lambda(t) \to \infty$. Donc :

$$\begin{aligned} \sqrt{E\left(u(t), \frac{C}{\lambda(t)}\right)} &\geq \sqrt{\left(E(Q_{\lambda(t)}, \frac{C}{\lambda(t)}\right)} - \sqrt{E(\varepsilon(t))} \\ &\geq \sqrt{E(Q,C)} - \sqrt{\delta(\alpha)} \end{aligned}$$

Par propagation à vitesse finie de l'énergie, on en déduit que :

$$E(u(t), t) \geq \left(\sqrt{E(Q,C)} - \sqrt{\delta(\alpha)}\right)^2$$

Et ceci étant vrai pour tout $C \geq 0$, on a :

$$E(u(t),t) \geq \left(\sqrt{E(Q)} - \sqrt{\delta(\alpha)}\right)^2 \geq E(Q) - 4\sqrt{\delta(\alpha)}$$

Comme on sait de plus que $E(u(t), \frac{1}{\lambda(t)}) \leq 2 + \alpha \leq 3 \leq E(Q) - 4\sqrt{\delta(\alpha)}$, on en déduit que $\dfrac{1}{\lambda(t)} \leq |t|$. Ceci achève de démontrer les résultats voulus. $\square$

Remarque : Ce résultat sera amélioré à la fin de la note.

2.1.3 Modulation de la décomposition

Proposition 2.2 (Décomposition précise). *Il existe $\alpha_1 > 0$ tel que ce qui suit soit vérifié. Si $E(u) = E(Q) + \alpha$, avec $\alpha \leq \alpha_1$, alors il existe $\lambda(t)$ continue tel que :*

$$u(t,r) = Q(\lambda(t)r) + \varepsilon(t, \lambda(t)r)$$

et :

$$\left|1 - \frac{\lambda(t)}{\lambda_0(t)}\right| + E(\varepsilon(t)) \leq \delta(\alpha), \qquad \text{où } \delta(\alpha) \to 0 \text{ quand } \alpha \to 0$$
$$\int_0^\infty \left(Q_\rho(\rho)\varepsilon_\rho(t,\rho) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\sin(2Q(\rho))\sin(2\varepsilon(t,\rho))}{4}\right)\rho d\rho = 0$$

Preuve : Commençons par le cas où $\lambda = 1$: $u(1) = \frac{\pi}{2}$. On cherche à appliquer le théorème des fonctions implicites, où u se trouve dans un voisinage de Q. On considère donc

$$\varepsilon : \lambda \mapsto \left(\rho \mapsto Q(\rho) - u\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)\right)$$

On veut que $f(\varepsilon, \lambda) = 0$, où :

$$f(\varepsilon,\lambda) = \int_0^\infty \left(Q_\rho(\rho)\left(e(\lambda)\right)_\rho(\rho) + \frac{1}{4\rho^2}\sin(2Q(\rho))\sin\left(\varepsilon(\lambda)\right)(\rho)\right)\rho d\rho$$

On veut exprimer ε en fonction de λ, il nous faut donc calculer $\partial_\lambda f$, au point $(\varepsilon = 0, \lambda = 1)$. Or on a : $\dfrac{d}{d\lambda}\varepsilon\Big|_{\lambda=1} = u_\rho$. Et comme $\varepsilon = 0 \iff u = Q$:

$$\partial_\lambda f|_{\varepsilon=0,\lambda=1} = \int_0^\infty \left(Q_\rho Q_{\rho\rho} + \frac{1}{4\rho^2}\sin(2Q)\sin(2Q_\rho)\right)\rho d\rho \neq 0$$

Ainsi, par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage $U_\beta \times]1-\gamma, 1+\gamma[$ de $(Q,1)$ tel que :

$$f(\varepsilon,\lambda) = 0 \iff \varepsilon = \varepsilon(\lambda)$$

avec $B(Q,\beta) \subset U_\beta$. Quitte à restreindre, on peut supposer que $\delta(\beta) \leq \alpha_0$, et on pose $\alpha_1 = \min \beta, \gamma > 0$. On a démontré que si $u \in B(Q, \alpha_1)$, il existe $\lambda \in]1-\alpha_1, 1+\alpha_1[$ tel que $\varepsilon = Q - u(\frac{\cdot}{\lambda})$ vérifie la contrainte f. Bien sûr, λ varie de façon C^1 avec u.

Replaçons-nous maintenant dans le cas général. On introduit donc le changement d'échelle

$$u^\lambda(t,r) = u\left(t, \frac{r}{\lambda_0(t)}\right).$$

Alors $u^\lambda(t) \in B(Q,\alpha_1)$. Ce qui précède s'applique à $u^\lambda(t)$, et il existe donc $\lambda_1(t)$ tel que $\varepsilon = Q - v^t\left(\frac{\cdot}{\lambda_1(t)}\right)$ vérifie la contrainte f. Mais alors, en posant $\lambda(t) = \lambda_1(t)\lambda_0(t)$, on obtient la décomposition désirée, les estimées de petitesse étant obtenue par construction. Enfin, λ est continue car λ_0 l'est (comme u), et que λ_1 aussi (car elle est C^1). □

2.2 Étude du taux d'explosion

2.2.1 Objet Asymptotique

On pose ici que $\lambda(t)$ est défini comme étant l'inf des réels supérieurs à $|t|$, vérifiant :

$$u\left(t, \frac{1}{\lambda(t)}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Soit u une solution définie sur $[-1, 0[$, explosant en $t = 0$, d'énergie inférieure à (strictement) 8 et telle que $\lambda_u(t)$ soit bien défini et vérifie :

$$\forall t < 0, C_1 \leq \frac{1}{\lambda_u(t)|t|} \leq C_2$$

où C_1, C_2 sont des constantes strictement positives.

D'après l'explosion de u en 0 et la propagation à vitesse finie de l'énergie, on peut supposer que $C_2 = 1$. Par ailleurs, u concentre au moins une énergie égale à 2. Remarquons dès à présent que pour tout λ fixé, $u(t_0 + t/\lambda, r/\lambda)$ est encore solution, et a la même énergie que u. Soit $t_n = -2^{-n}$ une suite croissante de temps, $t_n \to 0$, et $\lambda_n = \lambda_u(t_n)$. On pose :

$$u_n(t,r) = u(t \cdot |t_n|, r \cdot |t_n|)$$

u_n est une solution définie sur $[-1, 0[$, qui explose en 0. Bien sûr, on a $u_n(-1,r) = u(t_n, r \cdot |t_n|)$, et $u_{nt}(-1,r) = |t_n| u_t(t_n, r \cdot |t_n|)$. De plus,

$$\begin{aligned}\int_0^t e(u_n)(t,r) r dr &= \int_0^t e(u)(t \cdot |t_n|, r|t_n|) r dr \\ &= \int_0^{t|t_n|} e(u)(t \cdot |t_n|, r) r dr \geq 2\end{aligned}$$

Donc u_n concentre une énergie au moins égale à 2. On considère la suite de fonctions

$$(u_n(-1,\cdot), u_{nt}(-1,\cdot))_{n\in\mathbb{N}}.$$

Elle est bornée dans H, donc à extraction près, on peut supposer qu'elle converge faiblement vers $v_0 \in H$. On en déduit de plus que $u_n(-1) \to v_0$ pp et uniformément sur les compacts de $]0, +\infty[$, et de plus $u_{nr}(-1) \rightharpoonup v_{0r}$ dans $L^2(rdr)$-faible, et $u_{nt}(-1) \rightharpoonup v_1$ dans $L^2(rdr)$-faible.

Par ailleurs, par définition, $u_n\left(-1, \frac{1}{\lambda_n|t_n|}\right) = \frac{\pi}{2}$. Mais $\frac{1}{\lambda_n|t_n|} \in [C_1, 1]$ par hypothèse : quitte à extraire, on peut supposer que $\frac{1}{\lambda_n|t_n|} \to \alpha \in [C_1, 1]$, et comme la suite u_n est équicontinue, on en déduit que $u_n(-1,\alpha) \to \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire, $v_0(\alpha) = \frac{\pi}{2}$. Par le même argument que pour le lemme de décomposition, on en déduit que $v(0) = 0$, $v \to \pi$ en $+\infty$, et par convergence faible, $E(v) \leq E(u_n) = E(u)$. On définit à présent notre objet asymptotique : v satisfait

$$\begin{cases} \Box v &= \dfrac{\sin 2v}{2r^2} \\ v(-1,\cdot) &= v_0 \\ v_t(-1,\cdot) &= v_1 \end{cases}$$

Soit $[-1,T[$ l'intervalle de définition de $v(t)$. On admet que :

$$\forall t \in [0,T[, u_n(t,\cdot) \to v(t,\cdot) pp., \text{ et uniformément sur les compacts de }]0,\infty[$$

et que : $u_{nt}(t) \rightharpoonup v_t(t)$, $u_{nr}(t) \rightharpoonup v_r(t)$ dans L^2-faible. En utilisant les fonction $v_t\chi_{r\leq t}$ et $v_r\chi_{r\leq t}$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a que :

$$\liminf \int_0^{t'} \left({u_{nt}}^2(t,r) + {u_{nr}}^2(t,r)\right) rdr \geq \int_0^{t'} \left(v_t^2(t,r) + v_r^2(t,r)\right) rdr$$

Et par Fatou :

$$\liminf \int_0^{t'} \frac{\sin^2 u_n(t,r)}{r} dr \geq \int_0^{t'} \frac{\sin^2 v(t,r)}{r} dr$$

En particulier, ceci démontre que que $T \geq 0$.

2.2.2 Renforcement de la convergence

Maintenant, notons que $u_n\left(t, \frac{1}{\lambda_u(t|t_n|)|t_n|}\right) = u\left(t|t_n|, \frac{1}{\lambda_u(t|t_n|)}\right) = \frac{\pi}{2}$, et par minimalité de λ_u, on en déduit :

$$\lambda_{u_n}(t) = \lambda_u(t|t_n|)|t_n| \text{ et donc } \frac{1}{\lambda_{u_n}(t)|t|} \in [C_1, 1]$$

On pose : $\mu(t) = \liminf_n \lambda_{u_n}(t)$. Alors $\mu(t) \in [C_1, 1]$, et par équicontinuité de $r \mapsto u_n(t,r)$ (et convergence localement uniforme vers $v(t,\cdot)$) :

$$v\left(t, \frac{1}{\mu(t)}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Ceci nous montre que $\lambda_v(t)$ est bien défini et vérifie : $\lambda_v(t) \leq \mu(t) \leq \frac{1}{C_1}|t|$, et donc que $\frac{1}{\lambda_v(t)|t|} \in [C_1, 1]$.

Ceci nous amène à considérer l'espace :

$$E = \left\{ u \text{ onde géométriques } | E(u) < \infty \text{ et } \forall t \in [-1, 0[, \frac{1}{\lambda_u(t)|t|} \in [C_1, 1] \right\}$$

Nous venons de montrer qu'à $u \in E$, on peut associer $v = f(u) \in E$, où $E(v) \leq E(u)$.

Soit u_n une suite de E minimisant l'énergie. Comme l'énergie des u_n est uniformément bornées, la suite est relativement compacte dans l'espace $C^0([-1;0[\times]0,\infty[)$ et de même pour u_{nr} et u_{nt} dans L^2-faible. On en déduit, quitte à extraire, l'existence d'une limite u dans ces espaces. Bien entendu, on a : $E(u) \leq \liminf_n E(u_n)$. Reste à montrer que $u \in E$, c'est-à-dire que $\lambda_u(t)$ est bien défini, et entre les bonnes bornes. On utilise encore l'équicontinuité des u_n : en posant $\mu(t) = \liminf_n \lambda_{u_n}(t)$, on a que

$\frac{1}{\mu(t)|t|} \in [C_1;1]$, et que $u\left(t,\frac{1}{\mu(t)}\right) = \frac{\pi}{2}$. Ceci assure que $\lambda_u(t)$ est bien défini, ainsi que $\frac{1}{\lambda(t)|t|} \in [C_1;1]$. Finalement, $u \in E$.

Posons $v = f(u) \in E$, alors $E(v) = E(u)$ car u est d'énergie minimum. Reprenons la définition de v : c'est l'onde géométrique dont la donnée initiale est la limite des données initiales de $u_n = u(\cdot|t_n|, \cdot|t_n|)$ au sens $C^0_{loc}(]0,\infty[)$, et $\dot{H}^1$-faible en temps et en espace. Mais puisque $E(v) = E(u)$, la convergence est forte dans $\dot{H}^1$ et de même :

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 u_n(0,r)}{r}dr \to \int_0^\infty \frac{\sin^2 v(0,r)}{r}dr$$

Mais rappelons nous que pour $t<0$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \liminf \displaystyle\int_0^{|t'|} u_{nt}^2(t,r)rdr & \geq & \displaystyle\int_0^{|t'|} v_t^2(t,r)rdr \\ \liminf \displaystyle\int_0^{t'} u_{nr}^2(t,r)rdr & \geq & \displaystyle\int_0^{|t'|} v_r^2(t,r)rdr \\ \liminf \displaystyle\int_0^{t'} \frac{\sin^2 u_n(t,r)}{r}dr & \geq & \displaystyle\int_0^{|t'|} \frac{\sin^2 v(t,r)}{r}dr \end{array}\right.$$

Si l'une de ces inégalités est stricte, en utilisant le fait que l'on a les mêmes inégalités quand on intègre sur $[t',\infty[$, l'addition des toutes ces inégalités donnera l'inégalité stricte :

$$\liminf_n E(u(t_n)) > E(v)$$

Ce qui est absurde. Toutes ces inégalités sont donc en fait des égalités. En particulier, cela donne :

$$E(u_n(t),t') \to E(v(t),t')$$

Or un calcul préliminaire donne que $E(u_n(t),t') = E(u(t|t_n|),t'|t_n|)$. Posons $t' = \lambda t$, $\lambda \geq 1$, et notons E_u^λ la limite $\lim_{t\uparrow 0} E(u(t),\lambda t)$ (dont l'existence est assurée par le lemme). On en déduit, en faisant tendre $n\to\infty$, que :

$$E(v(t),\lambda t) = E_u^\lambda \text{ ne dépend pas de } t\,!$$

On peut donc dériver cette égalité par rapport à t, pour obtenir que pp, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{\lambda|t|} 2\left(v_{tt}v_t + v_{rt}v_r + \frac{\sin 2v}{2r^2}v_t\right)(t,r)rdr \\ - \lambda\left(v_t^2(t,-\lambda t)\cdot(-\lambda t) + v_r(t,-\lambda t)\cdot(-\lambda t) + \frac{\sin^2 v(t,-\lambda t)}{-\lambda t}\right) = 0\end{aligned}$$

Cela signifie juste que le flux est nul. Or $v_{tt} = v_{rr} + \frac{1}{r}v_r - \frac{\sin 2v}{2r^2}$. Étudions donc le terme intégré : les termes en $\sin 2v$ s'éliminent, et par ailleurs :

$$\frac{d}{dr}[v_r v_t r] = v_{rr}v_t r + v_r v_{rt} + v_r v_t, \text{ d'où :}$$

$$v_r(t,-\lambda t)v_t(t,-\lambda t)\cdot(-\lambda t) = \int_0^{\lambda|t|}\left(v_{rr}v_t r + v_r v_{rt} + v_r v_t\right)(t,r)dr$$

Ce qui nous donne finalement, pour le flux :

$$2v_r(t,-\lambda t)v_t(t,-\lambda t)\cdot(-\lambda t)-\lambda\left(v_t^2(t,-\lambda t)\cdot(-\lambda t)+v_r^2(t,-\lambda t)\cdot(-\lambda t)\right.$$
$$\left.+\frac{\sin^2 v(t,-\lambda t)}{-\lambda t}\right)=0 \quad (2.1)$$

En regroupant les termes, après division par $-\lambda t$, cela donne :

$$\left(-(v_r-v_t)^2-(\lambda-1)(v_r^2+v_t^2)-\frac{\sin^2 v}{(-\lambda t)^2}\right)(t,-\lambda t)=0$$

Tous les termes étant de même signe, on en déduit que pour $r\geq|t|$, $v_r=v_t=0$,et $\sin v=0$. Par continuité de $v(t,\cdot)$, cela entraîne que $v(t,\cdot)=cste$ pour $r\geq|t|$, et comme $v(t,r)\to\pi$ quand $r\to\infty$, cela donne :

$$\forall r\geq|t|, v(t,r)=\pi$$

Ainsi, v concentre toute son énergie.

2.2.3 Conclusion

Mais rappelons nous le résultat (cf. le mémoire de DEA - chapitre 4) :

Proposition 2.3 (Shatah & Christodoulou). *Soit u une onde géométrique équivariante régulière pour $t<0$, et qui admet une singularité en $t=0, r=0$. Alors :*

$$E_{ext}^{\lambda}(t)\overset{def}{=}\int_{\lambda|t|}^{|t|}\left(\frac{1}{2}u_t^2+\frac{1}{2}u_r^2+\frac{\sin^2 u}{r^2}\right)rdr\xrightarrow{t\to0}0.$$

Cela entraîne une contradiction avec la concentration de toute l'énergie. En effet, rappelons-nous que $\dfrac{1}{\lambda_v(t)|t|}\in[C_1,1]$. Choisissons $\lambda=C_1/2$ pour appliquer la proposition de Shatah & Christodoulou. On obtient :

$$E(v(t),\frac{C_1}{2}|t|)-E(v(t),|t|)\to0 \text{ quand } t\uparrow0$$

Comme $E(v(t),|t|)=E(v)$, $E(v(t),\frac{C_1}{2}|t|)\to E(v)$. Or on sait que :

$$E\left(v(t),\frac{C_1}{2}|t|\right)\leq E\left(v(t),\frac{1}{\lambda(t)}\right)\leq E(v)-2$$

D'où, en passant à la limite $t\to0$:

$$E(v)\leq E(v)-2$$

Ce qui est absurde. Ainsi, v ne peut pas exister, et il n'existe donc pas non plus d'onde géométrique u vérifiant :

$$\frac{1}{\lambda_u(t)|t|}\in[C_1,1]$$

En fait, on peut raisonner de la même façon sur une sous-suite de temps t_n qui vérifient $\frac{1}{\lambda_u(t_n)|t_n|}\in[C_1,1]$. On a donc démontré le :

Théorème 2.1. – *Soit u une onde géométrique explosant en 0, et vérifiant $E(u)\leq E(Q)+\alpha$. Alors :*

$$\lim_{t\uparrow0}\lambda_u(t)|t|=\infty$$

2.3 Énergie concentrée à l'explosion

Démontrons tout d'abord le

Lemme 2.5. *Soit. Si $A \geq A_0$, alors :*

$$\int_0^A \left((u)_r^2 + \cos(2Q)\frac{u^2}{r^2}\right) rdr \geq -C(A)\|u\|_H^2$$

où $C(A) \to 0$ quand $A \to \infty$ ($C(A) > 0$).

Preuve : Supposons donc qu'il existe une suite croissante de réels A_n tendant vers ∞ et des fonctions u_n telles que $\|u_n\|_H = 1$, et pour un certain $C > 0$:

$$\int_0^{A_n} \left((u_n)_r^2 + \cos(2Q)\frac{u_n^2}{r^2}\right) rdr \leq -C$$

Alors on peut supposer que $u_n \rightharpoonup u$ dans $H - faible$, dans L^∞, et pp. Pour tout $A > b$ (b est tel que si $r \geq b$, $\cos(2Q) \geq 0$), si n est assez grand, $A_n \geq A$, et donc par hypothèse,

$$\int_0^A \left((u_n)_r^2 + \cos(2Q)\frac{u_n^2}{r^2}\right) rdr \leq -C$$

En passant à la limite faible :

$$\int_0^A \left(u_r^2 + \cos(2Q)\frac{u^2}{r^2}\right) rdr \leq -C$$

Ceci étant vrai pour tout A, $\int_0^\infty \left((u)_r^2 + \cos(2Q)\frac{u^2}{r^2}\right) rdr \leq -C$. Ceci est absurde car la Hessienne de l'énergie est positive au point Q. □

Proposition 2.4. *Soit u une onde géométrique explosant en $T = 0$, d'énergie $E(u) \leq E(Q) + \alpha$. Alors u concentre au moins l'énergie $E(Q) = 4$ à l'explosion.*

Preuve : On écrit tout d'abord :

$$u(t,r) = Q(\lambda(t)r) + \varepsilon(t, \lambda(t)r)$$

où $E(\varepsilon(t,\cdot)) \leq \delta(\alpha)$. D'après l'étude qui précède, on peut supposer que $\lambda(t)|t| \to \infty$. On développe alors l'expression de l'énergie.

$$\begin{aligned}
E_0^{|t|}(u(t)) &= \int_0^{|t|} \left(\underbrace{(Q_\lambda + \varepsilon)_t^2}_{\geq 0} + (Q_\lambda + \varepsilon)_r^2 + \frac{\sin^2(Q_\lambda + \varepsilon)}{r^2}\right)(t, \lambda(t)r)rdr \\
&\geq \int_0^{\lambda(t)|t|} \left((Q_\rho + \varepsilon_\rho)^2 + \frac{\sin^2(Q+\varepsilon)}{\rho^2}\right)(t,\rho)\rho d\rho \quad (\rho = \lambda(t)r)
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\sin^2(u+v) &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2u+2v)) = \frac{1 - \cos 2u \cos 2v + \sin 2u \sin 2v}{2} \\
&= \frac{1}{2}(1 - \cos 2u) + \frac{1}{2}\cos 2u(1 - \cos 2v) + \frac{1}{2}\sin(2u)\sin(2v) \\
&= \sin^2 u + \cos 2u \sin^2 v + \frac{1}{2}\sin 2u \sin 2v
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} E_0^{|t|}(u(t)) &\geq \int_0^{\lambda(t)|t|} \left(Q_\rho + \frac{\sin^2 Q}{\rho^2}\right)\rho d\rho + \int_0^{\lambda(t)|t|} \left(\varepsilon_\rho^2 + \cos(2Q)\frac{\sin^2 \varepsilon}{\rho^2}\right)\rho d\rho \\ &\quad +2\int_0^{\lambda(t)|t|} \left(Q_\rho \varepsilon_\rho + \frac{\sin(2Q)\sin(2\varepsilon)}{4\rho^2}\right)\rho d\rho \\ &\geq I_1(t) + I_2(t) + 2I_3(t) \end{aligned}$$

Estimons donc les termes concernés : tout d'abord, comme $\lambda(t)|t| \to \infty$:

$$I_1(t) = E(Q, \lambda(t)|t|) \to E(Q).$$

Pour $I_3(t)$, grâce à la décomposition modulée, on a (et que $|\sin 2x|/2 = |\sin x||\cos x| \leq |\sin x|$) :

$$\begin{aligned} |I_3(t)| &= \left|\int_{\lambda(t)|t|}^{\infty} \left(Q_\rho \varepsilon_\rho + \frac{\sin(2Q)\sin(2\varepsilon)}{4\rho^2}\right)\rho d\rho\right| \\ &\leq \left(\int_{\lambda(t)|t|}^{\infty} \left(Q_\rho^2 + \frac{\sin^2}{\rho^2}\right)\rho d\rho\right)^{1/2} \|\varepsilon(t)\|_H \\ &\leq \sqrt{E_{\lambda(t)|t|}^{\infty}(Q)}\delta(\alpha) \to 0 \text{ quand } t \to \infty \end{aligned}$$

Et enfin, pour $I_2(t)$, remarquons tout d'abord, que si α est suffisamment petit, $\|\varepsilon(t)\|_H$ l'est aussi (de manière uniforme), et donc que $|e(t,\rho)| \leq 1$ (par exemple). On en déduit alors que $|\sin(e(t,\rho))| \geq \frac{1}{2}|\varepsilon(t,\rho|$. Ainsi :

$$\begin{aligned} I_2(t) &\geq \int_0^{\lambda(t)|t|} \left(\varepsilon_\rho^2 + \cos(2Q)\frac{\varepsilon^2}{\rho^2}\right)\rho d\rho \\ &\geq -\frac{1}{2}C(\lambda(t)|t|)\|\varepsilon(t)\|_H^2 \end{aligned}$$

Grâce au lemme. Ainsi, $\liminf_{t\uparrow\infty} I_2(t) \geq 0$, et en sommant les estimations, on obtient :

$$\liminf_{t\uparrow\infty} E(u(t), |t|) \geq E(Q)$$

Mais rappelons-nous que $t \mapsto E(u(t), |t|)$ est décroissante en t, d'où l'on déduit que :

$$\forall t < 0, E(u(t), |t|) \geq E(Q)$$

□

Références

[1] J. Shatah & M. Struwe : *Geometric Wave equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics 2, 1998.

[2] J. Shatah & M. Struwe : *Regularity results for nonlinear wave equations*, Ann. of Math., 138 (p. 503-518), 1993.

[3] J. Shatah & A.S. Tavildar-Zadeh : *Regularity of harmonic maps from the Minkowsky space into rotationnally symmetric manifold*, Comm. Pure Appl. Math., 45 (p.947-971), 1992

[4] J. Shatah & A. Tavildar-Zadeh : *On the Cauchy Problem for equivariant wave maps*, Communications on Pure and Applied Maths, 47 (p. 719-753), 1994.

[5] H. Bahouri & P. Gérard : *High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations*, Am. J. of Math., 121 (p. 131-175), 1999.

[6] J. Ginibre & G. Velo : *Generalized Strichartz Inequalities for the Wave Equation*, J. of Func. Anal., 133 (p. 50-68), 1995.

[7] P. Bizón, T. Chmaj & Z. Tabor : *Formation of singularitites for equivariant (2+1)-dimensional wave maps into the 2-sphere*, Nonlinearity, 14 (p. 1041-1053), 2001.