

# Introduction au domaine de recherche Géométrie et ondes sous-riemanniennes

Cyril Letrouit  
Sous la direction d'Emmanuel Trélat

Octobre 2018

## Résumé

La géométrie sous-riemannienne est née il y a environ quarante ans, et a depuis lors connu un important développement. Intuitivement, elle sert à décrire des mouvements d'objets soumis à des contraintes. Un exemple classique est celui d'une voiture qui doit se garer : elle peut aller vers l'avant ou l'arrière en tournant éventuellement un peu, mais ne peut pas se déplacer directement latéralement. Pourtant, en faisant un "créneau", elle parvient à se garer et donc à se déplacer latéralement, d'une façon un peu indirecte. Mathématiquement, ce déplacement sera décrit par la notion de crochet de Lie, qui est au coeur de la géométrie sous-riemannienne. Notre but est de fournir une brève introduction à la géométrie sous-riemannienne et ses applications, puis d'expliquer quelques propriétés de l'équation des ondes associée à cette géométrie particulière, dont peu de propriétés sont connues.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction à la géométrie sous-riemannienne</b>	<b>1</b>
1.1	Exemple : le groupe de Heisenberg . . . . .	1
1.2	Définitions de base . . . . .	5
1.3	Géodésiques . . . . .	7
1.4	Applications : robotique, imagerie et aéronautique . . . . .	8
1.5	Différences entre la géométrie riemannienne et la géométrie sous-riemannienne	10
<b>2</b>	<b>Laplaciens sous-riemanniens et équation des ondes</b>	<b>10</b>
2.1	Les laplaciens sous-riemanniens . . . . .	10
2.2	Equation des ondes sous-riemannienne . . . . .	12

## 1 Introduction à la géométrie sous-riemannienne

### 1.1 Exemple : le groupe de Heisenberg

Nous allons commencer par étudier une structure sous-riemannienne particulière, qui donnera de bonnes intuitions sur plusieurs notions de base de la géométrie sous-riemannienne qui seront développées dans le paragraphe suivant. Il s'agit du groupe de Heisenberg.

**Le groupe de Heisenberg.** Nous considérons sur  $\mathbb{R}^3$  muni des coordonnées  $(x, y, z)$  les champs de vecteurs

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{y}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{x}{2} \end{pmatrix}$$

Si l'on note  $[\cdot, \cdot]$  le crochet de Lie de deux champs de vecteurs, on obtient

$$[X_1, X_2] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et donc la famille  $X_1, X_2, [X_1, X_2]$  engendre  $\mathbb{R}^3$  partout. Remarquons que l'on a aussi

$$[X_1, X_3] = [X_2, X_3] = 0.$$

On dit que  $X_3$  est le champ de Reeb de la structure de contact engendrée par  $(X_1, X_2)$ . La variété  $\mathbb{R}^3$  munie des champs  $X_1, X_2$  est appelée groupe de Heisenberg.

**Remarque 1** (Sur la terminologie). *Il est logique de se demander pourquoi la variété  $\mathbb{R}^3$  munie des champs de vecteurs  $X_1$  et  $X_2$  est appelée groupe de Heisenberg. A l'origine, les relations  $[X, Y] = Z$ ,  $[X, Z] = [Y, Z] = 0$  vérifiées par les champs de vecteurs  $X = X_1$ ,  $Y = X_2$  et  $Z = [X_1, X_2]$  ont été écrites par Heisenberg dans ses travaux sur la mécanique quantique pour  $X, Y, Z$  des opérateurs auto-adjoints sur un espace de Hilbert, avec  $X$  mesurant la position,  $Y$  le moment et  $Z$  un multiple de l'identité. En fait, pour obtenir une structure de groupe sur ce que l'on a appelé le groupe de Heisenberg, il faut munir  $\mathbb{R}^3$  de l'opération*

$$(x_1, y_1, z_1) * (x_2, y_2, z_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)).$$

Alors le groupe de Heisenberg devient un groupe de Lie nilpotent dont  $X_1$  et  $X_2$  sont des champs de vecteurs invariants à gauche.

## Courbes horizontales et longueur.

**Définition 2.** *Nous appellerons courbe horizontale toute courbe absolument continue  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  telle que  $\dot{\gamma}(t) \in \text{Vect}(X_1, X_2)$  pour presque tout  $t \in [0, 1]$ .*

Une question naturelle est de se demander si deux points arbitraires  $x, y \in \mathbb{R}^3$  peuvent toujours être joints par une courbe horizontale. La réponse est positive et tient à une interprétation classique des crochets de Lie comme composition infinitésimale de champs de vecteurs.

**Proposition 3.** *Soient  $X, Y$  deux champs de vecteurs lisses dans un voisinage de  $x \in \mathbb{R}^n$ . Alors on a*

$$[X, Y](x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(e^{-tY} \circ e^{-tX} \circ e^{tY} \circ e^{tX})(x) - x}{t^2}$$

où  $e^{tX}$  et  $e^{tY}$  sont les flots de  $X$  et  $Y$ .

Par cette proposition, on voit que si l'on fixe un point de départ  $x \in \mathbb{R}^3$ , les courbes horizontales  $\gamma$  pour les champs de vecteurs  $X_1$  et  $X_2$  définis ci-dessus permettent d'atteindre non pas seulement une surface de  $\mathbb{R}^3$  mais l'espace tout entier  $\mathbb{R}^3$  : les compositions infinitésimales de  $X_1$  et  $X_2$  autorisent aussi à se déplacer dans la direction manquante  $[X_1, X_2]$ . Le théorème de Chow, énoncé un peu plus loin, formalise cette intuition : si, en chaque point de  $\mathbb{R}^3$ , les crochets de Lie (itérés) des champs de vecteurs de départ engendrent tout l'espace tangent, alors pour tous  $x, y \in \mathbb{R}^3$  il existe une courbe horizontale reliant  $x$  à  $y$ .

Une fois ce problème, dit de "connectivité", résolu, on peut se demander quelle est la longueur minimale d'une courbe horizontale joignant deux points  $x, y \in \mathbb{R}^3$  fixés. La notion de longueur utilisée ici ne coïncide pas avec la distance euclidienne classique, car elle doit être adaptée à la géométrie particulière des champs de vecteurs.

**Définition 4.** *Si  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une courbe horizontale, on peut écrire pour presque tout  $t \in [0, 1]$*

$$\dot{\gamma}(t) = u_1(t)X_1(\gamma(t)) + u_2(t)X_2(\gamma(t)).$$

La longueur de  $\gamma$  est définie par

$$l(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{u_1(t)^2 + u_2(t)^2} dt$$

lorsque la quantité  $\sqrt{u_1(t)^2 + u_2(t)^2}$  est intégrable. Si  $x, y \in \mathbb{R}^3$ , on peut définir la distance sous-riemannienne entre  $x$  et  $y$  comme

$$d(x, y) = \inf\{l(\gamma) \mid \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\}.$$

De cette distance découle une notion naturelle de géodésiques :

**Définition 5.** Une courbe horizontale  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  est une géodésique si pour tous  $t_0, t_1$  suffisamment proches,  $\gamma$  réalise la distance entre  $\gamma(t_0)$  et  $\gamma(t_1)$ , c'est-à-dire  $l(\gamma|_{[t_0, t_1]}) = d(\gamma(t_0), \gamma(t_1))$ . C'est une géodésique minimisante si  $\gamma$  réalise la distance entre  $\gamma(0)$  et  $\gamma(1)$ .

**Remarque 6.** La distance ainsi définie est invariante à gauche c'est-à-dire que pour tous  $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ , on a  $d(x * y, x * z) = d(y, z)$ , où  $*$  est la loi de groupe qui a été définie dans la remarque 1. Ainsi, pour étudier la distance et les géodésiques, il suffit d'étudier  $d(O, \cdot)$  et les géodésiques issues de l'origine.

**Calcul des géodésiques dans le groupe de Heisenberg.** Il est possible de calculer explicitement les géodésiques dans le groupe de Heisenberg (voir [CDPT07]) ce que nous allons faire maintenant. Par invariance à gauche de la distance sous-riemannienne (voir remarque 6), on peut se restreindre à calculer les géodésiques de l'origine  $O$  à  $x = (x_1, x_2, x_3)$ . Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe horizontale joignant  $O$  à  $x$ . Soit  $\pi$  la projection sur le plan  $(x_1, x_2)$ . Soit  $S$  une région dans le plan  $(x_1, x_2)$  bornée par  $\pi(\gamma)$  et par le segment joignant  $\pi(x)$  à l'origine. Soit  $\tilde{\gamma}$  la courbe fermée obtenue en concaténant  $\pi(\gamma)$  avec ce segment. Par le théorème de Stokes, on a

$$\begin{aligned} x_3 &= \int_0^1 \gamma'_3(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 (\gamma_1 \gamma'_2 - \gamma_2 \gamma'_1)(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\tilde{\gamma}} x_1 dx_2 - x_2 dx_1 = \int_S dx_1 \wedge dx_2 = \text{Aire}(S) \end{aligned} \quad (1)$$

Pour l'égalité de la première ligne, on a utilisé le fait que  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$  est une courbe horizontale donc  $\gamma'(t) = x'(t)X + y'(t)Y = x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} - \frac{y}{2} x' \frac{\partial}{\partial z} + \frac{x}{2} y' \frac{\partial}{\partial z}$  donc  $\gamma'_3(t) = \frac{1}{2}(xy' - x'y)$ .

Ainsi, la recherche de géodésiques entre  $O$  et  $x$  revient à chercher une courbe plane de l'origine à  $(x_1, x_2)$  de longueur minimale, sous la contrainte que la région  $S$  délimitée par la courbe et le segment joignant l'origine à  $(x_1, x_2)$  a une aire donnée fixée. C'est un problème isopérimétrique classique, qui a pour solution des arcs de cercle : une courbe de longueur minimale entre  $O$  et  $x$  est le relevé d'un arc de cercle du plan joignant  $O$  à  $(x_1, x_2)$  et d'aire  $x_3$  (le relevé signifie que  $x_3$  est donné par (1)). Pour  $x$  variant dans  $\mathbb{R}^3$ , on obtient que les géodésiques sont les courbes paramétrées par  $r \in \mathbb{R}^+$  et  $e^{i\phi} \in \mathbb{S}^1$  (où l'on identifie le plan  $(x_1, x_2)$  avec  $\mathbb{C}$ ) et données par

$$\gamma_{r,\phi}(s) = \left( r e^{i\phi} (1 - e^{is}), \frac{1}{2} r^2 (s - \sin(s)) \right)$$

et

$$\gamma_{\infty,\phi}(s) = (s e^{i\phi}, 0)$$

Les courbes  $\gamma_{r,\phi}$  pour  $r < \infty$  sont minimisantes sur tout intervalle de longueur au plus  $2\pi$  et se déplacent dans la direction  $x_3$  (direction du champ de Reeb) en spiralant.

**Comparaison des distances.** Une fois calculées les géodésiques, on peut se demander à quoi ressemblent les boules dans le groupe de Heisenberg, et notamment essayer de comprendre si les boules ressemblent aux boules euclidiennes de  $\mathbb{R}^3$ . A nouveau, par invariance à gauche de la distance sous-riemannienne, il suffit de calculer les boules centrées en  $O$ . On vérifie que si  $x$  vérifie  $x_3 \neq 0$ , alors

$$d_{sR}(O, x) = l(\gamma_{r,\phi}([0, s])) = r(1 - \cos \frac{s}{2})$$

où  $r$  et  $s$  sont déterminés comme les paramètres pour lesquels il existe  $\phi$  satisfaisant  $\gamma_{r,\phi}(s) = x$ .

La boule sous-riemannienne  $B_{sR}(O, R)$  de rayon  $R$  est donc constituée de l'ensemble des points tels que  $r(1 - \cos \frac{s}{2}) < R$  c'est-à-dire  $s \in I_{r,R} = ]-2 \arccos(1 - \frac{R}{r}), 2 \arccos(1 - \frac{R}{r})[$ . On trouve donc

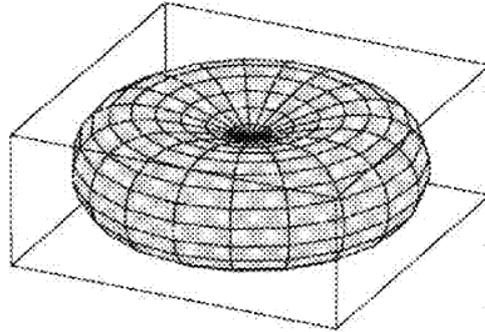
$$B_{sR}(O, R) = \left\{ \left( r e^{i\phi} (1 - e^{is}), \frac{1}{2} r^2 (s - \sin(s)) \right), r \in \mathbb{R}^+, \phi \in [0, 2\pi[, s \in I_{r,R} \right\}$$

On peut alors montrer facilement la proposition suivante.

**Proposition 7.** *Il existe des constantes  $C, C'$  telles que pour tout  $R \geq 0$ ,*

$$C \times [-R, R] \times [-R, R] \times [-R^2, R^2] \subset B_{sR}(O, R) \subset C' \times [-R, R] \times [-R, R] \times [-R^2, R^2]$$

Ainsi, les boules sous-riemanniennes n'ont pas la même forme que les boules euclidiennes mais on peut les comparer en distinguant les différentes directions. Ce résultat sera généralisé plus loin.



Une boule dans le groupe de Heisenberg (tiré de [BR96]).

**Autres exemples.** Il existe de nombreuses autres structures sous-riemanniennes classiques, toutes très importantes pour différentes raisons. Avant de donner des définitions précises, disons simplement ici qu'une structure sous-riemannienne est la donnée d'une variété lisse  $M$  et d'un sous-espace de son espace tangent  $T_x M$  en chaque point  $x \in M$ . Plutôt que de se donner directement ce champ de sous-espaces (que l'on appelle distribution horizontale), on se donne plutôt des champs de vecteurs  $X_1, \dots, X_m$  sur  $M$  et on définit le sous-espace de  $T_x M$  comme  $\text{Vect}(X_1(x), \dots, X_m(x))$ . Dans le cas du groupe de Heisenberg, ce sous-espace est donné par  $\text{Vect}(X_1(x), X_2(x))$ .

Nous présentons maintenant brièvement quelques structures sous-riemanniennes classiques.

1. Le plan de Grushin. Il s'agit du plan  $\mathbb{R}^2$  équipé des champs de vecteurs  $X = \partial_x$  et  $Y = x\partial_y$ . Ce modèle est partout riemannien (la distribution est égale à tout l'espace tangent) sauf sur la droite  $x = 0$ , où il faut utiliser le crochet de Lie  $[X, Y] = \partial_y$  pour obtenir tout l'espace tangent à  $\mathbb{R}^2$ . On parle parfois de structure "presque-riemannienne".

2. Les variétés de contact. Pour  $M$  une variété lisse de dimension impaire  $2n + 1$  donnée, il s'agit des distributions  $\mathcal{D}$  qui annulent une 1-forme  $\alpha$  vérifiant  $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$ . Par exemple, pour  $n = 1$ , on peut prendre les champs de vecteurs  $X = \partial_x$  et  $Y = \partial_y + x\partial_z$  sur  $\mathbb{R}^3$  qui annulent  $\alpha = xdy - dz$ , avec  $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$ .
3. Les variétés quasi-contact. Pour  $M$  une variété lisse de dimension paire  $2n$  donnée, il s'agit des distributions  $\mathcal{D}$  pour lesquelles il existe une 1-forme  $\alpha$  satisfaisant  $\mathcal{D} = \ker \alpha$  et  $\dim \ker d\alpha|_{\mathcal{D}} = 1$ . Par exemple, pour  $n = 2$ , on peut considérer dans  $\mathbb{R}^4$  (avec coordonnées  $x, y, z, w$ ) la 1-forme  $\alpha = e^z(dw - ydx + xdy)$ .
4. Les cas de Martinet. Dans  $\mathbb{R}^3$ , qui est le cas le plus souvent considéré, il s'agit par exemple de la distribution engendrée par les champs de vecteurs  $X = \partial_x$  et  $Y = \partial_y + x^2\partial_z$ . Le crochet de Lie  $[X, Y] = x\partial_z$  s'annule le long de la surface  $x = 0$  qui s'appelle surface de Martinet. Malgré leur ressemblance, les variétés de contact et les cas de Martinet possèdent des propriétés très différentes. Ce point sera développé au moment où seront évoquées les géodésiques sous-riemanniennes.

## 1.2 Définitions de base

Dans ce paragraphe, nous donnons les définitions de base de la géométrie sous-riemannienne, en s'inspirant de [RT05]. Ces définitions généralisent ce que l'on a vu précédemment pour le groupe de Heisenberg.

Soit  $M$  une variété lisse connexe de dimension  $n$ ,  $m$  un entier tel que  $1 \leq m \leq n$ , et  $f_1, \dots, f_m$  des champs de vecteur sur la variété  $M$ . Pour tout  $x \in M$  et  $v \in T_x M$ , on pose

$$g_x(v) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^m u_i^2 \mid u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^m u_i f_i(x) = v \right\}. \quad (2)$$

Alors  $g_x(\cdot)$  est une forme quadratique définie positive sur le sous-espace de  $T_x M$  engendré par  $f_1(x), \dots, f_m(x)$ . En-dehors de ce sous-espace, on a  $g_x(v) = +\infty$ . La forme  $g$  est la métrique sous-riemannienne associée aux champs de vecteurs  $f_1, \dots, f_m$  et la famille constituée des sous-espaces  $\mathcal{D}_x$  de  $T_x M$  engendré par  $f_1(x), \dots, f_m(x)$  pour chaque  $x \in M$  s'appelle la distribution sous-riemannienne associée et est notée  $\mathcal{D}$ . Enfin, remarquons que par polarisation,  $g_x$  définit un produit scalaire sur  $\mathcal{D}_x$ . Une famille  $(f_1, \dots, f_m)$  est dite  $g$ -orthonormée si elle est orthonormée pour ce produit scalaire.

Pour  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  un chemin absolument continu, on pose

$$l(\gamma) := \int_0^1 \sqrt{g(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))} dt \quad (3)$$

la longueur de  $\gamma$ . Comme pour le groupe de Heisenberg, on peut définir la distance sous-riemannienne associée aux champs de vecteurs  $f_1, \dots, f_m$  entre deux points  $x, y$  dans  $M$  par

$$d_{sR}(x, y) := \inf \{ l(\gamma) \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow M \text{ chemin absolument continu}, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y \}. \quad (4)$$

On peut se demander sous quelles conditions cette distance est nécessairement finie. Le théorème de Chow donne une telle condition, et nous allons maintenant l'énoncer. Nous avons déjà vu dans l'étude du groupe de Heisenberg que les crochets de Lie jouent un rôle déterminant dans ce problème.

Notons  $\mathcal{F}$  la famille  $f_1, \dots, f_m$ . On note  $L^1(\mathcal{F})$  l'espace engendré par  $\mathcal{F}$  dans l'ensemble des champs de vecteurs sur  $M$  puis on définit récursivement  $L^k(\mathcal{F})$  pour  $k = 1, 2, \dots$  par

$$L^{k+1}(\mathcal{F}) = \text{Vect} (L^k(\mathcal{F}) \cup \{[X, Y] \mid X \in \mathcal{F}, Y \in L^k(\mathcal{F})\}) \quad \forall k \geq 1. \quad (5)$$

On pose enfin

$$L(\mathcal{F}) = \cup_{k \geq 1} L^k(\mathcal{F}).$$

**Définition 8.** On dit que  $\mathcal{F}$  satisfait la condition de Hörmander si

$$L(\mathcal{F})(x) = T_x M \quad \forall x \in M.$$

**Théorème 9** (Chow). Soient  $f_1, \dots, f_m$  des champs de vecteurs sur une variété lisse  $M$  de dimension  $n$  qui vérifient la condition de Hörmander. Alors pour tous  $x, y \in M$ , il existe un chemin absolument continu  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  qui vérifie  $\gamma(0) = x$ ,  $\gamma(1) = y$ . En particulier, la distance sous-riemannienne entre deux points quelconques  $x$  et  $y$  est finie.

Une preuve complète se trouve dans [Mon06]. Il s'agit essentiellement d'utiliser la proposition 3. La réciproque est vraie dans le cas analytique.

**Comparaison des distances.** Comme dans le cas du groupe de Heisenberg (proposition 7), il est possible de comparer des boules riemanniennes déformées à des boules sous-riemanniennes. En reprenant les notations de l'égalité-définition (5), on peut écrire en chaque  $p \in M$

$$\{0\} = L^0(p) \subset L^1(p) \subset \dots \subset L^s(p) \subset \dots \subset L^{r(p)}(p) = T_p M$$

où  $r(p)$  est le plus petit entier tel que  $L^{r(p)} = T_p M$ .

On pose  $n_s(p) = \dim L^s(p)$  pour  $0 \leq s \leq r(p)$  et  $w_s(p) = n_s(p) - n_{s-1}(p)$  pour  $1 \leq s \leq r(p)$  et on note  $n_s(p) = (n_1(p), \dots, n_{r(p)}(p))$  et  $w(p) = (w_1(p), \dots, w_{r(p)}(p))$ . Il est alors possible de définir un système de coordonnées, appelées coordonnées privilégiées, telles qu'en notant  $B_{sR}(p, \varepsilon)$  la boule sous-riemannienne de centre  $p$  et de rayon  $\varepsilon$ , on ait le théorème suivant.

**Théorème 10** (Ball-box theorem). Il existe des constantes  $C, C'$  telles que dans les coordonnées privilégiées

$$C[-\varepsilon, \varepsilon] \times [-\varepsilon^{w_2}, \varepsilon^{w_2}] \times \dots \times [-\varepsilon^{w_n}, \varepsilon^{w_n}] \subset B_{sR}(p, \varepsilon) \subset C'[-\varepsilon, \varepsilon] \times [-\varepsilon^{w_2}, \varepsilon^{w_2}] \times \dots \times [-\varepsilon^{w_n}, \varepsilon^{w_n}]$$

pour  $\varepsilon$  suffisamment petit. Ici, on a noté  $[-x, x]$  le cube centré en  $p$  et de côté  $2x$ .

Si  $n(p)$  est constant au voisinage de  $p$ , alors au voisinage de  $p$  la dimension de Hausdorff de  $(M, g)$  est  $\sum_{i=1}^{r(p)} w_i$ .

Expliquons brièvement ce qu'est un système de coordonnées privilégiées. En fait, il s'agit d'un système de coordonnées adapté à la décomposition en drapeau de l'espace tangent selon le nombre de crochets de Lie nécessaires pour atteindre un vecteur (voir (6)).

Pour commencer nous avons besoin de deux définitions préliminaires, celle de système de coordonnées linéairement adapté et celle d'ordre d'une fonction.

**Définition 11.** Soit  $z_1, \dots, z_n$  un système de coordonnées centré en  $p$  tel que les différentielles  $dz_1, \dots, dz_n$  forment une base de  $T_p^* M$  adaptée au drapeau

$$\{0\} = L^0(p) \subset L^1(p) \subset \dots \subset L^s(p) \subset \dots \subset L^r(p) = T_p M. \quad (6)$$

Un tel système de coordonnées est appelé adapté linéairement en  $p$ .

**Définition 12.** Soit  $s$  un entier  $\geq 0$ . Pour une fonction lisse  $f$  définie près de  $p$ , on dit que  $f$  est d'ordre  $\geq s$  en  $p$  si  $f(q) = O(d(p, q)^s)$  pour  $q$  suffisamment proche de  $p$ . On dit que  $f$  est d'ordre  $s$  en  $p$  si  $f$  est d'ordre  $\geq s$  mais pas d'ordre  $\geq s + 1$  en  $p$ .

**Définition 13.** On appelle système de coordonnées privilégiées un système de coordonnées locales  $z_1, \dots, z_n$  centrées en  $p$  telles que

1.  $z_1, \dots, z_n$  sont linéairement adaptées en  $p$ ;
2. L'ordre de  $z_j$  en  $p$  est exactement  $w_j$ .

Un exemple de coordonnées privilégiées en  $p$  est donnée par

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \exp \left( \sum_{i=1}^n x_i Z_i^p \right) (p)$$

où  $(Z_i^p)_{1 \leq i \leq n}$  est une base de champs de vecteurs adaptée au drapeau en  $p$ .

### 1.3 Géodésiques

Dans ce paragraphe, on décrit la notion de géodésique sous-riemannienne et quelques propriétés de base des géodésiques sous-riemanniennes. Cela généralise ce qui a été déjà vu dans le cas particulier du groupe de Heisenberg. Dans toute la suite, on fixe une variété riemannienne  $(M, \mathcal{D}, g)$  qui vérifie la condition de Hörmander.

**Définition 14.** Soient  $x, y \in M$ . On appelle *géodésique minimisante* entre  $x$  et  $y$  tout chemin  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  tel que  $\gamma(0) = x, \gamma(T) = y$  et  $d_{sR}(x, y) = l(\gamma)$ .

Le théorème de Hopf-Rinow sous-riemannien est l'analogue du théorème riemannien.

**Théorème 15** (Hopf-Rinow). *Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. Pour tous  $x, y \in M$  suffisamment proches il existe au moins une géodésique minimisante joignant  $x$  et  $y$ .
2. Si  $M$  est un espace métrique complet pour la distance sous-riemannienne  $d$ , pour tous  $x, y \in M$  il existe une géodésique minimisante entre  $x$  et  $y$ .

On trouve une preuve détaillée de ce théorème dans [BR96]. Pour la suite de ce paragraphe, on s'inspire principalement de [Mon06].

**Géodésiques normales.** Comme dans le cas riemannien, pour calculer des géodésiques il est nécessaire d'introduire un hamiltonien. Notons  $(f_1, \dots, f_m)$  un repère  $g$ -orthonormé local de la distribution  $\mathcal{D}$ . Le hamiltonien est défini comme  $H(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m p(X_i(q))^2$  où  $q \in M$  et  $p \in T_q^*M$ .

Les équations hamiltoniennes sont

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \quad (7)$$

On a alors le théorème suivant.

**Théorème 16.** Soit  $\zeta(t) = (\gamma(t), \xi(t))$  une solution des équations hamiltoniennes, de projection  $\gamma(t)$  sur  $M$ . Alors tout sous-arc suffisamment petit de  $\gamma$  est une géodésique sous-riemannienne minimisante, et il est la seule géodésique minimisante à joindre ses extrémités.

**Définition 17.** Les courbes  $\gamma$  ainsi définies comme projection d'une solution des équations hamiltoniennes sont appelées *géodésiques normales*.

**Remarque 18.** Contrairement à ce qu'il se passe en géométrie riemannienne, les géodésiques normales ne sont pas les seules géodésiques en géométrie sous-riemannienne : dans le cas *Martinet* par exemple, certaines géodésiques ne peuvent pas être relevées en des solutions des équations hamiltoniennes (7). On parle de courbes singulières et de géodésiques anormales (strictes).

**Géodésiques singulières.** Soit  $\Omega_{\mathcal{D}}$  l'espace des courbes absolument continues horizontales  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  qui de plus sont de carré intégrable. Pour  $q \in M$ , on note  $\Omega_{\mathcal{D}}(q)$  le sous-ensemble de  $\Omega_{\mathcal{D}}$  des chemins qui partent de plus de  $q$ . L'application  $end = end_q : \Omega_{\mathcal{D}}(q) \rightarrow M$  est l'application qui associe à chaque courbe son point final  $end_q(\gamma) = \gamma(1)$ .

**Définition 19.** Une courbe singulière est une courbe  $\gamma \in \Omega_{\mathcal{D}}$  qui est un point singulier de  $end_{\gamma(0)}$ , c'est-à-dire une courbe horizontale pour laquelle l'image de la différentielle  $d(end)_{\gamma}$  n'est pas tout  $T_{\gamma(1)}M$ . Une courbe  $\gamma \in \Omega_{\mathcal{D}}$  est régulière si elle n'est pas singulière.

**Remarque 20.** Au vu de cette définition, le fait qu'une courbe soit singulière ne dépend que de la distribution  $\mathcal{D}$  et pas de la métrique  $g$ .

Le théorème important qui classe toutes les géodésiques sous-riemanniennes est le suivant.

**Théorème 21.** Toute géodésique minimisante est soit une courbe singulière soit une géodésique normale. Les deux possibilités ne s'excluent pas mutuellement.

**Idée de preuve.** Ce théorème est une conséquence du principe du maximum de Pontryagin, présenté dans la section suivante.

**Remarque 22.** *Il existe effectivement des géodésiques qui ne sont pas normales. Par exemple, dans les cas Martinet, la droite  $x = 0$  est génériquement une géodésique minimisante qui ne se relève pas en une solution des équations hamiltoniennes (7). La raison principale de l'existence de ces géodésiques singulières est qu'elles sont les seules courbes horizontales joignant leurs extrémités. Pour plus de détails, on se référera à [Mon06].*

On peut se demander s'il existe génériquement beaucoup de géodésiques singulières. La réponse est que presque aucune (au sens de la topologie de Whitney) distribution de rang au moins 3 n'admet de géodésiques singulières [CJT06]. En revanche, les distributions de rang 2 ont génériquement beaucoup d'anormales [LS95].

## 1.4 Applications : robotique, imagerie et aéronautique

La géométrie sous-riemannienne a été utilisée avec succès dans plusieurs domaines d'applications, parmi lesquels la théorie du contrôle, l'aéronautique, la robotique ou la neurogéométrie de la vision. On donne dans ce paragraphe quelques idées concernant ces applications.

**Théorie du contrôle.** La théorie du contrôle (voir par exemple [Tre05] pour une présentation détaillée) consiste à analyser les propriétés des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande. Le but est d'amener le système d'un état initial donné à un état final, en respectant éventuellement certaines contraintes. L'origine des systèmes abordés est très diverse (économie, écologie, chimie, électronique, ...) et les applications industrielles ne manquent pas (automobile, aérospatiale, secteur médical,...).

Le problème de la contrôlabilité consiste à déterminer si l'on peut amener en temps fini le système d'un état initial arbitraire à un état final prescrit en choisissant une bonne commande. Pour les systèmes linéaires, il existe un critère simple de contrôlabilité, le critère de Kalman. Pour les systèmes non linéaires, le problème est beaucoup plus dur. Une fois le problème de contrôlabilité résolu, on peut chercher une trajectoire minimisant un certain critère. On parle alors d'un problème de contrôle optimal. Le principe du maximum de Pontryagin est le point clé de cette théorie, car il permet de calculer les trajectoires optimales.

Pour expliquer le lien de la théorie du contrôle avec la géométrie sous-riemannienne, nous allons énoncer le principe du maximum de Pontryagin ([Tre05], théorème 7.2.1). Ici, nous l'énonçons dans l'espace euclidien, mais nous pourrions tout aussi bien l'énoncer en toute généralité sur une variété. Considérons le système de contrôle dans  $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (8)$$

où  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est de classe  $C^1$  et où les contrôles  $u$  sont des applications mesurables et bornées définies sur un intervalle  $[0, t_e(u)[$  de  $\mathbb{R}^+$  et à valeurs dans  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ . Soient  $M_0$  et  $M_1$  deux sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$ . On note  $\mathcal{U}$  l'ensemble des contrôles admissibles  $u$  dont les trajectoires associées relient un point initial de  $M_0$  à un point final de  $M_1$  en temps  $t(u) < t_e(u)$ . Par ailleurs on définit le coût d'un contrôle  $u$  sur  $[0, t]$

$$C(t, u) = \int_0^t f^0(s, x(s), u(s)) ds + h(t, x(t)), \quad (9)$$

où  $f^0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  et  $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sont  $C^1$ , et  $x(\cdot)$  est la trajectoire solution de (8) associée au contrôle  $u$ .

On considère le problème de contrôle optimal suivant : déterminer une trajectoire reliant  $M_0$  à  $M_1$  et minimisant le coût. Le temps final peut être fixé ou non. Si le contrôle  $u \in \mathcal{U}$  associé à la trajectoire  $x(\cdot)$  est optimal sur  $[0, T]$ , alors il existe une application  $p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$

absolument continue appelée vecteur adjoint, et un réel  $p^0 \leq 0$  tels que le couple  $(p(\cdot), p^0)$  est non trivial et tels que, pour presque tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \quad (10)$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \quad (11)$$

où  $H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p^0 f^0(t, x, u)$  est le hamiltonien du système, et on a la condition de maximisation presque partout sur  $[0, T]$

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{v \in \Omega} H(t, x(t), p(t), p^0, v). \quad (12)$$

Une extrémale du problème de contrôle optimal est un quadruplet  $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$  solution des équations (10), (11) et (12). Si  $p^0 = 0$ , on dit que l'extrémale est anormale et si  $p^0 \neq 0$ , on dit que l'extrémale est normale.

On peut maintenant relier le principe du maximum de Pontryagin à la recherche de géodésiques dans une variété sous-riemannienne. Le coût  $f^0$  qui intervient dans l'expression du coût (9) est l'analogie de la métrique  $g$  en géométrie sous-riemannienne définie par l'équation (2). Pour le voir on considère une famille de champs de vecteurs  $f_1, \dots, f_m$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $g$  la métrique associée par l'équation (2). Parallèlement, on considère le problème de contrôle (8) avec  $f(t, x(t), u(t)) = u(t)$  et le coût  $C(u) = \int_0^t g_{x(s)}(u(s)) ds$ . Une trajectoire  $x(\cdot)$  est optimale pour ce coût si et seulement si c'est une géodésique minimisante de la variété sous-riemannienne associée aux  $f_i$ . Le principe du maximum de Pontryagin montre que les géodésiques minimisantes sont des projections de solutions de (10) et (11) (l'adjoint  $p$  jouant le rôle de la variable  $\xi$  des géodésiques du théorème 16). De plus, si  $p^0 = 0$ , on trouve les trajectoires anormales du système contrôlé, qui correspondent aux géodésiques singulières de la variété sous-riemannienne. On retrouve le fait que ces géodésiques singulières ne dépendent pas de la métrique  $g$  mais seulement de la distribution puisque le fait de poser  $p^0 = 0$  entraîne que le hamiltonien du principe du maximum ne dépend plus du coût  $f^0$ . Tout cela met en évidence le fait que le principe du maximum de Pontryagin est profondément relié à la recherche de géodésiques dans des variétés sous-riemanniennes.

**Aéronautique.** Présentons maintenant brièvement une application du contrôle optimal, tirée de [BFT06]. Il s'agit du problème de contrôle de l'arc atmosphérique, qui a été proposé aux auteurs de [BFT06] par le CNES dans le cadre du projet Mars sample return, qui consiste à envoyer une navette spatiale habitée vers la planète Mars, dans le but de ramener sur Terre des échantillons martiens. Une navette spatiale, se comportant comme un planeur (la poussée étant coupée), vole à haute vitesse et est soumise à des forces fluides dans l'atmosphère, une force de frottement appelée traînée et une force de portance qui permet de contrôler la navette. On impose de plus des contraintes sur l'état : une contrainte sur le flux thermique et une contrainte sur l'accélération normale, qui correspondent au fait que la navette ne peut pas trop chauffer ni trop accélérer. On cherche à minimiser le facteur d'usure de la navette, modélisé par l'intégrale du flux thermique. Ce problème est exactement du type des problèmes résolubles par le principe du maximum de Pontryagin. Il est entièrement résolu dans le chapitre 8 du livre [BFT06].

**Robotique.** Dans les années 1980-1990, plusieurs problèmes tirés de la robotique ont aussi fait évoluer la géométrie sous-riemannienne. Par exemple, dans l'article [Lau93], l'auteur étudie la contrôlabilité d'un système constitué d'un véhicule-robot tirant  $n$  remorques, comme on en rencontre dans les aéroports. Il montre que si l'on paramétrise le système dans le plan par les angles entre les remorques et la position du véhicule, on obtient un espace de configurations qui est une sous-variété de dimension  $n+3$  de l'espace de dimension  $3(n+1)$  de toutes les positions pour le système complet. Puis, en utilisant les outils de théorie du contrôle

et de géométrie sous-riemannienne expliqués ci-dessus, il cherche à savoir, en fonction du point où les remorques s'accrochent entre elles et du type de véhicule qui contrôle le système, si l'on peut passer de n'importe quel point de l'espace de configurations à n'importe quel autre. C'est exactement le théorème de Chow qui donne ce type de résultats.

**Neurogéométrie de la vision.** Concernant la géométrie de la vision, la principale contribution en lien avec la géométrie sous-riemannienne est due à Jean Petitot [Pet08]. Il s'agit de comprendre le mécanisme de la vision, et notamment comment l'oeil cerne les contours des objets lointains, ou plutôt les reconstitue à partir de données parcellaires. En fait, d'après les théories développées dans cet ouvrage de Petitot et les nombreuses recherches qui y sont liées, l'oeil utilise des géodésiques sous-riemanniennes, notamment dans le groupe de Heisenberg, pour les reconstituer.

## 1.5 Différences entre la géométrie riemannienne et la géométrie sous-riemannienne

Récapitulons les différences principales entre géométrie riemannienne et géométrie sous-riemannienne (voir par exemple [Mon95]).

1. La dimension de Hausdorff d'une variété sous-riemannienne (définie à partir de la distance sous-riemannienne) peut être supérieure à la dimension de la variété (définie à partir des cartes locales). C'est le théorème 10 qui le montre.
2. L'espace des courbes horizontales joignant deux points fixes peut avoir des singularités. Ces courbes singulières peuvent être des géodésiques minimisantes, indépendamment du choix de la métrique. Ce point a été évoqué plus haut, et l'exemple typique est celui des courbes de Martinet.
3. Le lieu conjugué d'un point contient ce point. Autrement dit, l'application exponentielle à partir d'un point n'est jamais un difféomorphisme dans un voisinage de point. On rappelle que pour  $x \in M$ , le lieu conjugué de  $x$  dans  $T_x M$  est le sous-ensemble de  $T_x M$  constitué des points critiques de l'application exponentielle  $\exp_x$ , et que le lieu conjugué de  $x$  dans  $M$  est l'image du lieu conjugué de  $x$  dans  $T_x M$  par l'application exponentielle  $\exp_x$ .

## 2 Laplaciens sous-riemanniens et équation des ondes

### 2.1 Les laplaciens sous-riemanniens

**Définition des laplaciens sous-riemanniens.** Pour une variété riemannienne  $(M, g)$ , le laplacien est défini comme  $\Delta\phi = \operatorname{div}(\nabla\phi)$  où le gradient est obtenu comme l'unique champ de vecteurs vérifiant  $g(X, \nabla\phi) = d\phi(X)$  pour toute fonction  $\phi \in C^\infty(M)$  et la divergence d'un champ  $X$  est l'unique fonction telle que  $\mathcal{L}_X\omega = (\operatorname{div}_\omega X)\omega$  où  $\omega$  est la forme volume naturelle de la variété  $(M, g)$  et  $\mathcal{L}_X$  est la dérivée de Lie selon  $X$ . Ce laplacien est intrinsèque car il ne dépend que de la mesure volume  $\omega$  de la variété, qui est elle-même imposée par la métrique  $g$ .

En géométrie sous-riemannienne, la situation est différente : il n'y a plus de mesure volume naturelle et il existe une multitude de sous-laplaciens possibles. Comme nous allons le voir, il est tout de même possible de définir des laplaciens sous-riemanniens intrinsèques. Par analogie avec le cas riemannien, nous définissons un gradient et une divergence sous-riemanniens.

**Définition 23.** Soit  $(M, g)$  une variété sous-riemannienne et  $\phi \in C^\infty(M)$ . Le gradient horizontal de  $\phi$  est l'unique champ de vecteurs horizontal  $\nabla\phi$  qui satisfait pour tout champ de vecteurs  $X$

$$g(\nabla\phi, X) = d\phi(X).$$

**Remarque 24.** Si l'on se donne un repère orthonormé  $\{f_1, \dots, f_k\}$  de la structure sous-riemannienne, c'est-à-dire  $g(f_i, f_j) = \delta_{ij}$ , le gradient horizontal s'écrit

$$\nabla\phi = \sum_{i=1}^k f_i(\phi)f_i, \quad \forall\phi \in C^\infty(M).$$

Pour définir la divergence, nous devons impérativement choisir une mesure lisse  $\mu$  sur  $M$ , qui joue le rôle de la mesure volume en géométrie riemannienne (mais qui donc ici n'est pas intrinsèque puisqu'elle est choisie arbitrairement). Nous définissons alors la divergence comme suit.

**Définition 25.** Soit  $\psi$  un champ de vecteurs lisse sur  $M$ . Sa divergence par rapport à la mesure  $\mu$  est l'unique fonction scalaire  $\operatorname{div}_\mu(\psi)$  satisfaisant pour toute fonction lisse  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  l'égalité

$$\int_M \phi \operatorname{div}_\mu(\psi) d\mu = \int_M \nabla\phi \cdot \psi d\mu.$$

Cela s'écrit aussi  $\mathcal{L}_X d\mu = \operatorname{div}_\mu(X)d\mu$  pour tout champ de vecteurs  $X$  sur  $M$ .

**Définition 26.** On définit alors le laplacien sous-riemannien (qui dépend de  $\mu$ ) par

$$\Delta_\mu f = \operatorname{div}_\mu(\nabla f)$$

Si  $f_1, \dots, f_m$  est un repère  $g$ -orthonormé de la distribution, on peut vérifier que

$$\Delta_\mu = \sum_{i=1}^m f_i^2 + \sum_{i=1}^m \operatorname{div}_\mu(f_i)f_i = - \sum f_i^* f_i,$$

où  $f^*$  est l'adjoint de  $f$  au sens  $L^2$ , i.e.  $f^* = -f - \operatorname{div}(f)\operatorname{id}$ .

**Remarque 27** (Laplacien intrinsèque). Il découle de cette définition que le laplacien dépend d'une mesure sous-riemannienne  $\mu$ . Si l'on souhaite définir un laplacien intrinsèque, il faut donc une mesure  $\mu$  intrinsèque, c'est-à-dire une mesure qui ne dépende que de la variété sous-riemannienne  $(M, \mathcal{D}, g)$  et pas d'un repère orthonormé de  $\mathcal{D}$  ou d'un choix arbitraire.

De telles mesures ont été l'objet de nombreuses recherches. On peut citer la mesure de Hausdorff [GJ15], la mesure de Popp [Mon06] ou encore la mesure de Weyl [dVHT18].

**Théorème de Hörmander.** Revenons aux laplaciens sous-riemanniens généraux, pas forcément intrinsèques. Un théorème célèbre, dit de régularité elliptique, énonce que si, sur une variété riemannienne  $N$ , on a  $\Delta u = f$  avec  $f \in C^\infty(N)$ , alors  $u \in C^\infty(N)$ . On dit que le laplacien riemannien est hypoelliptique. Si le laplacien riemannien est remplacé par un opérateur d'ordre deux général (par exemple, un laplacien sous-riemannien), on peut se demander si ce résultat subsiste. Le théorème de Hörmander affirme que c'est le cas si, en quelque sorte, les dérivées d'ordre 2 apparaissant dans l'opérateur permettent d'atteindre toutes les directions de l'espace tangent.

**Théorème 28** (Hörmander). Soit  $P$  un opérateur d'ordre deux sur les fonctions réelles sur une variété lisse  $M$  s'écrivant  $P = \sum_{i=1}^k X_i^2 + Y_0 + c$  où les  $X_i$  et  $Y_0$  sont des champs de vecteurs lisses sur  $M$  et  $c \in C^\infty(M)$ . On suppose de plus que la famille des  $X_i$  vérifie la condition de Hörmander (définition 8). Alors  $P$  est hypoelliptique, c'est-à-dire que si  $u$  est une distribution sur  $u$  telle que  $Pu$  est  $C^\infty$  au sens des distributions, alors  $u$  est une fonction  $C^\infty$ . En particulier, le laplacien sous-riemannien de  $(M, \mathcal{D}, g)$  est hypoelliptique s'il existe des champs de vecteurs  $f_1, \dots, f_m$  qui engendrent la distribution  $\mathcal{D}$  et qui vérifient la condition de Hörmander.

Il existe plusieurs preuves de ce théorème, comme celle de Hörmander [Hör67] et celle de Malliavin [Mal78]. En fait, le calcul de Malliavin a été fondé pour donner une démonstration probabiliste de ce théorème, et continue d'être un outil important pour comprendre les opérateurs hypoelliptiques. Une très bonne référence pour comprendre la preuve classique du théorème de Hörmander est le chapitre 4 de [HL07] et pour la preuve de Malliavin de ce même théorème, on pourra consulter [Hai11].

## 2.2 Equation des ondes sous-riemannienne

Une fois que l'on a défini les laplaciens sous-riemanniens, il est tentant d'étudier des équations classiques faisant intervenir le laplacien, comme l'équation de la chaleur, l'équation de Schrödinger ou l'équation des ondes. Dans cette section, nous allons présenter l'équation des ondes sous-riemannienne, qui est beaucoup moins bien comprise que l'équation de la chaleur. Elle s'écrit (en prenant les conventions de signe de [Mel86])

$$D_t^2 u - \Delta u = f \quad (13)$$

Dans cette équation, nous avons fixé un laplacien sous-riemannien  $\Delta$  (qui dépend donc d'une métrique  $g$  et d'une mesure  $\mu$ , que l'on suppose fixés tout au long de ce paragraphe) et une fonction  $f$ . Nous supposons que  $\Delta = \sum_{i=1}^m -X_i^* X_i = \sum_{i=1}^m (X_i^2 + \operatorname{div}_\mu(X_i)X_i)$  avec des  $X_i$  vérifiant la condition de Hörmander. En particulier, ce laplacien est hypoelliptique. L'inconnue est  $u$ . Nous notons  $D_t$  l'opérateur  $D_t = -i\partial_t$ . En général, on donne aussi des conditions initiales sous la forme

$$u = u_0, \quad D_t u = u_1 \quad \text{à } t = 0.$$

**Noyau et propagation à vitesse finie.** On peut imaginer calculer des solutions fondamentales de l'équation, c'est-à-dire des solutions associées aux conditions initiales  $(u_0, u_1) = (\delta_x, 0)$  ou  $(u_0, u_1) = (0, \delta_x)$ . On obtient le noyau de l'équation des ondes : comme  $-\Delta$  est auto-adjoint dans  $L^2(M, \mu)$  et positif, la notation  $(-\Delta)^{1/2}$  a un sens et la solution de l'équation générale

$$D_t^2 u - \Delta u = 0, \quad u(t=0) = f \quad D_t u(t=0) = g$$

s'écrit

$$u(t, x) = G'(t)u_0 + G(t)u_1$$

où  $G(t) = \cos(t(-\Delta)^{1/2})$ .

Cette décomposition de la solution générale de l'équation des ondes permet de mettre en évidence la propagation à vitesse finie des ondes, qui, physiquement, correspond au fait que si l'on agite l'une des extrémités d'une corde, il faut un certain temps pour que l'autre extrémité s'en trouve affectée. Mathématiquement, cela correspond à l'énoncé suivant.

**Théorème 29.** *Notons  $K$  le noyau de Schwartz de  $G$ , c'est-à-dire la distribution  $K \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times M \times M)$  telle que (avec des notations abusives)*

$$(G(t)u)(x) = \int_M K(t, x, y)u(t, y)dy$$

On a alors

$$\operatorname{supp}(K) \subset \{(t, x, y) \in \mathbb{R} \times M \times M, \delta(x, y) \leq |t|\}$$

Ici, pour définir  $\delta$ , on écrit  $\Delta = \sum_{i=1}^m f_i^2 + \sum_{i=1}^m \operatorname{div}_\mu(f_i)f_i$ , et  $\delta$  est alors la distance sous-riemannienne associée aux champs de vecteurs  $f_i$  par les définitions 2, 3 et 4.

**Idée de preuve.** Dans le contexte riemannien, ce résultat est classique et prouvé par exemple dans [Jaf]. Le cas sous-riemannien s'obtient par passage à la limite du cas riemannien et a été prouvé pour la première fois dans [Mel86]. Donnons brièvement l'idée de la preuve. Soit  $h$  une métrique riemannienne lisse quelconque sur  $M$  et posons  $g_\varepsilon = g + \varepsilon h$ . La distance associée à  $g_\varepsilon$  est notée  $\delta_\varepsilon$  et le laplacien riemannien associé à  $g_\varepsilon$  est noté  $\Delta_\varepsilon$ . Le noyau de Schwartz de l'équation des ondes associée à  $\Delta_\varepsilon$  est noté  $K_\varepsilon$ . On peut alors vérifier que  $\delta_\varepsilon \rightarrow \delta$  uniformément et  $\operatorname{supp}(K_\varepsilon) \rightarrow \operatorname{supp}(K)$ , au sens où pour tout point  $(t, x, y) \in \operatorname{supp}(K)$ , il existe une suite de réels  $(\varepsilon_j)$  tendant vers 0 et une suite de points  $(t_j, x_j, y_j) \in \operatorname{supp}(K_{\varepsilon_j})$  tels que  $(t_j, x_j, y_j) \rightarrow (t, x, y)$ . Du fait de ces deux convergences, le théorème 29 est une conséquence directe de son analogue riemannien (à savoir  $\operatorname{supp}(K_\varepsilon) \subset \{(t, x, y) \in \mathbb{R} \times M \times M, \delta_\varepsilon(x, y) \leq |t|\}$ ), prouvé dans [Jaf].

**Propagation des singularités.** Dans ce paragraphe, nous allons évoquer une deuxième propriété importante de l'équation des ondes, la propagation des singularités. Pour l'équation de la chaleur, toute singularité dans la donnée initiale est immédiatement lissée, c'est-à-dire que pour tout  $t > 0$ , on a  $u(t, \cdot) \in C^\infty$ , même si  $u(0, \cdot) \notin C^\infty$ . Ce n'est pas le cas pour les équations hyperboliques, dont l'exemple le plus typique est l'équation des ondes. Les singularités de la donnée initiale se propagent, comme l'ont mis en évidence pour la première fois Hörmander et Duistermaat dans [DH72]. Cette propagation est analysée au niveau microlocal, c'est-à-dire que les singularités ne sont pas mesurées dans l'espace physique mais dans l'espace des phases, au travers de la notion de front d'onde. Nous définissons le front d'onde, noté  $WF$ , dans le cas euclidien, mais il n'est pas difficile de transposer cette définition au cas d'une variété lisse en utilisant une carte locale.

**Définition 30.** Si  $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ , alors  $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$  s'il existe une fonction  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , égale à 1 dans un voisinage de  $x_0$ , et un voisinage conique  $\Gamma$  de  $\xi_0$  dans  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , tel que pour tout  $N > 0$ , il existe  $C_N > 0$  tel que

$$|\widehat{\phi u}(\xi)| \leq C_N (1 + |\xi|)^{-N}, \quad \forall \xi \in \Gamma$$

**Remarque 31.** Si l'on introduit la projection canonique  $\pi : T^*X \setminus \{0\} \rightarrow X$ , alors

$$\pi(WF(u)) = \text{sing supp } u,$$

où le support singulier, noté  $\text{sing supp}$ , est le complément du plus grand ouvert de  $X$  sur lequel  $u$  coïncide avec une fonction infiniment différentiable.

Le théorème de propagation des singularités décrit le lien entre  $WF(u(t_1, \cdot))$  et  $WF(u(t_2, \cdot))$  pour des temps  $t_1, t_2$  distincts et  $u$  une solution de l'équation des ondes (13).

**Définition 32.** Considérons une fonction  $a = a(x, \xi) \in C^2(T^*M)$  à valeurs réelles, que l'on appelle hamiltonien. On note  $\omega$  la 2-forme canonique sur  $T^*M$ . Le champ hamiltonien  $H_a(x, \xi)$  associé au hamiltonien  $a(x, \xi)$  est défini par l'égalité  $da(Y) = \omega(H_a, Y)$  pour tout champ de vecteurs  $Y$ . Ses courbes intégrales sont appelées les bicaractéristiques. Pour  $(x, \xi) \in T^*M$ , on note ces courbes intégrales  $t \rightarrow \Phi_{H_b}^t(x, \xi) = (x(t), \xi(t))$ , qui vérifient

$$\left( \frac{dx}{dt}, \frac{d\xi}{dt} \right) = H_a(x(t), \xi(t))$$

$$x(0) = x, \quad \xi(0) = \xi.$$

Une bicaractéristique incluse dans l'ensemble  $\{a = 0\}$  est appelée bicaractéristique nulle.

Pour énoncer le théorème de propagation des singularités, on a aussi besoin de la définition suivante.

**Définition 33.** Le symbole d'un opérateur différentiel  $P = p(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha$  est le polynôme  $p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ . Son symbole principal, noté  $\sigma(P)$ , est le polynôme homogène  $p(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ .

Le théorème de propagation des singularités dans le cadre riemannien s'écrit alors comme suit.

**Théorème 34.** Soit  $M$  une variété riemannienne et  $\Delta$  le laplacien riemannien associé. Soit  $u \in \mathcal{D}'(M)$  une solution de l'équation des ondes (13) et  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow T^*M$  une bicaractéristique nulle pour le hamiltonien  $a(x, \xi) = \sigma(\Delta)$ , le symbole principal de  $\Delta$ . Alors

$$\gamma(t_0) \in WF(u) \Rightarrow \gamma(t_1) \in WF(u)$$

c'est-à-dire que les singularités se propagent le long des bicaractéristiques nulles.

On en trouvera une preuve particulièrement claire par exemple dans [Ler11] (section 1.2.3).

Si l'on remplace dans l'équation des ondes le laplacien riemannien par un laplacien sous-riemannien  $\Delta_{sR}$  de symbole principal  $a$ , le champ hamiltonien  $H_a$  peut s'annuler, on peut avoir simultanément  $a = 0$  et  $da = 0$ , et les bicaractéristiques ne sont donc plus correctement définies. Pour prouver un théorème de propagation des singularités, au vu de la définition 32, il faut nécessairement introduire une généralisation des bicaractéristiques, ce qui n'a jusqu'à présent jamais été fait rigoureusement. Certains cas particuliers ont toutefois été traités. Par exemple [LL82] traite le cas où la surface  $\Sigma = \{a = 0, da = 0\}$  est symplectique, c'est-à-dire que la restriction de la 2-forme canonique  $\omega$  à  $\Sigma$  est symplectique. Dans un tel cas, la structure sous-riemannienne correspondante n'a aucune anormale. Un cas sous-riemannien n'ayant aucune anormale "se comporte comme" un cas riemannien, et la généralisation immédiate n'est alors pas étonnante. Si la structure comporte des anormales, la variété caractéristique n'est alors plus symplectique et la question est alors totalement ouverte.

## Références

- [BFT06] Bernard Bonnard, Ludovic Faubourg, and Emmanuel Trélat. *Mécanique céleste et contrôle des véhicules spatiaux*, volume 51. Springer Science & Business Media, 2006.
- [BR96] André Bellaïche and Jean-Jacques Risler. Sub-riemannian geometry, volume 144 of Progress in Mathematics, 1996.
- [CDPT07] Luca Capogna, Donatella Danielli, Scott Pauls, and Jeremy Tyson. *An introduction to the Heisenberg group and the sub-Riemannian isoperimetric problem*, volume 259. Springer Science & Business Media, 2007.
- [CJT06] Yacine Chitour, Frédéric Jean, and Emmanuel Trélat. Genericity results for singular curves. *Journal of differential Geometry*, 73(1) :45–73, 2006.
- [DH72] Johannes J Duistermaat and Lars Hörmander. Fourier integral operators. II. *Acta mathematica*, 128(1) :183–269, 1972.
- [dVHT18] Yves Colin de Verdière, Luc Hillairet, and Emmanuel Trélat. Spectral asymptotics for sub-riemannian laplacians, I : Quantum ergodicity and quantum limits in the 3-dimensional contact case. *Duke Mathematical Journal*, 167(1) :109–174, 2018.
- [GJ15] Roberta Ghezzi and Frédéric Jean. Hausdorff volume in non equiregular sub-riemannian manifolds. *Nonlinear Analysis*, 126 :345–377, 2015.
- [Hai11] Martin Hairer. On Malliavin's proof of Hörmander's theorem. 2011.
- [HL07] Martin Hairer and Piotr Lugiewicz. Introduction to Hypoelliptic Schrödinger type operators. 2007.
- [Hör67] Lars Hörmander. Hypoelliptic second order differential equations. *Acta Mathematica*, 119(1) :147–171, 1967.
- [Jaf] Ethan Jaffe. Wave equation on manifolds and finite speed of propagation.
- [Lau93] J-P Laumond. Controllability of a multibody mobile robot. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 9(6) :755–763, 1993.
- [Ler11] Nicolas Lerner. *Metrics on the phase space and non-selfadjoint pseudo-differential operators*, volume 3. Springer Science & Business Media, 2011.
- [LL82] B Lascar and R Lascar. Propagation des singularités pour des équations hyperboliques à caractéristiques de multiplicité au plus double et singularités maslovienues II. *Journal d'Analyse Mathématique*, 41(1) :1–38, 1982.
- [LS95] Wensheng Liu and Hector Sussmann. *Shortest paths for sub-riemannian metrics on rank-two distributions*, volume 564. American Mathematical Soc., 1995.
- [Mal78] Paul Malliavin. Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators. In *Proc. Internat. Symposium on Stochastic Differential Equations, Kyoto Univ., Kyoto, 1976*. Wiley, 1978.

- [Mel86] Richard Melrose. Propagation for the wave group of a positive subelliptic second-order differential operator. In *Hyperbolic equations and related topics*, pages 181–192. Elsevier, 1986.
- [Mon95] Richard Montgomery. A survey of singular curves in sub-riemannian geometry. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 1(1) :49–90, 1995.
- [Mon06] Richard Montgomery. *A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications*. Number 91. American Mathematical Soc., 2006.
- [Pet08] Jean Petitot. *Neurogéométrie de la vision : modèles mathématiques et physiques des architectures fonctionnelles*. Editions Ecole Polytechnique, 2008.
- [RT05] Ludovic Rifford and Emmanuel Trélat. Morse-Sard type results in sub-riemannian geometry. *Mathematische Annalen*, 332(1) :145–159, 2005.
- [Tre05] Emmanuel Trelat. *Contrôle optimal : théorie et applications*. Vuibert Paris, 2005.