Mémoire de $1^{\text{ère}}$ année
Les fonctions presque périodiques

Colin Davalo
Balthazar Fléchelles

6 juillet 2018

Résumé

Afin de décrire le mouvement des planètes, dès l'antiquité, Ptolémée cherchait à décomposer leur mouvement en somme de mouvements circulaires. Lorsque ces mouvements ont des périodes avec des rapports rationnels entre elles, le mouvement est périodique, et la théorie de Fourier permet d'étudier ces mouvement comme somme de mouvements circulaires. Cepandant, si les périodes sont quelconques, on obtient des mouvements qui ne sont pas rigoureusement périodiques.

Nous commencerons par étudier cette notion de manière élémentaire en suivant les étapes proposées par Besicovitch dans [3]. Puis nous généraliserons cette notion en remplaçant $\mathbb{R}$ par un groupe topologique quelconque.

Nous montrerons l'existence d'une valeur moyenne pour les fonctions presque-périodiques en utilisant une construction de Von Neumann [1]. Puis nous exposerons une preuve du théorème de Peter-Weyl en suivant un article du blog de Terence Tao [5], pour en déduire la densité des polynômes trigonométriques dans l'espace des fonctions presque périodiques dans le cas de $\mathbb{R}$, en suivant la méthode de [4]. Enfin nous établirons l'existence pour tout groupe topologique G d'un groupe compact G_0 par lequel toute fonction presque périodique sur G peut se factoriser en une application continue, et nous en donnerons une construction.

Table des matières

1 Les fonctions uniformément presque périodiques : approche de Bésichovitch **2**
- 1.1 Définition . . . 2
- 1.2 Définition par la normalité . . . 3
- 1.3 Propriétés de stabilité . . . 3
- 1.4 Polynômes trigonométriques . . . 5

2 Fonctions presque périodiques sur un groupe topologique **5**
- 2.1 Définition et premières propriétés . . . 5
- 2.2 Métrique adaptée aux fonctions presque périodiques . . . 8
- 2.3 Valeur moyenne d'une fonction presque périodique . . . 9
- 2.4 Quelques résultats sur les représentations de groupes compacts . . . 13
- 2.5 Théorème de Peter Weyl . . . 14
- 2.6 Théorèmes d'approximation uniforme . . . 17

3 Application à l'étude des fonctions presque périodiques **18**
- 3.1 Le théorème d'approximation de Bohr . . . 18
- 3.2 Factorisation des fonctions presque périodiques . . . 19
- 3.3 Un compactifié universel . . . 20

1 Les fonctions uniformément presque périodiques : approche de Bésichovitch

1.1 Définition

Dans ce paragraphe, $(E, \|\cdot\|)$ désignera un espace vectoriel normé quelconque. Dans la suite, on s'intéressera surtout au cas où $E = \mathbb{C}$.

Définition 1.1 *Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans E. Un réel $T \geq 0$ est une période de f si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x+T)$.*

Soit $\epsilon > 0$, un réel $T \geq 0$ est une ϵ-quasi période si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \|f(x) - f(x+T)\| < \epsilon$$

.

On note $E(\epsilon, f)$ l'ensemble des ϵ-quasi périodes de f.

Une fonction périodique est une fonction f qui admet une période $T \neq 0$. Une telle fonction admet alors forcément de nombreuses périodes : ces dernières forment un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$.

Définition 1.2 *Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite relativement dense (abrégé en r.d) si il existe $l > 0$ tel que tout segment I de longueur l a une intersection non vide avec A. Un tel réel l est appelé longueur d'inclusion de A.*

Pour une fonction périodique, l'ensemble des périodes est relativement dense, ce qui motive la définition suivante.

Définition 1.3 *Une fonction réelle continue $f : \mathbb{R} \to E$ est dite uniformément presque périodique (abrégé en u.p.p) si pour tout ϵ, l'ensemble $E(\epsilon, f)$ des ϵ-quasi périodes est relativement dense.*

Cette définition implique quelques propriétés utiles, similaires à celles des fonctions périodiques continues.

Proposition 1.1 *Soit f une fonction u.p.p, alors elle est bornée, et uniformément continue.*

Preuve: Soit f une fonction u.p.p : montrons que f est bornée. Puisque $E(1, f)$ est r.d, il existe $\ell > 0$ tel que tout segment de la forme $[x - \ell, x]$ avec $x \in \mathbb{R}$ contient une 1-quasi période $\tau_x \in E(1, f)$.

De plus, f étant continue sur le segment $[0, \ell]$, elle est bornée et l'on dispose de $M > 0$ tel que $\forall x \in [0, \ell], \|f(x)\| \leq M$.

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\|f(x)\| \leq \|f(x) - f(x - \tau_x)\| + \|f(x - \tau_x)\| \leq M + 1$$

Car $x - \tau_x \in [0, \ell]$, et τ_x est une 1-quasi période de f. Donc f est bornée.

Montrons à présent l'uniforme continuité de f. Soit $\delta > 0$. On dispose de ℓ longueur d'inclusion de $E(\frac{\delta}{3}, f)$ car f est u.p.p.

Alors f est continue sur le segment $[0, \ell + 1]$, donc f est uniformément continue sur ce segment. Il existe donc $1 > \eta > 0$ tel que si $x, y \in [0, \ell + 1]$ et $|x - y| \leq \eta$ alors $\|f(x) - f(y)\| \leq \frac{\delta}{3}$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x - y| \leq \eta$, on trouve $\tau \in E(\frac{\delta}{3}, f)$ tel que $x, y \in [\tau, \tau + \ell + 1]$. On remarque que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|f(x - \tau) - f(y - \tau)\| + \|f(x - \tau) - f(x)\| + \|f(y) - f(y - \tau)\|$$

D'où $\|f(x) - f(y)\| \leq \delta$. Ainsi, f est bien uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

□

1.2 Définition par la normalité

Une peut donner une définition topologique des fonctions uniformément périodique, comme le justifie la proposition suivante.

Notation 1 *Soit $f : \mathbb{R} \to E$, et T un réel, on note $\tau_T f$ la fonction qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $f(x+T)$.*

Proposition 1.2 *Soit f un fonction, f est u.p.p. si et seulement si pour toute suite de réels $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut trouver une extractrice ϕ telle que la suite de fonctions $\tau_{\phi(n)} f : x \mapsto f(x + h_{\phi(n)})$ converge uniformément.*

On appelle cette propriété équivalente la propriété de normalité. On remarque qu'on peut la reformuler en la propriété purement topologique suivante (c.f. Sternberg [4]) : f est u.p.p. si et seulement si $\{\tau_h f, h \in \mathbb{R}\}$ est relativement séquentiellement compact dans l'espace des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans E muni de la norme uniforme.

Preuve: Considérons f une fonction u.p.p, et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Soit $\epsilon > 0$, et $l > 0$ une longueur d'inclusion de $E(\epsilon, f)$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on dispose de $0 \leq r_n \leq l$ tel que $h_n - r_n \in E(\epsilon, f)$. On peut donc trouver une extractrice ϕ et un réel $0 \leq r \leq l$ tels que $(r_{\phi(n)})$ converge vers r. Alors, à partir d'un certain rang n_0, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $n, m > n_0$:

$$\|f(x+h_n) - f(x+h_m)\| \leq 2\epsilon + \|f(x+r_n) - f(x+r_m)\| \leq 3\epsilon$$

On applique ce procédé avec $\epsilon = \frac{1}{n}$, pour obtenir une extractrice ϕ_n, puis on considère l'extractrice diagonale ψ dont l'expression en $n \in \mathbb{N}$ est :

$$\psi(n) = \phi_n \circ \ldots \circ \phi_2 \circ \phi_1(n)$$

Ainsi pour tout entier n, il existe n_0 tel que si $n \geq n_0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\|f(x + h_{\psi(n)}) - f(x + h_{\psi(m)})\| \leq \frac{3}{n}$$

Donc $\tau_{h_{\psi(n)}} f$ converge uniformément.

À présent, si f n'est pas *u.p.p*, construisons une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne satisfait pas le second énoncé.

Pour cela, il suffit de trouver $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour un certain $\epsilon > 0$ et pour toute paire d'entiers $n \neq m$, la différence $h_m - h_n$ n'est pas une ϵ-période. Aucune sous-suite de $(\tau_{h_n} f)_n$ ne saurait en effet converger uniformément, car deux termes quelconques de cette suite sont au moins distants de ϵ en norme uniforme.

Soit donc $\epsilon > 0$ tel que $E(\epsilon, f)$ ne soit pas r.d. On construit $(h_n)_n$ par récurrence : on pose $h_0 = 0$, puis on suppose $h_0, \ldots, h_n$ définis. Soit $M = \max_{0\leq i\leq n} h_i$ et $m = \min_{0\leq i\leq n} h_i$. Puisque $E(\epsilon, f)$ n'est pas r.d, il existe un intervalle de la forme $[a+m, a+M]$ où $a \in \mathbb{R}$ ne contenant aucune ϵ-période. Alors on pose $h_{n+1} = -a$. Par conséquent, si $0 \leq k \leq n$ alors $h_k - h_{n+1} \in [a+m, a+M]$, et donc ce n'est pas une ϵ-période. De plus $h_{n+1} - h_k$ n'est pas non plus une ϵ-période.

La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convient donc, et on en déduit que f ne satisfait pas la propriété de normalité. □

1.3 Propriétés de stabilité

Les fonctions uniformément presque périodiques ont des propriétés de stabilité intéressantes : leur classe est stable par opérations continues et par limite uniforme. Ces résultats peuvent être montrés en repartant de la définition initiale, mais nous allons ici les prouver en utilisant la propriété de normalité.

On considère E' un espace vectoriel normé (qui sera égal $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dans la suite).

On suppose également à partir de maintenant que E est de dimension finie.

Proposition 1.3 *Soient $f_1, f_2, \ldots, f_m$ des fonctions u.p.p, et $F : E^n \to E'$ une application continue.*
Alors $x \mapsto F(f_1(x), \ldots, f_m(x))$ est u.p.p.

En fait, nous allons montrer le résultat plus général suivant :

Proposition 1.4 *Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions u.p.p, et $F : \mathbb{E}^{\mathbb{N}} \to E'$ une application continue (pour la topologie produit de $\mathbb{E}^{\mathbb{N}}$).*
Alors $h : x \mapsto F(f_0(x), f_1(x), \ldots)$ est u.p.p.

Preuve: Pour $i \in \mathbb{N}$, on pose $M_i = \|f_i\|_\infty$. F est continue sur le compact $K = \prod_{i\in\mathbb{N}} B(0, M_i)$, où $B(0, M_i)$ est la boule de centre 0 et de rayon M_i dans E (de dimension finie). Donc F est uniformément continue sur K, pour la norme N définie par l'expression, si $x = (x_i)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$N(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\min(1, \|x_i\|)}{2^n}$$

qui engendre la topologie produit sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Nous allons utiliser la propriété de normalité. Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On dispose pour tout entier i d'une extractrice ϕ_i telle que $\left(\tau_{h_{\phi_i(n)}} f_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

On considère l'extractrice ψ donnée pour $n \in \mathbb{N}$ par l'expression

$$\psi(n) = \phi_n \circ \ldots \circ \phi_2 \circ \phi_1(n)$$

Ainsi, toutes les suites $\left(\tau_{h_{\psi(n)}} f_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément pour $i \in \mathbb{N}$. Posons g_i leurs limites respectives.

Alors, par le théorème de convergence dominée appliqué aux séries :

$$N\left((\tau_{h_{\psi(n)}} f_0, \tau_{h_{\psi(n)}} f_1, \ldots) - (g_0, g_1, \ldots)\right) \to 0$$

Donc par continuité de F, $\tau_{h_{\phi(n)}} h$ converge vers $F(g_0, g_1, \ldots)$.

□

On en déduit le résultat suivant :

Proposition 1.5 *Si f_1 et f_2 sont deux fontions u.p.p, alors $f_1 + f_2$ et $f_1 f_2$ le sont également.*

Il est possible de montrer ce résultat sans passer par la propriété de normalité, comme cela est fait dans [3].

Proposition 1.6 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions u.p.p qui converge uniformément vers f. Alors f est u.p.p.*

Preuve: Soit $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

Soit $i \in \mathbb{N}$, f_i étant u.p.p, on dispose d'une extractrice ϕ_i telle que $\left(\tau_{h_{\phi_i(n)}} f_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément, par la propriété de normalité.

L'extraction diagonale ψ définie comme dans la preuve précédente vérifie alors que $\left(\tau_{h_{\psi(n)}} f_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Les suites $\left(\tau_{h_{\psi(n)}} f_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc de Cauchy. Montrons que $\tau_{h_{\psi(n)}} f$ l'est également. Soit $\epsilon > 0$, il existe un entier i_0 tel que $\|f_{i_0} - f\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{2}$ ainsi qu'un entier N tel que si $n, m > N$, alors :

$$\|\tau_{h_{\phi_i(n)}} f_{i_0} - \tau_{h_{\phi_i(m)}} f_{i_0}\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Ainsi, puisque pour tout entier k : $\|\tau_{h_k} f_{i_0} - \tau_{h_k} f\|_\infty = \|f_{i_0} - f\|_\infty$, on obtient que :

$$\|\tau_{h_{\phi_i(n)}} f - \tau_{h_{\phi_i(m)}} f\|_\infty \leq \epsilon$$

On en déduit que $\tau_{h_{\psi(n)}} f$ est de Cauchy, d'où le résultat. □

Nous avons besoin ici que E soit complet, ce qui est le cas car on le suppose de dimension finie.

1.4 Polynômes trigonométriques

Définition 1.4 *On appelle $\mathcal{T}$ l'espace des polynômes trigonométriques généralisés, qui est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ engendré par les applications de la forme : $e_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Lorsque l'on impose que λ soit un multiple d'une période T, on obtient des polynômes trigonométriques au sens classique. Dans ce cas on montre que l'adhérence pour la norme de convergence uniforme de l'espace qu'ils engendrent est exactement l'espace des fonctions periodiques continues : c'est le théorème de Weierstrass.

Un de nos objectifs sera de montrer une version de ce résultat pour les fonctions presque périodiques. Nous pouvons déjà montrer le résultat suivant :

Proposition 1.7 *Les éléments de $\overline{\mathcal{T}}$, l'adhérence de $\mathcal{T}$ pour la norme uniforme, sont des fonctions u.p.p.*

Preuve: Les applications e_λ sont périodiques, donc u.p.p., donc leurs combinaisons linéaires le sont également (par continuité des sommes finies). Ainsi les fonctions de $\mathcal{T}$ sont u.p.p..

De plus, l'espace des fonctions u.p.p est stable par limite uniforme, donc toutes les fonctions de $\overline{\mathcal{T}}$ sont u.p.p. □

La preuve du théorème suivant sera un des objectifs de la prochaine section :

Théorème 1.1 *Les fonctions uniformément périodiques à valeurs dans $\mathbb{C}$ sont exactement les fonctions qui sont limite uniforme de polynômes trigonométriques généralisés.*

2 Fonctions presque périodiques sur un groupe topologique

L'objectif de cette partie sera de montrer des résultats plus généraux sur les fonctions presque périodiques sur un groupe topologique.

2.1 Définition et premières propriétés

La notion de fonction presque périodique peut s'étendre à tous les groupes topologiques. Soit G un groupe topologique et E un espace vectoriel normé de dimension finie.

On utilisera la définition française de la compacité : un espace compact est un espace qui satisfait la propriété de Borel-Lebesgue et qui est séparé. S'il ne satisfait que la propriété de Borel-Lebesgue, il est dit quasi-compact.

Pour définir la notion de fonction presque périodique sur un groupe G, il suffit de définir ce qu'est une ϵ-période, et un ensemble relativement dense dans G.

Notation 2 *Soit f un fonction de G vers E, et $h \in G$, on pose :*

$$\lambda_h f : (g_1, g_2) \in G \times G \mapsto f(g_1 h g_2)$$

Définition 2.1 *Soit $f : G \to E$ et $\epsilon > 0$, un élément $h \in G$ est une ϵ-période de f si :*

$$\|\lambda_h f - \lambda_{e_G} f\|_\infty < \epsilon$$

On note $E(\epsilon, f)$ l'ensemble des ϵ-périodes de f.

Une partie A de G est dite relativement dense (abrégé en r.d) s'il existe un quasi-compact K tel que pour tout $(g_1, g_2) \in G \times G$:

$$g_1 K g_2 \cap A \neq \varnothing$$

Un tel quasi-compact est appelé compact d'inclusion de A.

On peut donc généraliser la notion de fonction presque périodique comme suit.

Définition 2.2 *Une fonction continue de G dans E est dite presque périodique (abrégé en p.p) si pour tout $\epsilon > 0$, les ensembles $E(\epsilon, f)$ des ϵ-périodes de f sont relativement denses dans G.*

On note $\mathcal{C}_{p.p}(G)$ l'ensemble des fonctions presque périodiques de G vers $\mathbb{C}$.

Proposition 2.1 *Soit f un fonction de G vers E et $\epsilon > 0$, alors l'ensemble des ϵ-périodes de f est stable par inverse et par conjugaison.*

De plus, si $u, v \in E(\epsilon, f)$, alors pour tout $h \in G$, $(u, v) \in E(2\epsilon, \lambda_h f)$. En particulier, si f est presque périodique, alors $\lambda_h f$ est presque périodique pour tout $h \in G$.

Preuve: Soient $g \in E(\epsilon, f)$ et $g_1, g_2 \in G \times G$, alors :

$$\|f(g_1 g^{-1} g_2) - f(g_1 g_2)\| = \|f\left((g_1)g(g^{-1}g_2)\right) - f\left((g_1)(g^{-1}g_2)\right)\| \leq \epsilon$$

donc $g^{-1} \in E(\epsilon, f)$.

De plus, soit $h \in G$ et $g_1, g_2 \in G \times G$ alors :

$$\|f(g_1 h g h^{-1} g_2) - f(g_1 g_2)\| = \|f\left((g_1 h)g(h^{-1}g_2)\right) - f\left((g_1 h)(h^{-1}g_2)\right)\| \leq \epsilon$$

donc $hgh^{-1} \in E(\epsilon, f)$. L'ensemble des ϵ-périodes est donc stable par inverse et conjugaison.

Soit $h \in G$, $u, v \in E(\epsilon, f)$, alors pour tout $(g_1, g_2), (h_1, h_2) \in G \times G$, on calcule :

$$\begin{aligned}\|\lambda_{(u,v)}\lambda_h f((g_1, g_2), (h_1, h_2)) - \lambda_{e_G}\lambda_h f((g_1, g_2), (h_1, h_2))\| &= \|f(g_1 uavh_2) - f(g_1 ah_2)\| \\ &= \|f((g_1)u(avh_2)) - f((g_1)(av^{-1}a^{-1})(avh_2))\| \leq 2\epsilon\end{aligned}$$

(en posant $a = h_1 h g_2$) puisque $u, av^{-1}a^{-1} \in E(\epsilon, f)$.

Ainsi, $\lambda_h f$ est presque périodique car si K est un compact d'inclusion pour $E(\epsilon, f)$, alors $K \times K$ en est un pour $E(2\epsilon, \lambda_h f)$.

□

Proposition 2.2 *Soit f une fonction presque périodique de G dans E, alors l'application $h \mapsto \lambda_h f$ est continue pour la norme uniforme.*

En particulier f est uniformément continue.

Preuve: Soit $h_0 \in G$, $\epsilon > 0$ et K un compact d'inclusion de $E(\epsilon, f)$.

L'application $(x, y, z) \in G^3 \mapsto \|f(xyz) - f(xh_0 z)\|$ étant continue, on dispose pour tout $(g_1, g_2) \in G \times G$ d'un ouvert $U_{g_1,g_2} \subset G \times G$ contenant (g_1, g_2) et d'un ouvert $V_{g_1,g_2} \subset G$ contenant h_0 tels que si $(g_1', g_2', h) \in U_{g_1,g_2} \times V_{g_1,g_2}$, alors $\|f(g_1' h g_2') - f(g_1' h_0 g_2')\| < \epsilon$. Mais alors :

$$K \times K \subset \bigcup_{(g_1,g_2) \in K \times K} U_{g_1,g_2}$$

Par quasi-compacité de $K \times K$, on choisit une partie finie $F \subset K \times K$ finie telle que :

$$K \times K \subset \bigcup_{(g_1,g_2) \in F} U_{g_1,g_2}$$

Soit alors $V = \cap_{(g_1,g_2) \in F} V_{g_1,g_2}$ (qui est ouvert comme intersection finie d'ouverts), on a pour tout $(g_1, g_2) \in K \times K$ et pour tout $h \in V$: $\|f(g_1 h g_2) - f(g_1 h_0 g_2)\| < \epsilon$

Soient $(g_1, g_2) \in G \times G$. Il existe $t_1, t_2 \in E(\epsilon, f)$ des ϵ-périodes de f telles que $t_1 g_1 \in K$ et $t_2 g_2 \in K$. Pour h dans V, on a donc :

$$\|f(g_1 h g_2) - f(g_1 h_0 g_2)\| < 4\epsilon + \|f(t_1 g_1 h t_2 g_2) - f(t_1 g_1 h_0 t_2 g_2)\| < 5\epsilon$$

D'où $\|\lambda_h f - \lambda_{h_0} f\|_\infty < 5\epsilon$ pour tout $h \in V$, donc $h \mapsto \lambda_h f$ est continue pour la norme uniforme.

En particulier, si $h_0 = e_G$ et $x, y \in G$ satisfont $xy^{-1} \in V$, alors $\|f(x) - f(y)\| < 5\epsilon$: f est uniformément continue. □

Proposition 2.3 *Une fonction continue de G dans E est presque périodique si et seulement, la famille $\{\lambda_h f | h \in G\}$ est séquentiellement relativement compacte pour la convergence uniforme.*

Cette propriété s'appelle propriété de normalité*. Une telle fonction est dite normale.*

Preuve: Soit f une fonction presque périodique, et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de G.

Soit $\epsilon > 0$, nous allons chercher une extractrice ϕ telle que pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $\|\lambda_{a_{\phi(n)}} f - \lambda_{a_{\phi(m)}} f\|_\infty \leq \epsilon$. En effet, si on peut trouver une telle extractrice pour tout $\epsilon > 0$, on dispose en extrayant diagonalement d'une sous suite de Cauchy de la suite $\{\lambda_{a_i} f\}_{i\in\mathbb{N}}$, qui converge donc (l'espace des fonctions continues de G vers E étant complet pour la norme uniforme).

Montrons l'existence d'une telle extractrice. Soit K un compact d'inclusion de $E(\frac{\epsilon}{3}, f)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $t_n \in E(\frac{\epsilon}{3}, f)$ telle que $t_n a_n \in K$

Ainsi, par quasi-compacité de K, et par continuité uniforme de $h \mapsto \lambda_h f$ sur K (assurée par la proposition 2.2), on dispose d'une extractrice ϕ telle que pour tous $n, m \in \mathbb{N}$:

$$\|\lambda_{t_{\phi(n)} a_{\phi(n)}} f - \lambda_{t_{\phi(n)} a_{\phi(n)}} f\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{3}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, t_n est une $\frac{\epsilon}{3}$-période de f donc :

$$\|\lambda_{a_{\phi(n)}} f - \lambda_{a_{\phi(n)}} f\|_\infty \leq \epsilon$$

Le résultat suit.

À présent soit f une fonction continue sur G qui n'est pas presque périodique, et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de G. Il existe $\epsilon > 0$ tel que $E(\epsilon, f)$ ne soit pas relativement dense.

On pose $\phi(0) = 0$. Supposons avoir défini $\phi(0), \ldots, \phi(n)$ (où $n \in \mathbb{N}$) tels que pour tout $0 \leq i \neq j \leq n$, $a_{\phi(i)} a_{\phi(j)}^{-1}$ n'est pas une ϵ-période de f.

Considérons $K = \{a_{\phi(i)} | 0 \leq i \leq n\}$. C'est un quasi-compact, donc puisque $E(\epsilon, f)$ n'est pas relativement dense, on peut trouver $(b_1, b_2) \in G \times G$ tel que pour tout $0 \leq i \leq n$, $b_1^{-1} a_{\phi(i)} b_2^{-1}$ ne soit pas une ϵ-période de f. On pose alors $a_{n+1} = b_1 b_2$, et on vérifie que pour tout $0 \leq i \neq j \leq n+1$, $a_i a_j^{-1}$ n'est pas une ϵ-période de f. En effet, si $0 \leq i \leq n$, alors $a_i a_{n+1}^{-1} = a_i b_2^{-1} b_1^{-1}$ est conjugué à $b_1^{-1} a_{\phi(i)} b_2^{-1}$ qui n'est pas une ϵ-période, donc ce n'est pas une ϵ-période. De plus $a_{n+1} a_i^{-1} = (a_i a_{n+1}^{-1})^{-1}$, donc ce n'est pas non plus une ϵ-période.

On dispose donc d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que les fonctions $\{\lambda_{a_i} f\}_{i\in\mathbb{N}}$ soient deux à deux distantes d'au moins ϵ en norme uniforme, donc f ne satisfait pas la propriété de normalité. $\square$

On montre de même que dans le cas de $\mathbb{R}$ les résultats suivants, en utilisant la normalité de f :

Proposition 2.4 *Soit f une fonction presque périodique de G vers un espace vectoriel de dimension finie E, alors elle est bornée.*

La classe des fonctions presque périodiques de G vers un espace vectoriel de dimension finie E est stable par opérations continues de $E^n \mapsto E$ et par limite uniforme, donc en particulier par addition et multiplication.

Remarque 1 *Si G est un groupe compact, toutes les fonctions continues sont presque périodiques. En effet, si G est compact le singleton $\{e\}$ où e est le neutre de G est relativement dense dans G.*

Cette remarque est intéressante si on la combine avec le résultat suivant :

Proposition 2.5 *Soient G et H deux groupes topologiques, et $\phi : G \to H$ un morphisme continu. Si $\tilde{f} : H \to E$ est presque périodique, alors $f := \tilde{f} \circ \phi$ l'est également.*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & E \\ H \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Preuve: $\{\lambda_h \tilde{f}, h \in H\}$ est séquentiellement relativement compact, donc $\{\lambda_{\phi(g)}\tilde{f}, g \in G\} \subset \{\lambda_h \tilde{f}, h \in H\}$ l'est aussi. Or ϕ est un morphisme de groupes, donc pour tout $g \in G$, $\lambda_g f = \lambda_{\phi(g)}\tilde{f} \circ (\phi \times \phi)$. On en déduit que $\{\lambda_g f | g \in G\}$ est séquentiellement relativement compacte, puis que f est presque périodique. $\square$

Si H est compact, alors f est presque périodique dès lors qu'il existe une application continue $\tilde{f}$ telle que $f = \tilde{f} \circ \phi$. Nous allons dans la suite montrer une réciproque de ce résultat :

Théorème 2.1 *Si f est presque périodique d'un groupe topologique G vers un espace vectoriel de dimension finie E, alors il existe H un groupe compact, ϕ un morphisme continu de G vers H et $\tilde{f}$ une application continue de H vers E tels que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & E \\ H \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

On peut de plus trouver un groupe H et un morphisme continu à image dense $\phi : G \to H$ qui conviennent pour toutes les applications presque péridiques f d'un groupe G donné. Le compactifié de Bohr est l'un de ces groupes.

2.2 Métrique adaptée aux fonctions presque périodiques

Nous allons montrer ici le théorème 2.1. On se donne une fonction presque périodique f sur G, et on cherche à construire un groupe compact H_f et un morphisme continu $\pi_f : G \to H_f$.

Pour cela on munit le groupe G de la semi-distance $\tilde{d}_f$ invariante par translation définie par :

$$\tilde{d}_f(x,y) = \sup_{(g_1,g_2)\in G\times G} \|f(g_1 x g_2) - f(g_1 y g_2)\| = \|\lambda_x f - \lambda_y f\|_\infty$$

Observons que $\{x \in G, \tilde{d}_f(x, e_G) = 0\}$ est un sous-groupe normal de G. En effet, si x, y sont dedans, alors $0 \leq \tilde{d}_f(xy^{-1}, e_G) = \tilde{d}_f(x,y) \leq \tilde{d}_f(x, e_G) + \tilde{d}_f(y, e_G) = 0$, donc xy^{-1} est aussi dedans. Si de plus $x \in G$ vérifie $\tilde{d}_f(x, e_G) = 0$, alors pour tout $h \in G$, $\tilde{d}_f(hxh^{-1}, e_G) = \tilde{d}_f(hx, h) = \tilde{d}_f(x, e_G) = 0$, donc hxh^{-1} est encore dedans.

On considère alors H_f^0 le quotient de G par le sous-groupe précédent, muni de la métrique induite d_f.

Proposition 2.6 *La surjection canonique π_f de G sur H_f^0 est un morphisme continu.*

Preuve: Il suffit de vérifier que π_f est bien continue.

Soient $\epsilon > 0$ et $y \in G$, on pose $\mathcal{O}_{\epsilon,y} = \{\pi_f(x), x \in G, \tilde{d}_f(x,y) < \epsilon\}$. Alors par la proposition 2.2, $\pi_f^{-1}(\mathcal{O}_{\epsilon,y})$ est un ouvert de G.

Or les ouverts $\mathcal{O}_{\epsilon,y}$ pour $\epsilon > 0$ et $y \in G$ engendrent la topologie de H_f^0, donc π_f est continu. $\square$

Le sous-groupe par lequel on a quotienté G est en réalité le groupe des périodes de f. Ainsi f passe au quotient, et définit une unique fonction $f_0 : H_f^0 \to E$.

Proposition 2.7 *L'application f_0 est uniformément continue de (H_f^0, d_f) vers E.*

Preuve: Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de $\tilde{d}_f$, dès que $x, y \in G$ sont tels que $\tilde{d}_f(x,y) \leq \varepsilon$, alors $\|\lambda_x f - \lambda_y f\|_\infty \leq \varepsilon$, donc $\|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$. Tout cela passe au quotient, et le résultat suit. $\square$

Ainsi, on dispose d'un complété H_f de H_f^0, sur lequel l'application f_0 se prolonge en une application $\tilde{f} : H_f \to E$:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_f"'] & E \\ H_f^0 \arrow[ur, "f_0"] \arrow[r, hook] & H_f \arrow[u, "\tilde{f}"'] \end{tikzcd}$$

Proposition 2.8 *Le groupe H_f est compact.*

Preuve: Puisque f est presque périodique, elle est normale. Ainsi, $\{\lambda_h f, h \in G\}$ est relativement séquentiellement compact.

Montrons que $H_f^0 \subset H_f$ est séquentiellement relativement compact.

Soit donc $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de G, il existe φ une extraction telle que $(\lambda_{h_{\varphi(i)}} f)_{i\in\mathbb{N}}$ converge pour $\|\cdot\|_\infty$. Cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n tel que si $i, j \geq n$, alors $\|\lambda_{h_{\varphi(i)}} f - \lambda_{h_{\varphi(j)}} f\|_\infty \leq \varepsilon$, donc que $d_f(\pi_f(h_{\varphi(i)}), \pi_f(h_{\varphi(j)})) \leq \varepsilon$. Ainsi, $(\pi_f(h_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans H_f^0.

Finalement, H_f est séquentiellement compact, donc compact car c'est un espace métrique. □

On a donc montré le théorème 2.1, que l'on a même raffiné en

Théorème 2.2 *Soit $f : G \to E$ une fonction presque périodique. Alors il existe H_f un groupe compact métrisable, $\pi_f : G \to H_f$ un morphisme continu d'image dense, et $\tilde{f} : H_f \to E$ une application continue vérifiant $f = \tilde{f} \circ \pi_f$.*

2.3 Valeur moyenne d'une fonction presque périodique

Un résultat majeur de la théorie des fonctions presque périodiques est l'existence d'une valeur moyenne, qui permet d'adapter les outils de la transformée de Fourier (voir [3]).

Théorème 2.3 *Soit f une fonction u.p.p (de domaine réel) à valeurs dans E de dimension finie, alors :*

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(x+a)\mathrm{d}x$$

converge lorsque $T \to +\infty$ vers une constante notée $M(f)$, uniformément en a.

L'uniformité de la convergence permet de calculer la valeur moyenne de différentes manières, comme par exemple :

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\mathrm{d}x$$

.

Si une fonction à plusieurs variables est uniformément périodique par rapport à la variable x à domaine réel, on notera $M_x(f)$ la valeur moyenne de f lorsque les autres variables sont fixées.

Bésichovitch propose une preuve élémentaire de ce résultat. Nous allons proposer ici une preuve générale valant pour tous les groupes topologiques, en suivant une approche proposée par John von Neumann.

Si G est un groupe compact, on dispose d'une mesure appellée mesure de Haar, et la valeur moyenne d'une fonction f sur ce groupe peut alors être définie comme l'intégrale de f contre la mesure de Haar. On va en fait construire la valeur moyenne sur tout groupe, puis en déduire l'existence de la mesure de Haar sur G.

Notation 3 *Soit f un fonction de G vers E, et $h \in G$. On note $\tau_h f : x \in G \mapsto f(hx)$ et $\tau^h f : x \in G \mapsto f(xh)$ les translatés à gauche et à droite de f.*

Théorème 2.4 *Soit f un fonction presque périodique de G dans E un espace vectoriel normé de dimension finie. On note $\mathcal{E}_f$ (resp. $\mathcal{E}^f$), l'adhérence pour la norme uniforme de $\mathrm{Conv}\{\tau_h f | h \in G\}$ (resp. $\mathrm{Conv}\{\tau^h f | h \in G\}$) l'enveloppe convexe des translatés à gauche (resp. à droite) de f.*

Les espaces $\mathcal{E}_f$ et $\mathcal{E}^f$ contiennent une unique fonction constante, dont la valeur en tout point est notée $M(f)$.

Ce théorème permet en particulier de définir l'intégrale d'une fonction continue sur un groupe compact. On peut définir la mesure de Haar de cette manière.

Preuve: Soient $c_x \in \mathcal{E}_f$ une fonction constante égale à $x \in E$ et $c_y \in \mathcal{E}^f$ une fonction constante égale à $y \in E$. Supposons que $x \neq y$. Soit $\epsilon > 0$ tel que $B(x,\epsilon) \cap B(y,\epsilon) = \varnothing$. Il existe $n, m \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in G$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_m \in [0,1]$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, $\sum_{j=1}^m \mu_j = 1$, $g_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \tau_{a_i} f$ est à valeurs dans $B(x,\epsilon)$, et $g_2 = \sum_{j=1}^m \mu_j \tau^{b_j} f$ est à valeurs dans $B(y,\epsilon)$.

Considérons alors :

$$h = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \lambda_i \mu_j \tau_{a_i}^{b_j} f = \sum_i \lambda_i \tau_{a_i} g_2 = \sum_j \mu_j \tau^{b_j} g_1$$

.

Ainsi, l'image de h est incluse dans l'intersection de l'enveloppe convexe de l'image de g_1 et de l'enveloppe convexe de l'image de g_2, donc h est à valeurs dans $B(x,\epsilon) \cap B(y,\epsilon) = \varnothing$, ce qui est impossible. D'où $x = y$.

Ainsi si $\mathcal{E}_f$ et $\mathcal{E}^f$ contiennent une fonction constante, alors c'est la même. Alors, ni $\mathcal{E}_f$ ni $\mathcal{E}^f$ ne contiennent une autre fonction constante si on admet l'existence de fonctions constantes dans $\mathcal{E}_f$ et $\mathcal{E}^f$, ce qui établit l'unicité modulo l'existence.

Montrons qu'il existe une fonction constante dans $\mathcal{E}_f$. L'existence d'une fonction constante dans $\mathcal{E}^f$ s'obtient par un raisonnement symétrique.

Il suffit de le montrer dans le cas où $E = \mathbb{R}$. En effet, si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, on se place dans une base de E, et on montre que l'on trouve une fonction f_1 dans $\mathcal{E}_f$ dont la première composante est constante. À partir de f_1 on procède de même pour construire une fonction $f_2 \in \mathcal{E}_{f_1} \subset \mathcal{E}_f$ dont les deux premières composantes sont constantes. Et ainsi de suite, on construit une fonction constante dans $\mathcal{E}_f$.

Supposons donc que $E = \mathbb{R}$. Soit h une application de G vers $\mathbb{R}$, on note $\mathrm{Osc}(h) = \sup_{a,b \in G} \|h(a) - h(b)\|$. Les fonctions de l'espace $\mathcal{E}_f$ sont équicontinues et équibornées, car les translatées de f ont toutes le même module d'équicontinuité. Ainsi par le théorème d'Ascoli, $\mathcal{E}_f$ est compact. De plus Osc est continue pour la norme uniforme, donc on dispose d'une application $g_0 \in \mathcal{E}_f$ telle que $\mathrm{Osc}(g_0) = \inf_{F \in \mathcal{E}_f} \mathrm{Osc}(F)$.

Montrons que $\mathrm{Osc}(g_0) = 0$. Si ce n'est pas le cas, alors soient $\mathfrak{m} = \inf g_0$ et $M = \sup g_0$. On pose $m_1 = \frac{M + 2\mathfrak{m}}{3}$ et $M_1 = \frac{2M + \mathfrak{m}}{3}$, puis $U = g_0^{-1}([\mathfrak{m}, m_1[)$, et $V = g_0^{-1}(]M_1, M])$.

g_0 est limite uniforme de combinaisons convexes de translatés de f, qui sont presque périodiques, donc est presque périodique.

Soit $\epsilon = \frac{M - \mathfrak{m}}{6}$, et $K \subset G \times G$ un compact d'inclusion de $E(\epsilon, g_0)$.

On trouve $n, m > 0$ et $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in G \times G$ tels que

$$K \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} a_i^{-1} U \qquad K \subset \bigcup_{1 \leq j \leq m} b_j^{-1} V$$

car U et V sont des ouverts, K est quasi-compact et $K \subset \bigcup_{a \in G} aU$, $K \subset \bigcup_{b \in G} bV$.

On définit alors $g_1 \in \mathcal{E}_f$ par :

$$g_1 : c \in G \times G \mapsto \frac{1}{n+m} \left(\sum_{1 \leq i \leq n} \tau_{a_i} g_0(c) + \sum_{1 \leq j \leq m} \tau_{b_j} g_0(c) \right)$$

.

Soit $c \in G \times G$, on dispose d'une ϵ-période t de g_0 telle que $ct \in K$.

Il existe donc i et j tels que $a_i ct \in U$ et $b_j ct \in V$. Par conséquent, t étant une ϵ-période de g_0, $\tau_{a_i} g_0(c) \leq \epsilon + g_0(a_i ct) \leq \epsilon + m_1 = \frac{M + \mathfrak{m}}{2}$, et de même, $\tau_{b_j} g_0(c) \geq \frac{M + \mathfrak{m}}{2}$.

On en déduit que :

$$\mathfrak{m} + \frac{M - \mathfrak{m}}{2(n+m)} \leq g_1(c) \leq M - \frac{M - \mathfrak{m}}{2(n+m)}$$

Ainsi, $\mathrm{Osc}(g_1) < \mathrm{Osc}(g_0)$, ce qui contredit la minimalité de $\mathrm{Osc}(g_0)$.

Finalement, $\mathrm{Osc}(g_0) = 0$, donc g_0 est constante. □

Démontrons à présent le théorème 2.3.

Preuve: Soit M la valeur moyenne de f définie dans le théorème précédent.

Soit $\epsilon > 0$. On dispose de $n > 0$, de $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ainsi que de $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in [0,1]$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ et, si $g = \sum_{i=1}^n \lambda_i \tau_{a_i} f$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\|M - g(x)\| \leq \epsilon$.

On obtient alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^T g(x+a)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{a_i}^{T+a_i} f(x+a)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x+a)\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_0^{a_i} f(x+a)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_T^{T+a_i} f(x+a)\mathrm{d}x$$

Ainsi,

$$\|\frac{1}{T}\int_0^T f(x+a)\mathrm{d}x - \frac{1}{T}\int_0^T g(x+a)\mathrm{d}x\| \leq \frac{2\|f\|_\infty \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i}{T}$$

Mais

$$\|\frac{1}{T}\int_0^T g(x+a)\mathrm{d}x - M\| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

On en déduit que $\int_0^T f(x+a)\mathrm{d}x$ converge uniformément en a vers M. $\square$

Nous allons également montrer des résultats qui seront utiles pour utiliser la valeur moyenne d'une fonction périodique afin de définir son intégrale :

Proposition 2.9 *Soit f un fonction presque périodique de G dans $\mathbb{R}_+$ non identiquement nulle. Alors $M(f) > 0$.*

Preuve: Soient $U \subset G$ et $\epsilon > 0$ tels que si $x \in U$, $f(x) > 2\epsilon$. Soit K un compact d'inclusion de $E(\epsilon, f)$. Par quasi-compacité de K, on trouve $n \geq 1$ et $a_1, \ldots, a_n \in G$ tels que :

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n a_i^{-1} U$$

On considère alors

$$g = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \tau_{a_i} f.$$

Soit $c \in G \times G$, on dispose d'une ϵ-période t de f telle que $ct \in K$.

Il existe donc i tel que $a_i ct \in U$. t étant une ϵ-période de f, on en déduit que $\tau_{a_i} f(c) \geq f(a_i ct) - \epsilon \geq \epsilon$.

Ainsi, pour tout $c \in G$, $g(c) \geq \frac{\epsilon}{n}$. Donc l'unique fonction constante de $\mathcal{E}_g \subset \mathcal{E}_f$ a une valeur supérieure à $\frac{\epsilon}{n}$, d'où $M(f) \geq \frac{\epsilon}{n} > 0$. $\square$

Proposition 2.10 *L'application $M : \mathcal{C}_{p.p}(G, E) \to E$ est une application linéaire.*

Preuve: Soient f, g deux fonctions presque périodiques sur G à valeurs dans E, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$. Il existe $n > 0$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0;1]$ et $a_1, \ldots, a_n \in G$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ et $\|M(f) - \sum_{i=1}^n \lambda_i \tau_{a_i} f\|_\infty \leq \epsilon$.

On pose $g_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \tau_{a_i} g$ qui est presque périodique. Puisque $\mathcal{E}_{g_1} \subset \mathcal{E}_g$, on a $M(g) = M(g_1)$. Il existe donc $m > 0$, $\mu_1, \ldots, \mu_m \in [0;1]$ et $b_1, \ldots b_m \in G$ tels que $\sum_{j=1}^m \mu_j = 1$ et $\|M(g) - \sum_{j=1}^m \mu_j \tau^{b_j} g\|_\infty \leq \epsilon$.

Alors, par convexité de $B(M(f), \epsilon)$, si on pose $f_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \tau_{a_i} f$, on a $\|M(f) - \sum_{j=1}^m \mu_j \tau^{b_j} f_1\|_\infty \leq \epsilon$.

Mais si on pose

$$h = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j \tau_{a_i}^{b_j}(f + \alpha g) = \sum_j \mu_j \tau^{b_j} f_1 + \alpha \sum_j \mu_j \tau^{b_j} g_1,$$

alors $h \in \mathcal{E}_{f+\alpha g}$ et $\|M(f) + \alpha M(g) - h\|_\infty \leq (1+\alpha)\epsilon$.

Cela donne donc que $\|M(f) + \alpha M(g) - M(f + \alpha g)\| \leq (1+\alpha)\epsilon$ car $M(h) = M(f + \alpha g)$ et que l'inégalité précédente vaudra pour toute combinaison linéaire de translatés de h.

Cela valant pour tout $\epsilon > 0$, on a bien $M(f + \alpha g) = M(f) + \alpha M(g)$. $\square$

Dans la suite, nous aurons besoin de travailler sur l'espace $L^2(G)$ où G est un groupe topologique compact. On pourrait définir $L^2(G)$ comme le complété de l'espace des fonctions de G vers $\mathbb{C}$ pour la norme suivante :

$$\|f\|_2 = \left(M(|f|^2)\right)^{\frac{1}{2}}$$

Pour ne pas avoir à démontrer toutes les propriétés classiques sur cet espace, nous allons montrer que la moyenne que nous venons de définir est l'intégrale par rapport à une mesure de Borel quasi-régulière μ.

Pour cela nous pouvons appliquer le théorème de Riez-Markov.

Définition 2.3 *Une mesure de Borel sur un espace topologique X est une mesure borelienne finie sur les compacts de X.*

Une mesure μ est dite quasi-régulière si :
— *pour tout borélien $A \subset X$: $\mu(A) = \inf\{\mu(U) | A \subset U \text{ ouvert}\}$*
— *pour tout ouvert $A \subset X$: $\mu(A) = \sup\{\mu(K) | K \subset A \text{ compact}\}$*

Théorème 2.5 (Riez-Markov) *Soit X un espace topologique localement compact et séparé, et L une forme linéaire positive de $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$ (fonctions continues à support compact).*

Alors il existe une unique mesure de Borel quasi-régulière μ sur X qui représente L dans le sens où pour tout $f \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$, on a

$$L(f) = \int_X f(x) \mathrm{d}\mu(x)$$

La preuve de ce résultat est détaillée dans [2].

Définition 2.4 *Soit G un groupe topologique compact, et soit $f : G \to E$ une fonction continue. On note alors :*

$$\int_G f(g) \mathrm{d}\mu(g) = M(f)$$

où μ est la mesure donnée par le théorème de Riez-Markov, puisque G est compact donc séparé. Cette mesure s'appelle mesure de Haar *du groupe G.*

On a également un certain résultat d'unicité de l'intégrale de Haar, que l'on peut formuler ainsi :

Proposition 2.11 *Soit G un groupe compact, soit L une forme linéaire sur $\mathcal{C}(G, \mathbb{R})$ positive et invariante par translation à gauche (respectivement à droite). Alors il existe un réel $k \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $f \in \mathcal{C}(G, \mathbb{R})$:*

$$L(f) = kM(f)$$

Preuve: Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on note e_x l'application constante égale à x. On pose $k = L(e_1)$.

Soient $f \in \mathcal{C}(G, \mathbb{R})$ et $\epsilon > 0$. On dispose d'un entier n de $a_1, \dots, a_n \in G$ ainsi que de $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ et pour tout $g \in G$:

$$M(f) - \epsilon \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \tau_{a_i} f \leq M(f) + \epsilon$$

Ainsi, par linéarité, invariance à gauche et positivité de L, $(M(f) - \epsilon)L(e_1) \leq L(f) \leq (M(f) + \epsilon)L(e_1)$, et ce pour tout $\epsilon > 0$.

Donc $L(f) = L(e_1)M(f)$. On procède de même si L est invariante à droite. $\square$

On montre de la même façon la proposition suivante sur les fonctions presque périodiques.

Proposition 2.12 *Soit G un groupe topologique, soit L une forme linéaire sur $\mathcal{C}_{p.p}(G, \mathbb{R})$ positive et invariante par translation à gauche (respectivement à droite). Alors il existe un réel k tel que pour tout $f \in \mathcal{C}_{p.p}(G, \mathbb{R})$:*

$$L(f) = kM(f)$$

2.4 Quelques résultats sur les représentations de groupes compacts

Nous allons considérer dans la suite des représentations unitaires de groupes compacts.

Définition 2.5 *Soit G un groupe topologique. Une représentation unitaire de G est un couple (V, ρ) où V est un espace hermitien, et ρ un morphisme continu de G vers $U(V)$ le groupe des opérateurs unitaires sur V.*

Si V est de dimension finie, la représentation (V, ρ) est dite de dimension finie.

Une représentation (V, ρ) est dite réductible s'il existe une décomposition de V de la forme $V = W_1 \bigoplus W_2$ avec W_1 et W_2 deux sous-espaces de V non nuls.

Une représentation (V, ρ) est dite irréductible si elle n'est pas réductible.

Si (ρ, V_ρ) et (χ, V_χ) sont deux représentations de G, on dit que $f : V_\rho \to V_\chi$ est un morphisme entre ρ et χ si elle est linéaire et que l'on a pour tout $(g, v) \in G \times V_\rho$, l'identité $\chi(g)f(v) = f(\rho(g)v)$.

Lemme 2.1 (Théorème de Maschke dans le cas de représentations unitaires) *Soit (V, ρ) une représentation unitaire du groupe topologique G, supposons qu'il existe $W \subset V$ un sous-espace G-invariant. Alors $W^\perp$ est G-invariant et (V, ρ) s'écrit $(W, \rho_{|W}) \bigoplus (W^\perp, \rho_{|W^\perp})$.*

En particulier, V est réductible si et seulement s'il admet un sous-espace non trivial et propre stable.

Preuve: $W^\perp$ est G-invariant, en effet, si $u \in W^\perp$, alors pour tout $(g, w) \in G \times W$, on calcule $\langle \rho(g)u, w\rangle = \langle u, \rho(g^{-1})w\rangle = 0$ puisque W est stable par G. □

Lemme 2.2 (Lemme de Shur) *Soient (ρ, V_ρ) et (χ, V_χ) deux représentations irréductibles d'un groupe topologique G, et $f : V_\rho \to V_\chi$ un morphisme. Alors soit $f = 0$, soit f est un isomorphisme.*

De plus si f est un morphisme de V_ρ dans cette même représentation, et que V_ρ est de dimension finie, alors f est égale à λId_{V_ρ} pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$.

Preuve: On remarque que le noyeau et l'image de f sont stables sous l'action de G, donc soit $\ker f = V_\rho$ et $f = 0$, soit $\ker f = \{0\}$ et f est injective, puis $\operatorname{im} f \neq \{0\}$ car $f \neq 0$, donc $\operatorname{im} f = V_\chi$ et f est surjective.

Si maintenant $V_\rho \to V_\rho$, alors puisque f est ρ-invariant et que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, f admet une valeur propre λ. Or l'espace propre de f associé à λ est un sous-espace stable sous l'action de G par ρ. Cet espace propre, qui n'est pas nul, doit donc être égal à V_ρ. D'où $f = \lambda Id_{V_\rho}$. □

Corollaire 2.5.1 *Soit ρ, V une représentation unitaire de G, et U, W deux sous-espaces invariants par G induisant deux représentations irréductibles de G. Si ces représentations ne sont pas isomorphes, alors elles sont orthogonales.*

Preuve: Considérons $\pi : W \to U$ la restriction à W de la projection orthogonale sur U.

On remarque qu'il s'agit d'un morphisme de représentations, en effet, si $g \in G$ et $v \in W$, on peut écrire $\rho(g)v = \rho(g)(v - \pi(v)) + \rho(g)\pi(v)$. Puisque $\pi(v) \in U$ qui est stable sous l'action de G, $\rho(g)\pi(v) \in U$. De plus, $\rho(g)(v - \pi(v)) \in U^\perp$ puisque $\langle \rho(g)(v - \pi(v)), u\rangle = \langle v - \pi(v), \rho(g^{-1})u\rangle = 0$ pour tout $u \in U$ car U stable par G et $v - \pi(v) \in U^\perp$.

Ainsi, on a bien $\pi\rho(g)v = \rho(g)\pi(v)$. π est donc un morphisme entre deux représentations irréductibles non isomorphes, et le lemme de Schur conclut. □

Définition 2.6 *La représentation régulière à gauche d'un groupe compact G est la représentation $(L^2(G), \mathfrak{L})$, où $\mathfrak{L}$ est définie pour $f \in \mathcal{C}(G, \mathbb{C})$ par :*

$$\mathfrak{L}_g(f) = \tau_{g^{-1}} f$$

Cette définition est possible, car l'application ainsi définie est une isométrie, donc elle est uniformément continue, et s'étend au complété $L^2(G)$ de $\mathcal{C}(G, \mathbb{C})$.

On remarque qu'il s'agit d'une représentation unitaire de G.

Lemme 2.3 *Soit G un groupe topologique et (V, ρ) une représentation unitaire de dimension finie de G. Alors ρ est presque périodique de G vers $\mathcal{L}(V)$.*

Preuve: Ce résultat découle du fait que $U(V)$ est compact lorsque V est de dimension finie. En effet, soit i l'inclusion entre $U(V)$ et $\mathcal{L}(V)$. Alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & \mathcal{L}(V) \\ U(V) \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

Ainsi, par le théorème 2.1, $U(V)$ étant compact, i est presque périodique donc ρ est presque périodique. $\square$

2.5 Théorème de Peter Weyl

Définition 2.7 *Soit G un groupe compact, et (ρ, V) une représentation irréductible unitaire de dimension finie de G. On définit l'espace $L^2(G)_\rho \subset L^2(G)$ comme l'espace engendré par les fonctions de la forme $f_{\rho,v,w} : g \in G \mapsto \langle v, \rho(g)w\rangle$, où $v, w \in V$. On appelle ces fonctions les coefficients de matrices de la représentation ρ.*

On vérifie bien que les coefficients de matrices de ρ sont dans $L^2(G)$, avec $\|f_{\rho,v,w}\|_2 \leq \sqrt{\|v\|_2\|w\|_2}$.

On remarque que ces espaces sont invariants par translation à gauche, et induisent donc des sous-représentations de la représentation régulière. Le théorème de Peter-Weyl affirme que la représentation régulière est la somme de ces sous-représentations :

Théorème 2.6 (Théorème de Peter-Weyl, version 1) *Soit G un groupe topologique compact. Alors l'espace $L^2(G)$ est l'adhérence de la somme directe orthogonale des $L^2(G)_\rho$ où ρ parcours les classes d'isomorphismes de représentations irréductibles unitaires de dimension finie de G :*

$$L^2(G) = \overline{\bigoplus_{\rho}^{\perp} L^2(G)_\rho}$$

Pour cela on montre le lemme suivant :

Lemme 2.4 *Soit (ρ, V_ρ) une représentation irréductible unitaire de dimension finie de G. Alors toute sous-représentation de $L^2(G)$ isomorphe à (ρ, V_ρ) est une sous-représentation de $L^2(G)_\rho$, que l'on peut alors décomposer comme somme directe de $\dim V_\rho$ sous-représentations de $L^2(G)$ isomorphes à (ρ, V_ρ).*

Preuve: Notons $\mathfrak{L} : G \to U(L^2(G))$ la représentation régulière. Soit V une sous-représentation de $\mathfrak{L}$ isomorphe à V_ρ. On dispose donc d'un opérateur isométrique (comme morphisme de représentations unitaires) $\iota : V_\rho \to L^2(G)$ d'image V tel que, pour tout $(g, v) \in G \times V_\rho$, $\mathfrak{L}_g\iota(v) = \iota\rho(g)v$. De plus ι est borné car V est de dimension finie, et admet donc un adjoint $\iota^\star : L^2(G) \to V_\rho$.

Soit alors $v \in V_\rho$, $K \in L^2(G)$ et $g \in G$. On calcule :

$$\begin{aligned}
(\iota(v) \star K)(g) &= \int_G \iota(v)(gh^{-1})K(h)\mathrm{d}\mu(h) = \int_G \mathfrak{L}_{g^{-1}}\iota(v)(h)K(h^{-1})\mathrm{d}\mu(h)) \\
&= \langle \mathfrak{L}_{g^{-1}}\iota(v), \overline{K(\cdot^{-1})}\rangle = \langle \iota\rho(g^{-1})(v), \tilde{K}\rangle \\
&= \langle \rho(g^{-1}), \iota^\star\tilde{K}\rangle = \langle v, \rho(g)\iota^\star(\tilde{K})\rangle \\
&= f_{\rho,v,\iota^\star(\tilde{K})}(g)
\end{aligned}$$

où l'on pose $\tilde{K} = \overline{K(\cdot^{-1})}$.

Ainsi, $\iota(v) \star K \in L^2(G)_\rho$ pour tout $K \in L^2(G)$. Si on prend pour K une suite régularisante, on voit que $(L^2(G)_\rho$ étant fermé comme espace de dimension finie) $\iota(v) \in L^2(G)_\rho$. Mais l'image de ι est V, d'où $V \subset L^2(G)_\rho$.

Maintenant, notons $n = \dim(V_\rho)$, et choisissons $e_1, \ldots, e_n$ une base de V_ρ. Vérifions que $L^2(G)_\rho$ est somme directe des espaces $L^2(G)_{\rho,e_i} = \{f_{\rho,v,e_i}, v \in V_\rho\}$ qui sont G-invariants (donc induisent des sous-représentations de $\mathfrak{L}$) isomorphes à (ρ, V_ρ).

En effet, si $\alpha : V_\rho \to L^2(G)_{\rho,e_i}$ est définie par $\alpha(v) : g \in G \mapsto \langle v, \rho(g)e_i\rangle$, alors $\mathfrak{L}_a\alpha(v) = \langle v, \rho(a^{-1})\rho(\cdot)e_i\rangle = \langle \rho(a)v, \rho(\cdot)e_i\rangle = \alpha(\rho(a)v)$. Ainsi α est un morphisme non nul de V_ρ dans $L^2(G)_{\rho,e_i}$, donc est un isomorphisme (car $\ker\alpha$ est un sous-espace G-invariant et propre de V_ρ qui est irréductible, donc est réduit à $\{0\}$, et que V_ρ a une dimension supérieure à celle de $L^2(G)_{\rho,e_i}$). □

Preuve: Soient (ρ, V_ρ) et (ξ, V_ξ) deux représentations unitaires irréductibles de dimension finie de G non isomorphes. Le lemme précédent donne, conjointement avec le corollaire du lemme de Schur, que $L^2(G)_\rho$ et $L^2(G)_\xi$ sont orthogonaux, puisqu'ils se décomposent chacun en somme directe de sous-représentations telles que toute sous-représentation de l'un est orthogonale aux sous-représentations de l'autre.

On a donc $\overline{\bigoplus_\rho L^2(G)_\rho} \subset L^2(G)$ où la somme est orthogonale. Montrons la réciproque.

Supposons qu'il n'y ait pas égalité : $\overline{\bigoplus_\rho L^2(G)_\rho}$ étant un sous-espace vectoriel propre fermé de $L^2(G)$, son orthogonal est non nul. Soit donc f une fonction de l'orthogonal non identiquement nulle.

Choisissons pour tout voisinage ouvert U de l'identité, un $K_U \in L^2(G)$ continu à valeur dans $\mathbb{R}_+$, d'intégrale 1, à support contenu dans U et tel que $K_U(g^{-1}) = \overline{K_U(g)}$. On définit alors l'opérateur $T_U : L^2(G) \to L^2(G)$ qui associe à g sa convolée par K. Montrons que pour tout U, T_U est un opérateur compact auto-adjoint.

— T_U est borné car lipschitzien : si $f, g \in L^2(G)$, alors pour tout $x \in G$:

$$|f \star K_U(x) - g \star K_U(x)| \leq \int_G |f(xh^{-1}) - g(xh^{-1})||K_U(h)|\mathrm{d}\mu(h) \leq \|K_U\|_2\|f-g\|_2$$

Et on conclut car $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_\infty$.

— T_U est auto-adjoint : si $f, g \in L^2(G)$, on a :

$$\begin{aligned}\langle f, T_U g\rangle &= \int_G\int_G f(x)\overline{g(xh^{-1})K_U(h)}\mathrm{d}\mu(h)\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_G\int_G f(yh)\overline{g(y)}K_U(h^{-1})\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(h)\\ &= \int_G\int_G f(xh^{-1})K_U(h)\overline{g(y)}\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(h)\\ &= \langle T_U f, g\rangle\end{aligned}$$

— T_U est compact. Pour cela, montrons que si $f \in L^2(G)$ est de norme inférieure à 1, alors $T_U f$ est continue avec, pour tout $x, y \in G$:

$$\begin{aligned}|f \star K(x) - f \star K(y)| &\leq \int_G |f(h)(K_U(xh^{-1}) - K_U(yh^{-1}))|\mathrm{d}\mu(h)\\ &\leq \|f\|_2\|\tau_x K - \tau_y K\|_2 \leq \|\tau_x K - \tau_y K\|_\infty\end{aligned}$$

Ainsi, l'image par T_U de la boule unité est équicontinue et équibornée par un calcul similaire (par $\|K_U\|_2$), donc est relativement compacte pour la norme infinie, donc est relativement compacte dans $(L^2(G), \|\cdot\|_2)$.

Maintenant, T_U est un opérateur compact auto-adjoint d'un Hilbert dans lui-même, donc il admet une base hilbertienne de fonctions propres d'après le théorème spectral. Ses espaces propres sont deux à deux orthogonaux et G-invariants (car T_U est G-invariant). De plus, tout les espaces propres différents du noyeau sont de dimension finie (par l'alternative de Fredholm) et se décomposent en somme directe de sous-représentations irréductibles de dimension finie de la représentation régulière, donc f leur est orthogonale. Ainsi, f doit être dans le noyeau de T_U.

Soit alors $\epsilon > 0$. Par densité de $\mathcal{C}(G)$ dans $L^2(G)$, on peut choisir $\tilde{f}$ continue telle que $\|f - \tilde{f}\|_2 \leq \epsilon$. Sa projection orthogonale $\tilde{f}_0$ sur $\left(\overline{\bigoplus_\rho L^2(G)_\rho}\right)^\perp$ vérifie les mêmes hypothèses que f, donc est dans le noyeau de T_U de la même façon. On a donc $\|T_U\tilde{f}\|_2 = \|T_U\tilde{f} - T_U\tilde{f}_0\|_2 \leq \|\tilde{f} - \tilde{f}_0\|_2 \leq \|\tilde{f} - f\|_2 \leq \epsilon$, donc en choisissant une suite régularisante pour K_U, $T_U\tilde{f}$ converge vers $\tilde{f}$ dans $L^2(G)$ car elle converge uniformément (puisque $\tilde{f}$ est continue) et donc $\|\tilde{f}\|_2 \leq \epsilon$. Ainsi, $\|f\|_2 \leq 2\epsilon$.

Cela valant pour tout $\epsilon > 0$, f est nulle : contradiction. □

Corollaire 2.6.1 *Soit G un groupe topologique compact. Alors soit $g_0 \in G$ tel que $e_G \neq g_0$, il existe une représentation unitaire irréductible de dimension finie (V, ρ) de G telle que $\rho(g_0) \neq Id_V$.*

Preuve: Supposons que pour toute représentation irréductible unitaire (ρ, V) de dimension finie de G, on ait $\rho(g) = \mathrm{Id}_V$.

Il existe $f \in L^2(G)$ continue telle que $f(g) \neq f(e)$. Soit donc U tel que $\|T_U f - f\|_\infty < \frac{|f(e)-f(g)|}{2}$ (puisque pour une suite régularisante, la convolée converge uniformément vers f qui est continue). Alors

$$|T_U f(g) - T_U f(e)| \geq |f(g) - f(e)| - |T_U f(g) - f(g)| - |T_U f(e) - f(e)| > 0$$

Ainsi $T_U f$ sépare g et e_G.

Alors, on sait que $f \notin \ker T_U$, donc on peut supposer que $f \in (\ker T_U)^\perp$ tout en conservant le fait que $T_U f$ sépare g et e_G.

Mais alors, on peut écrire $f = \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} f_\lambda$, pour Λ l'ensemble des valeurs propres de T_U. On a $\sum_\lambda \|f_\lambda\|_2^2 = \|f\|_2^2 < \infty$, donc on peut choisir δ tel que :

$$\sum_{0<|\lambda|\leq\delta} \|f_\lambda\|_2^2 < \frac{|T_U f(g) - T_U f(e)|}{2\|K_U\|_2}$$

Si on pose $f_0 = \sum_{|\lambda|>\delta} f_\lambda$, la somme est finie, donc $T_U f_0 \in \bigoplus_\rho L^2(G)_\rho$, et donc par hypothèse $T_U f_0(g) = T_U f_0(e)$ (en décomposant chaque espace propre en sous-représentations irréductibles). Alors, on remarque que :

$$\|T_U f - T_U f_0\|_\infty \leq \|K_U\|_2 \|f - f_0\|_2 < \frac{|T_U f(g) - T_U f(e)|}{2}$$

Ainsi :

$$|T_U f_0(g) - T_U f_0(e)| \geq |T_U f(g) - T_U f(e)| - |T_U f(g) - T_U f_0(g)| - |T_U f(e) - T_U f_0(e)| > 0$$

Mais cela est impossible. □

Le théorème de Peter-Weyl donne également des informations sur les représentations unitaires irréductibles des groupes compacts dans certains cas, comme le montre le corollaire suivant.

Corollaire 2.6.2 *Soit G un groupe compact métrique. Alors l'ensemble des classes d'isomorphismes de repérentations unitaires irréductibles de dimension finie de G est dénombrable.*

Preuve: En effet si G est un groupe compact métrique, alors $L^2(G)$ est séparable. C'est donc un espace de Hilbert de dimension au plus dénombrable, et le théorème de Peter-Weyl permet de conclure. □

Il permet également de décrire les groupes compacts, en précisant les cas abéliens et métriques :

Corollaire 2.6.3 *Les groupes compacts sont les sous-groupes fermés de produits de groupes unitaires de dimension finie.*

Les groupes abéliens compacts sont les sous-groupes fermés d'une puissance du tore.

De plus, dans le cas métrisable, les produits considérés plus haut sont au plus dénombrables.

Preuve: Soit G un groupe compact, on note $\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations unitaires irréductibles de dimension finie de G. On définit alors un morphisme continu ϕ de la façon suivante :

$$\phi : \begin{cases} G & \rightarrow & \tilde{G}_0 \\ g & \mapsto & (\rho(g))_{(V,\rho)\in\mathcal{R}} \end{cases}$$

où on pose

$$\tilde{G}_0 = \prod_{(V,\rho)\in\mathcal{R}} U(V)$$

Par le corollaire 2.6.1, ϕ est injectif, donc ϕ est un isomorphisme bicontinu sur son image car G est compact, et que $\tilde{G}_0$ est séparé.

Si G est abélien, alors les seules représentations unitaires irréductibles de dimension finie de G sont de dimension 1 (si (V,ρ) est un représentation unitaire irréductible de dimension finie, la famille $(\rho(g))_{g\in G}$ commute et est formée d'endomorphismes diagonalisables, donc elle est codiagonalisable, donc les vecteurs propres non nuls d'un de ses endomorphismes engendrent des espaces stables par G de dimension 1, il n'y en a donc qu'un). Ainsi, $U(V)$ est isomorphe bicontinuement au tore pour tout $(V,\rho)\in\mathcal{R}$.

Si G est métrisable, alors le corollaire 2.6.2 montre que $\mathcal{R}$ est dénombrable.

Réciproquement, tout sous-groupe fermé d'un produit de groupes unitaires de dimension finie est compact (par le théorème de Tychonov). Il est de plus abélien si tout les groupes unitaires sont des tores, et métrisable si le produit est dénombrable. □

2.6 Théorèmes d'approximation uniforme

Théorème 2.7 (Théorème de Weierstrass) *Soit X un espace compact, et $\mathcal{C}$ un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ stable par produit et conjugaison complexe, et qui sépare les points de x , i.e tel que pour tout $x,y\in E$ il existe $f\in\mathcal{C}$ tel que $f(x)\neq f(y)$.*

Alors $\mathcal{C}=\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$.

On en déduit une version plus faible du théorème de Peter-Weyl :

Théorème 2.8 (Théorème de Peter-Weyl, version 2) *Soit G un groupe topologique compact. Alors l'espace engendré par les coefficients de matrice des représentations unitaires de dimension finie de G est dense dans $\mathcal{C}(G,\mathbb{C})$, pour la norme uniforme.*

Preuve: Appelons $\mathcal{C}$ cet espace. Il sépare les points de G par le corollaire 2.6.1. De plus, si (V,ρ) est une représentation unitaire de G dont f est un coefficient de matrice, alors $(V,\overline{\rho})$ en est une également et $\overline{f}$ est un coefficient de matrice de cette nouvelle représentation.

De même, si f_1 et f_2 sont des coefficients de matrice des représentations (V_1,ρ_1) et (V_2,ρ_2) respectivement, alors $f_1\times f_2$ est un coefficient de matrice de la représentation $(V_1\bigotimes V_2,\rho_1\otimes\rho_2)$.

Ainsi par le théorème de Weierstrass, l'adhérence de $\mathcal{C}$ pour la norme uniforme est égal à $\mathcal{C}(G,\mathbb{C})$. □

Lemme 2.5 *Soit (V,ρ) une représentation unitaire irréductible de G de dimension finie, et soit T un élément de $\mathcal{L}(V)$. Alors pour $h\in G$:*

$$\int_G \rho(g)T\rho(g)^*\mathrm{d}\mu(g)=\frac{Tr(T)}{dim(V)}I_V$$

Preuve: En effet, le membre de gauche est bien un endomorphisme ρ-équivariant, car si $h\in G$:

$$\int_G \rho(g)T\rho(g)^*\mathrm{d}\mu(g)\rho(h)=\int_G \rho(g)T\rho(h^{-1}g)^*\mathrm{d}\mu(g)=\int_G \rho(hg)T\rho(g)^*\mathrm{d}\mu(g)=\rho(h)\int_G \rho(g)T\rho(g)^*\mathrm{d}\mu(g)$$

Ainsi le menbre de doite est un multiple de l'identité. Or $Tr(\int_G \rho(g)T\rho(g)^*\mathrm{d}\mu(g)=Tr(T)$, donc on a bien l'égalité souhaitée. □

Le théorème de Peter Weyl nous donne également des informations sur l'espace engendré par les caractères des représentations unitaires de dimension finie.

Définition 2.8 *On appelle caractère d'une représentation (V,ρ) de G l'application $\chi: g\in G\mapsto Tr(\rho(g))$.*

Une fonction f d'un groupe G vers un ensemble Y est dite centrale si pour tout $g,h\in G$, on a $f(ghg^{-1})=f(h)$.

Théorème 2.9 (Théorème de Peter-Weyl, version 3) *Soit G un groupe topologique compact. Alors l'espace engendré par les caractères des représentations unitaires de dimension finie de G est dense dans l'espace des fonctions centrales de $\mathcal{C}(G,\mathbb{C})$, pour la norme uniforme.*

Preuve: Soit f une fonction centrale continue de G vers $\mathcal{C}$. On sait que f peut être approchée uniformément pas des combinaisons linéaires de coefficients de matrice des représentations unitaires de dimension finie de G.

Or pour tout $h \in G$:

$$\int_G f(ghg^{-1})\mathrm{d}\mu(g) = f(h)$$

Mais si f_0 est un coefficient de matrice de la représentation (V, ρ) de la forme $f_0 : g \in G \mapsto \langle \rho(g)u, v\rangle$ avec $u, v \in V$. Alors par linéarité de l'intégrale :

$$\int_G f_0(ghg^{-1})\mathrm{d}\mu(g) = \int_G \langle \rho(g)\rho(h)\rho(g^{-1})u, v\rangle \mathrm{d}\mu(g) = \langle \int_G \rho(g)\rho(h)\rho(g^{-1})u\mathrm{d}\mu(g), v\rangle$$

Ainsi, le lemme 2.5 avec l'application linéaire $\rho(h)$ donne :

$$\int_G f_0(ghg^{-1})\mathrm{d}\mu(g) = \frac{Tr(\rho(h))}{dim(V)}\langle u, v\rangle$$

Donc $h \mapsto \int_G f(ghg^{-1})\mathrm{d}\mu(g)$ peut être uniformément approchée par des caractères de représentations unitaires de dimension finie de G, d'où le résultat. $\square$

3 Application à l'étude des fonctions presque périodiques

3.1 Le théorème d'approximation de Bohr

Les théorèmes de la section précédente peuvent s'appliquer aux fonctions presque périodiques.

Théorème 3.1 *Soit G un groupe topologique. Alors l'espace engendré par les coefficients de matrice des représentations unitaires de dimension finie de G est dense dans l'espace des fonctions presque périodiques de G dans $\mathbb{C}$, pour la norme uniforme.*

Preuve: Soit f une fonction presque périodique de G dans $\mathbb{C}$, et soit H_f le groupe topologique compact défini dans la section 2.2, sur lequel on dispose d'une application $\tilde{f} : H_f \to \mathbb{C}$ et d'un morphisme $\pi_f : G \to H_f$ tels que $\tilde{f} \circ \pi_f = f$. Par la version 2 du thérème de Peter-Weyl, $\tilde{f}$ peut être uniformément approchée par des combinaisons linéaires de coefficients de matrice de représentations unitaires de dimension finie de H_f.

Soit (V, ρ) une telle représentation de H_f, dont un des coefficients de matrice est M. Alors $(V, \rho \circ \pi_f)$ est une représentation unitaire de dimension finie de G, dont un des coefficients de matrice est $M \circ \pi_f$. Ainsi f peut être uniformément approchée par des combinaisons linéaires de coefficents de matrice de représentations unitaires de dimension finie de G.

De plus, on remarque que tout coefficient de matrice d'une représentation unitaire de dimension finie (V, ρ) de G est presque périodique puisque ρ l'est et que $u \in U(V) \mapsto \langle v, uw\rangle$ est continue pour tout $v, w \in V$. $\square$

On obtient également une version particulière pour les fonctions presque périodiques centrales.

Théorème 3.2 *Soit G un groupe topologique. Alors l'espace engendré par les caractères des représentations unitaires de dimension finie de G est dense dans l'espace des fonctions presque périodiques centrales de G dans $\mathbb{C}$, pour la norme uniforme.*

Preuve: Soit f une fonction presque périodique de G dans $\mathbb{C}$, et soit H_f le groupe topologique compact défini dans la section 2.2, sur lequel on dispose d'une application $\tilde{f} : H_f \to \mathbb{C}$ et d'un morphisme $\pi_f : G \to H_f$ tels que $\tilde{f} \circ \pi_f = f$.

Puisque f est centrale et que $\pi_f(G)$ est dense dans H_f, le fermé $\{h \in H_f | \forall g \in H_f \tilde{f}(hgh^{-1}) = \tilde{f}(g)\}$ contenant $\pi_f(\{h \in G | \forall g \in G f(hgh^{-1}) = f(g)\}) = \pi_f(G)$ est égal à H_f, d'où on déduit que $\tilde{f}$ est également centrale.

Par la version 3 du thérème de Peter-Weyl, $\tilde{f}$ peut être uniformément approchée par des combinaisons linéaires de caractères de représentations unitaires de dimension finie de H_f.

Soit (V, ρ) une telle représentation, de caractère $\chi = Tr(\rho)$. Alors $(V, \rho \circ \pi_f)$ est une représentation unitaire de dimension finie de G, de caractère $\chi' = \chi \circ \pi_f$, donc f peut être uniformément approchée par des combinaisons linéaires de caractères de représentations unitaires de dimension finie de G.

De plus, les caractères d'une représentation unitaire de dimension finie de G sont des fonctions centrales presque périodiques (comme dans la preuve précédente). □

3.2 Factorisation des fonctions presque périodiques

Pour obtenir des résultats de factorisation des fonctions presque périodiques agréables, nous allons utiliser le théorème suivant :

Définition 3.1 *Un espace topologique X est dit normal si pour tous F_1, F_2 fermés disjoints il existe des ouverts disjoints U_1, U_2 tels que $U_1 \supset F_1$ et $U_2 \supset F_2$.*

Si X est compact (quasi-compact et séparé), alors il est normal.

Théorème 3.3 (Tietze-Urysohn) *Soit X un espace normal, et E un espace vectoriel de dimension finie. Soit A un fermé de X et $f : A \to E$ un application continue. Alors f se prolonge en une application continue sur X.*

Le théorème est énoncé usuellement dans le cas où $E = \mathbb{R}$, mais quitte à considérer les $\dim E$ fonctions coordonnées de f, on se ramène à ce cas.

Théorème 3.4 *Soit G un groupe topologique. Les fonctions presque périodiques de G vers un espace vectoriel de dimension finie E sont exactement les fonctions f qui peuvent s'écrire sous la forme : $f = F \circ \phi$, où :*

$$\phi : \begin{cases} G & \to & \prod_{(V,\rho)\in\mathcal{R}_f} U(V) \\ g & \mapsto & (\rho(g))_{(V,\rho)\in\mathcal{R}_f} \end{cases}$$

$$F : \prod_{(V,\rho)\in\mathcal{R}_f} U(V) \to E$$

avec $\mathcal{R}_f$ un ensemble au plus dénombrable de représentants de classes d'isomorphisme de représentations unitaires irréductibles de dimension finie de G, et F est une application continue.

Preuve: Soit $\pi : G \to H_f$ la compactification de G suivant f définie dans la section 2.2. Toute représentation de H_f induit une représentation de G via π. On prend donc $\mathcal{R}_f$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations unitaires irréductibles de dimension finie de H_f. Cet ensemble est dénombrable car H_f est métrique, par la proposition 2.6.2.

Le morphisme $\phi_f : H_f \to \Pi_{V\in\mathcal{R}_f} U(V)$ est continu par propriété universelle de la topologie produit et parce que toutes les représentations de H_f considérées sont continues car unitaires, et injectif par le corollaire 2.6.1. Or H_f est compacte et $\prod_{V\in\mathcal{R}_f} U(V)$ est séparé, donc ϕ_f est un homéomorphisme sur son image.

On observe aussi que $\phi = \phi_f \circ \pi$ par construction. Soit alors $f_0 : H_f \to E$ telle que $f = f_0 \circ \pi$. On définit $\tilde{F}_0 : \phi(G) \to E$ par $\tilde{F}_0(\phi(g)) = f(g) = f_0(\pi(g))$ si $g \in G$.

On remarque que $\phi_f(H_f)$ est complet car compact, et que $\phi(G)$ est dense dans $\phi_f(H_f)$ car π est d'image dense dans H_f, donc $\phi_f(H_f)$ est un complété de $\phi(G)$. Il est de plus métrisable puisque H_f l'est.

On se trouve dans la situation décrite par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"] \arrow[dd, "\phi"'] & & E \\
& H_f \arrow[ur, "f_0"'] \arrow[dl, "\phi_f"'] & \\
\phi_f(H_f) \arrow[uurr, dashed, bend right, "F_0"'] \arrow[d, hook] & & \\
\prod_{V \in \mathcal{R}_f} U(V) \arrow[uuurr, dashed, bend right, "F"'] & &
\end{tikzcd}$$

$\tilde{F_0}$ est uniformément continue à valeurs dans E complet (car de dimension finie), donc s'étend en $F_0 : \phi_f(H_f) \to E$ continue. En effet, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ouvert U de H_f tel que pour tout $x, y \in H_f$ tels que $xy^{-1} \in U$, $\|f_0(x) - f_0(y)\| \leq \epsilon$ (par uniforme continuité de f_0 sur le compact H_f). Si donc $V = \phi_f(U) \cap \phi(G)$, qui est un ouvert de $\phi(G)$, alors pour tout $x, y \in G$ tels que $\phi(x)\phi(y)^{-1} \in V$, $\|\tilde{F_0}(\phi(x)) - \tilde{F_0}(\phi(y))\| = \|f_0(\pi(x)) - f_0(\pi(y))\| \leq \epsilon$.

De plus, $\phi_f(H_f)$ est compact, donc par le théorème de Tietze-Urysohn 3.3, on construit $F : U(V) \to E$ continue prolongeant F_0 sur $\phi(G) \subset \phi_f(H_f)$, et respectant donc $F \circ \phi = f$.

Respectivement, on sait que $\prod U(V)$ est compact comme produit d'espaces compacts, donc f est presque périodique si elle s'écrit sous cette forme. $\square$

Appliquons ce résultat aux groupes topologiques abéliens.

Théorème 3.5 *Soit G un groupe topologique abélien. Les fonctions presque périodiques de G vers un espace vectoriel de dimension finie E sont exactement les fonctions qui peuvent s'écrire sous la forme : $F \circ \phi$, où :*

$$\begin{array}{rccc} \phi : & G & \to & \mathbb{T}^A \\ & g & \mapsto & (\chi(g))_{\chi \in A} \end{array}$$

$$F : \mathbb{T}^A \to E$$

avec A un ensemble au plus dénombrable de caractères de G, et F est une application continue.

Preuve: Il suffit d'appliquer le théorème 3.4. Les représentations unitaires irréductibles de dimension finie des groupes abéliens sont toutes de dimension 1, puisqu'une famille de matrices diagonalisables (car unitaires ici) qui commutent est co-diagonalisable, donc se décompose en droites stables.

Ainsi les groupes $U(V)$ sont tous isomorphes à $\mathbb{T}$. $\square$

Remarque 2 *Si $G = \mathbb{R}$, alors ce théorème affirme que les fonctions presque périodiques sont celles qui s'écrivent sous la forme :*

$$f : t \mapsto F(\lambda_0 t, \lambda_1 t, \ldots)$$

avec $F : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to E$ une fonction continue (pour la topologie produit), 1-périodique en chacun de ses paramètres, et $(\lambda_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels quelconques.

3.3 Un compactifié universel

Définition 3.2 *Soit G un groupe topologique, soit $\mathcal{R}_G$ un ensemble de représentants des classes d'équivalences de représentations irréductibles unitaires de dimension finie (V, ρ) de G. Alors soient :*

$$\tilde{G_0} = \prod_{(V,\rho) \in \mathcal{R}_G} U(V)$$

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \to & \tilde{G_0} \\ g & \mapsto & (\rho(g))_{(V,\rho)\in\mathcal{R}_G} \end{array} \right.$$

On définit G_0 comme l'adhérence de $\phi(G)$ dans $\tilde{G_0}$.

Remarque 3 *Si G est abélien, alors G_0 est un sous-groupe fermé d'un groupe de la forme $\mathbb{T}^E$, avec E un ensemble (a priori indénombrable).*

Le groupe G_0 possède la propriété universelle suivante :

Proposition 3.1 *Soit G un groupe topologique et G_0 son compactifié de Bohr, alors pour tout groupe compact K et pour tout morphisme continu $\psi : G \to K$, il existe un unique morphisme continu $\pi : G_0 \to H$ tel que $\pi \circ \phi = \psi$.*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\phi"'] & K \\ G_0 \arrow[ur, "\pi"'] & \end{tikzcd}$$

Preuve: On considère le groupe compact K et le morphisme continu $\psi : G \to K$. On définit H comme l'adhérence de l'image de G par ψ dans K. Il s'agit donc d'un groupe compact. Les représentations unitaires irréductibles de dimension finie de H donnent des représentations unitaires irréductibles de dimension finie de G via ψ, c'est à dire que $\mathcal{R}_H \circ \psi \subset \mathcal{R}_G$, puisque $\psi(G)$ est dense dans H. On dispose alors du morphisme continu :

$$i : x \in H \mapsto (\rho(x))_{(V,\rho)\in\mathcal{R}_H} \in \prod_{(V,\rho)\in\mathcal{R}_H} U(V) := \tilde{H_0}$$

qui est une injection car les représentations unitaires irréductibles de dimension finie de H séparent les éléments de H par le corolaire 2.6.1. De plus c'est un homéomorphisme sur son image car H est compact. On peut donc identifier H avec son image $i(H) := H_0$. On dispose alors du morphisme canonique suivant, induit par l'inclusion $\mathcal{R}_H \circ \psi \subset \mathcal{R}_G$:

$$\pi : \prod_{(V,\rho)\in\mathcal{R}_G} U(V) \to \prod_{(V,\rho)\in\mathcal{R}_H} U(V)$$

On a $\pi(G_0) \subset H_0$ car $\pi \circ \phi = i \circ \psi$. En effet, $\pi(\phi(G)) = i(\psi(G)) \subset i(H) = H_0$, donc en passant à l'adhérence, H_0 étant fermé : $\pi(G_0) \subset H_0$.

Soit j l'injection de H dans K. Le morphisme $j \circ i^{-1} \circ \pi$ convient donc.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\phi"'] & H \arrow[r, hook, "j"'] \arrow[d, "i"'] & K \\ G_0 \arrow[r, dashed, "\pi_{|G_0}"] \arrow[d, hook] & H_0 \arrow[d, hook] & \\ \tilde{G_0} \arrow[r, "\pi"] & \tilde{H_0} & \end{tikzcd}$$

De plus, si $\pi : G_0 \to K$ est un morphisme continu tel que $\psi = \pi \circ \phi$, alors les valeurs de π sur $\phi(G)$ sont imposées par l'hypothèse $\pi \circ \phi = \psi$. Or $\phi(G)$ est dense dans G_0 par définition, donc il n'existe qu'un unique morphisme continu π satisfaisant. $\square$

Remarque 4 *Cette propriété universelle caractérise G_0 à isomorphisme bicontinu près. En effet, si un groupe G_1 satisfait la même propriété pour un morphisme $\phi' : G \to G_1$, alors le morphisme π entre G_0 et G_1 obtenu pour $(H, \psi) = (G_1, \phi')$ est un isomorphisme bicontinu. On appelle donc compactification de Bohr de G tout couple (ϕ, K) vérifiant cette propriété universelle où $\phi : G \to K$ est un morphisme continu et K est un groupe compact.*

Le groupe compact G_0 permet de factoriser toutes les fonctions presque périodiques sur G, comme le montre la proposition suivante, et donc de ramener l'étude des fonctions presque périodiques sur un groupe quelconque à l'étude des fonctions continues sur un compact.

Théorème 3.6 *Soit G un groupe topologique et (ϕ, G_0) une compactification de Bohr de G. Les fonctions presque périodiques sur G sont les fonctions qui s'écrivent $f = \tilde{f} \circ \phi$ où $\tilde{f}$ est une application continue de G_0 vers E un espace vectoriel de dimension finie.*

De plus, l'application continue $\tilde{f}$ est unique.

Preuve: La proposition 2.7 donne l'existence d'une application $f_0 : H_f \to E$ telle que $f_0 \circ \pi_f = f$.

Or on dispose par la proposition précédente d'un morphisme $\pi : G_0 \to H_f$ tel que $\pi_f = \pi \circ \phi$. Ainsi l'application $\tilde{f} = f_0 \circ \pi$ convient.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr, "\pi_f"] & & E \\
G_0 \arrow[r, "\pi"'] & H_f \arrow[ur, "f_0"'] &
\end{tikzcd}$$

De plus, une telle fonction $\tilde{f} : G_0 \to E$ est déterminée sur $\phi(G)$ par la relation $\tilde{f} \circ \phi = f$, et ϕ étant à image dense, et f continue, f est uniquement déterminée, donc il en existe au plus une. $\square$

Avec ce résultat (et modulo le théorème de Tietze-Urysohn 3.3), on démontre un énoncé similaire à celui du théorème 3.4, mais cette fois-ci, le produit par lequel on factorise est indépendant de f, et contient donc potentiellement une quantité indénombrable de facteurs, puisque le groupe G_0 n'est pas forcément métrique.

Théorème 3.7 *Soit G un groupe topologique. Il existe un ensemble $\mathcal{R}$ de représentant de classes d'isomorphisme de représentations unitaires irréductibles de dimension finie de G satisfaisant la propriété suivante :*

Les fonctions presque périodiques de G vers un espace vectoriel de dimension finie E sont exactement les fonctions f qui peuvent s'écrire sous la forme : $f = F \circ \phi$, où :

$$\phi : \begin{cases} G & \to & \prod_{(V,\rho)\in\mathcal{R}} U(V) \\ g & \mapsto & (\rho(g))_{(V,\rho)\in\mathcal{R}} \end{cases}$$

$$F : \prod_{(V,\rho)\in\mathcal{R}_f} U(V) \to E$$

avec F une application continue.

Références

[1] Von Neumann J. Operators, ergodic theory and almost periodic functions in a group. 1961.

[2] PerruchaudP. Théorème de riesz-markov. https ://perso.univ-rennes1.fr/pierre.perruchaud/docs/ThRM.pdf.

[3] Besicovitch A. S. On generalized almost periodic functions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-25(1) :495–512.

[4] S. Sternberg. *Celestial mechanics.* Number vol. 1 in Mathematics lecture note series. W. A. Benjamin, 1969.

[5] Tao T. The peter-weyl theorem, and non-abelian fourier analysis on compact groups. January 2011. https ://terrytao.wordpress.com/2011/01/23/the-peter-weyl-theorem-and-non-abelian-fourier-analysis-on-compact-groups/.