

Propriétés de connectivité du processus de percolation fractale de Mandelbrot

Lucas D'Alimonte, Maxime Ligonnière, sous la direction de Michel Pain

Table des matières

1	Le problème de la percolation fractale	2
1.1	Définition	2
1.2	Problèmes soulevés et énoncé des résultats	2
2	Préliminaires : outils probabilistes	4
2.1	Le processus de Galton-Watson	4
2.2	L'inégalité FKG	6
3	Premiers résultats	8
3.1	A_∞ est-il vide?	8
3.2	Premières propriétés de connexité	9
4	Traversée horizontale	10
4.1	Existence d'un point critique	10
4.2	Etude de la transition de phase	14
5	Percolation dans \mathbb{R}^2	19
5.1	Énoncé et preuves des lemmes en percolation par sites	20
5.2	Retour à la percolation fractale	25

1 Le problème de la percolation fractale

Le modèle de la percolation fractale a été construit par Mandelbrot [1], dans l'objectif de créer par récurrence un ensemble fractal aléatoire inspiré des ensembles de Cantor. Dans l'ensemble de ce mémoire, nous suivons l'article [2] de Chayes, Chayes et Durrett.

1.1 Définition

On considère le carré $A_0 = [0, 1]^2$ et un entier N . On note pour $n \in \mathbb{N}, 1 \leq i, j \leq N^n$:

$$B_{i,j}^n = \left[\frac{i-1}{N^n}, \frac{i}{N^n} \right] \times \left[\frac{j-1}{N^n}, \frac{j}{N^n} \right].$$

On a ainsi itéré n fois un processus de découpage du carré N fois selon l'axe horizontal et N fois selon l'axe vertical, $B_{i,j}^n$ est le morceau restant dans la i -ème colonne et la j -ième ligne.

On va maintenant choisir de conserver, à chaque étape de découpage, chaque carré avec une probabilité $p \in [0, 1]$. Formellement, cela revient à choisir une suite de variables aléatoires iid $(\varepsilon_{i,j}^n)_{(i,j,n) \in \mathbb{N}^3}$ suivant une loi de Bernoulli de paramètre p . On définit la suite d'ensembles :

$$A_{n+1} = A_n \cap \left(\bigcup_{\substack{1 \leq i, j \leq N^{n+1} \\ \varepsilon_{i,j}^{n+1} = 1}} B_{i,j}^{n+1} \right).$$

Les ensembles A_n forment une suite décroissante de compacts d'intersection A_∞ . Cet ensemble peut être défini en dimension quelconque, mais on se concentre ici sur la dimension 2. Les figures 1 à 4 présentent quelques exemples de A_n avec $N = 2, n = 9$ pour différentes valeurs de p .

1.2 Problèmes soulevés et énoncé des résultats

Après avoir réalisé cette construction, différents problèmes de la forme "pour quelle valeur de p tel événement est-il réalisé avec probabilité non nulle ?" se posent. Les événements en question ont clairement une probabilité croissante en p donc pour chacun d'eux, il existe un point critique de la forme

$$\sup\{p \in [0, 1] | \mathbb{P}(A) = 0\}.$$

Le problème est à chaque fois d'obtenir un maximum d'informations sur ce point critique. Résumons les problèmes de cette forme traités dans ce mémoire :

- Pour quelles valeurs de p l'ensemble résiduel est-il non vide ? On démontrera la propriété 4 dans la partie 3.1, qui énonce que le point critique associé vaut précisément $\frac{1}{N^2}$

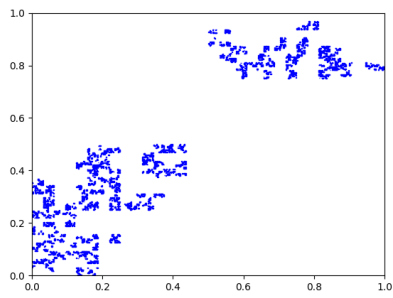


FIGURE 1 - $p = 0.65$

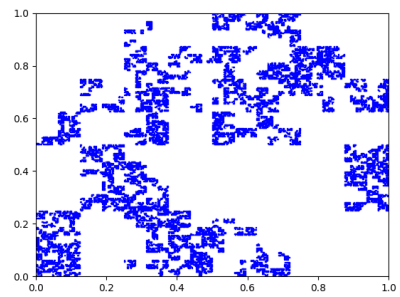


FIGURE 2 - $p = 0.75$

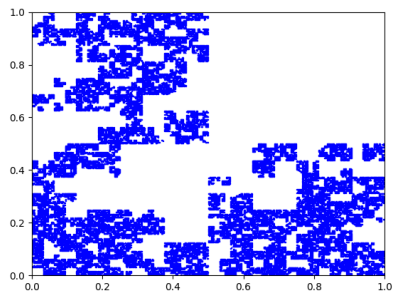


FIGURE 3 - $p = 0.85$

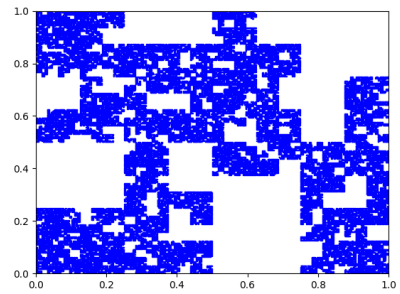


FIGURE 4 - $p = 0.9$

- Pour quelles valeurs de p l'ensemble A_∞ admet-il une composante connexe non réduite à un point ? La propriété 6 de la partie 3.2 minore le point critique par $\frac{1}{\sqrt{N}}$, cette minoration est cependant non optimale.
- On dit que A_∞ est traversable de gauche à droite, ou qu'il y a percolation dans A_∞ lorsqu'il existe un point de $A_\infty \cap \{0\} \times [0, 1]$ et un point de $A_\infty \cap \{1\} \times [0, 1]$ connectés dans A_∞ . Le théorème 2 de la partie 4.1 permet d'établir que le point critique est non trivial ie strictement inférieur à 1. Le théorème 3 permet de montrer que le point critique associé à l'existence de composantes connexes non triviales est le même que celui associé à la percolation. En ce point la probabilité de percolation est discontinue (theorème 4) et strictement positive.
- Recouvrons maintenant le plan de copies indépendantes de A_∞ . On s'intéresse à la percolation dans le plan, c'est à dire à l'existence d'une composante connexe non bornée de \mathbb{R}^2 dans l'ensemble résultant d'une infinité d'étapes de découpages. On verra dans le théorème 5 partie 5.2 que le point critique associé à la percolation dans le plan est le même que celui associé à la percolation dans un carré.

2 Préliminaires : outils probabilistes

Dans ce premier chapitre, nous allons introduire deux outils probabilistes qui nous seront utiles par la suite : le processus de Galton-Watson, ainsi que l'inégalité FKG dans le cas fini.

2.1 Le processus de Galton-Watson

Soit X une variable aléatoire à valeurs entières supportée par un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, non constante égale à 1 p.s.

Définition 1. *On considère les*

$$(X_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$$

une suite de variables indépendantes de même loi que X . On définit ensuite le processus :

$$\begin{cases} Z_0 & = 1, \\ Z_{n+1} & = \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n+1,k}. \end{cases}$$

L'interprétation de ce processus est la suivante : le temps est discrétisé, à chaque génération, chaque individu est remplacé par un nombre aléatoire de descendants, toujours selon la même loi. $X_{n,k}$ est le nombre de descendants du $k + 1$ -ième individu de la n -ième génération, pourvu qu'il existe.

On note dans la suite $\Phi : t \mapsto \mathbb{E}[t^X]$ la fonction génératrice de X et Φ_n celle de Z_n . Φ admet un point fixe en 1. De plus, comme X n'est pas constante égale à 1 ps, $\Phi \neq \text{Id}$ donc ses points fixes sont isolés (c'est une somme de série entière) : on note ξ son plus petit point fixe dans $[0, 1]$. Le calcul des dérivées montre que Φ est strictement croissante et convexe sur $[0, 1]$.

Résultats classiques

Propriété 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\Phi_{n+1} = \Phi_n \circ \Phi$.

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\Phi_{n+1}(t) = \mathbb{E} \left[t^{\sum_{k=1}^{Z_n} X_{n+1,k}} \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{j=0}^{\infty} 1_{Z_n=j} t^{\sum_{k=1}^j X_{n+1,k}} \right] = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[1_{Z_n=j} \prod_{k=1}^j t^{X_{n+1,k}} \right].$$

Par indépendance, on a donc :

$$\Phi_{n+1}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} [1_{Z_n=j}] \prod_{k=1}^j \mathbb{E} [t^{X_{n+1,k}}] = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = j) \prod_{k=1}^j \mathbb{E} [t^X].$$

D'où enfin :

$$\Phi_{n+1}(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n = j) \Phi(t)^j = \Phi_n(\Phi(t)).$$

□

Propriété 2. On a les trois égalités suivantes :

$$\mathbb{P} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = 0 \right) = \mathbb{P}(\exists n, Z_n = 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = \xi.$$

Démonstration. • $\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = 0 \right\}$ est bien un événement : on peut l'écrire

$$\bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} \{|Z_n| \leq \varepsilon\}$$

et l'existence de la deuxième limite est assurée par la monotonie de la suite considérée.

- La première égalité est une égalité d'événements : à $\omega \in \Omega$ fixé, si $Z_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, elle stationne en 0 car c'est une suite d'entiers. Réciproquement, si elle atteint 0, elle y stationne par définition du processus.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$ donc par convergence monotone on a bien la deuxième égalité.
- Notons $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n = 0)$ on a bien que $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(0)$ est un point fixe de Φ . De plus $0 \leq \xi$ donc par croissance de Φ_n :

$$\Phi_n(0) \leq \Phi_n(\xi) = \xi$$

Le passage à la limite donne :

$$l \leq \xi,$$

d'où finalement par minimalité de ξ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = \xi.$$

□

Propriété 3. On note $m = \mathbb{E}[X] = \Phi'(1)$. Deux cas se présentent :

1. Si $m \leq 1$, $\xi = 1$ donc presque sûrement :

$$\exists n \in \mathbb{N}, Z_n = 0$$

ie la population s'éteint presque sûrement en temps fini.

2. Si $m > 1$, Φ admet un point fixe strictement plus petit que 1 : la population survit avec une probabilité strictement positive.

Démonstration. Pour le cas $m < 1$, on exploite la convexité de Φ : la courbe de Φ est au dessus de sa tangente en 1. Si la tangente en 1 est au dessus de $y = x$, ie si $m < 1$, alors 1 est le seul point fixe.

Si $m > 1$ comme $\Phi(0) \geq 0$, Φ admet un point fixe dans $[0, 1[$.

Pour compléter ceci dans le cas $m = 1$, on raffine : Φ est soit strictement convexe soit affine (c'est une série entière à coefficients positifs). Si Φ est affine et $m = 1$ alors ps $X = 1$, on a exclu ce cas d'emblée. Sinon, la stricte convexité de Φ permet d'affirmer que dans le cas où $m = 1$, elle est strictement au dessus de la droite $y = x$ sur $[0, 1[$, ce qui conclut : le plus petit point fixe est 1. \square

2.2 L'inégalité FKG

L'inégalité FKG est un outil fondamental en percolation. Elle a été d'abord démontrée dans le cas particulier d'un univers de la forme $\{0, 1\}^J$ avec J fini par Harris dans [3], puis élargie dans [4]. Pour l'énoncer, nous aurons d'abord besoin de quelques définitions.

L'inégalité Dans toute cette section, nous nous plaçons sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, où $\Omega = \{0, 1\}^J$, J est un ensemble **fini**, muni de la mesure produit de $|J|$ lois de Bernoulli de même paramètre p . Ainsi, le modèle considéré est adapté au concept de percolation avec un nombre fini de sites.

Définition 2. On munit Ω de l'ordre partiel suivant : si $\omega, \omega' \in \Omega$

$$\omega \leq \omega' \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, |J|\}, \omega_i \leq \omega'_i.$$

Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. On dit que A est **croissant** si pour tous ω, ω' , $(\omega \in A, \omega' \geq \omega) \Rightarrow \omega' \in A$. De plus, soit X une variable aléatoire supportée par $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et à valeurs dans \mathbb{R} . On dit que X est **croissante** lorsque $\omega_1 \leq \omega_2 \Rightarrow X(\omega_1) \leq X(\omega_2)$.

Ces définitions en main, nous pouvons maintenant énoncer l'inégalité FKG.

Théorème 1. (Inégalité FKG)

Soient X et Y deux variables aléatoires supportées par $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et à valeurs dans \mathbb{R} . On suppose que X, Y sont croissantes. Alors on a :

$$\boxed{\mathbb{E}[XY] \geq \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].}$$

Démonstration. • On commence par le démontrer dans le cas où l'ordre sur Ω est total. Dans ce cas, on peut considérer l'application suivante :

$$F: (\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega \mapsto (X(\omega) - X(\omega'))(Y(\omega) - Y(\omega'))$$

où l'ensemble produit est muni de la probabilité produit. Du fait des croissances respectives de X et Y , cette application est à valeurs dans \mathbb{R}^+ . Ainsi, en intégrant contre la mesure produit on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega \times \Omega} F(\omega, \omega') d(\mathbb{P} \otimes \mathbb{P})(\omega, \omega') \\ &= \int_{\Omega \times \Omega} (X(\omega)Y(\omega) - X(\omega)Y(\omega') - X(\omega')Y(\omega) + X(\omega')Y(\omega')) d(\mathbb{P} \otimes \mathbb{P})(\omega, \omega') \\ &= 2\mathbb{E}(XY) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \end{aligned}$$

en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli pour intégrer contre la mesure produit. D'où le résultat lorsque l'ordre est total.

• Démontrons maintenant le théorème dans le cas général. Notons $\mathcal{O} = \{0, 1\}$, et démontrons que deux variables aléatoires supportées par $\Omega_n = \mathcal{O}^n$ vérifient l'inégalité annoncée. Pour ce faire on procède par récurrence : l'initialisation relève de la preuve précédemment effectué puisque \mathcal{O} est totalement ordonné.

Supposons le résultat démontré au rang $n-1$. Soient X, Y croissantes et supportées par Ω_n . Introduisons $\mathbb{E}[X|\omega_n]$ l'espérance conditionnelle de X par rapport à la n -ième coordonnée d'un événement $\omega \in \Omega_n$, à savoir la variable aléatoire définie par :

$$\mathbb{E}[X|\omega_n] = \int_{\mathcal{O}^{n-1}} X(\omega_1, \dots, \omega_n) d(\mathbb{P} \otimes \dots \otimes \mathbb{P})(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$$

Alors par croissance de l'intégrale, $\mathbb{E}[X|\omega_n]$ est toujours croissante, et d'après le théorème de Fubini on a la propriété suivante : $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\omega_n]] = \mathbb{E}[X]$.

Soit maintenant ω_n fixée et \hat{X} la variable aléatoire supportée par Ω_{n-1} et définie par $\hat{X}(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) = X(\omega_1, \dots, \omega_n)$. Alors \hat{X} est toujours croissante. D'après l'hypothèse de récurrence on a :

$$\mathbb{E}[\hat{X}\hat{Y}] \geq \mathbb{E}[\hat{X}]\mathbb{E}[\hat{Y}].$$

Or, $\mathbb{E}[\hat{X}] = \mathbb{E}[X|\omega_n]$. Donc

$$\mathbb{E}[XY|\omega_n] = \mathbb{E}[\hat{X}\hat{Y}] \geq \mathbb{E}[\hat{X}]\mathbb{E}[\hat{Y}] = \mathbb{E}[X|\omega_n]\mathbb{E}[Y|\omega_n].$$

Enfin, il suffit de passer cette inégalité aux espérances pour obtenir

$$\mathbb{E}[XY] \geq \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\omega_n]\mathbb{E}[Y|\omega_n]] \geq \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\omega_n]]\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\omega_n]] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

où l'inégalité du milieu est justifiée par le fait que $\mathbb{E}[X|\omega_n]$ et $\mathbb{E}[Y|\omega_n]$ sont croissantes et supportées par \mathcal{O} qui est totalement ordonné, donc vérifient l'inégalité de corrélation. D'où l'inégalité FKG dans le cas où l'univers est un produit fini d'ensembles totalement ordonnés. \square

Remarque 1. On dispose d'un analogue de l'inégalité FKG lorsque les événements X et Y sont tous deux décroissants (resp. l'un est croissant et l'autre est décroissant). En effet, dans ce cas on a $\mathbb{E}[XY] \geq \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ (resp. $\mathbb{E}[XY] \leq \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$).

Un corollaire utile : le "square root trick" L'inégalité FKG va nous être utile dans notre problème sous la forme plus simple suivante : Si A et B sont deux événements croissants, alors on a $\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Pour le voir, il suffit d'appliquer l'inégalité FKG aux variables aléatoires indicatrices de nos deux événements, elles aussi croissantes.

Corollaire 1. (Le "square root trick") Soient A_1 et A_2 deux événements croissants. Soit $A = A_1 \cup A_2$, et supposons qu'on a $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2)$. Alors on a

$$\mathbb{P}(A_1) \geq 1 - (1 - \mathbb{P}(A))^{1/2}.$$

Démonstration. Cette majoration s'établit grâce aux inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} (1 - \mathbb{P}(A_1))^2 &= \mathbb{P}(A_1^c)^2 \\ &= \mathbb{P}(A_1^c)\mathbb{P}(A_2^c) \\ &\leq \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c) \\ &= 1 - \mathbb{P}(A) \end{aligned}$$

puisque le complémentaire d'un événement croissant est décroissant. □

3 Premiers résultats

On commence par démontrer quelques résultats concernant la forme de l'ensemble A_∞ en fonction de la valeur du paramètre p .

3.1 A_∞ est-il vide ?

On note

$$\Omega_0 = \{A_\infty \neq \emptyset\}.$$

Propriété 4. . On a l'équivalence suivante :

$$\mathbb{P}(\Omega_0) > 0 \Leftrightarrow p > \frac{1}{N^2}.$$

Démonstration. Fixons $n \in \mathbb{N}$. Soit Z_n le nombre de $B_{i,j}^n$ contenus dans A_n . Z_n suit un processus de Galton-Watson où chaque individu (un carré de taille $\frac{1}{N^n}$) donne naissance à un nombre de descendants (carrés de taille $\frac{1}{N^{n+1}}$) suivant une binomiale de paramètres (N^2, p) . En conséquence, l'espérance de la loi de reproduction du processus de Galton-Watson est N^2p et on a extinction presque sûre si et seulement si $p \leq \frac{1}{N^2}$.

Si l'on a extinction en temps fini, A_n est vide pour n assez grand donc $A_\infty = \emptyset$. Si l'on n'a pas extinction en temps fini, A_∞ est une intersection décroissante de compacts non vides, elle est donc non vide. □

De plus dans ce cas, la propriété 3 donne que $\mathbb{P}(\Omega_0)$ est la plus grande solution de l'équation d'inconnue x :

$$((1-p) + p(1-x))^{N^2} = 1-x.$$

3.2 Premières propriétés de connexité

Propriété 5. *Soit x n'étant pas un nombre N -adique ($x \notin \{\frac{m}{N^n}, m, n \in \mathbb{N}\}$), alors*

$$\mathbb{P}(A_\infty \cap \{x\} \times [0, 1] = \emptyset) = 0 \Leftrightarrow p \leq \frac{1}{N}.$$

En particulier, dès que $p \leq \frac{1}{N}$, les plus grandes composantes connexes de A_∞ sont des points.

Démonstration. On note $S = \{x\} \times [0, 1]$. A l'étape n , les carrés $B_{i,j}^n$ qui intersectent S le découpent en N^n segments verticaux $S_j^n = \{x\} \times \left[\frac{j-1}{N^n}, \frac{j}{N^n} \right]$. On note Z_n le nombre de segments S_j^n inclus dans A_n . Le $n+1$ -ième découpage sépare chaque S_j^n de A_n en N segments, chacun restant dans A_{n+1} ssi l'unique carré qui le contient y reste, c'est à dire avec probabilité p . Ainsi Z_n suit un Galton-Watson, chaque individu ayant en moyenne Np descendants. On conclut de même que précédemment. \square

La proposition suivante permet ensuite d'affiner la borne obtenue sur p pour que les composantes connexes de A_∞ soient des points.

Propriété 6. *Si $p \leq \frac{1}{\sqrt{N}}$, alors presque sûrement, les composantes connexes de A_∞ sont des points*

Démonstration. Soit x un nombre N -adique. On dit que le segment $S_j^n = \left[\frac{j-1}{N^n}, \frac{j}{N^n} \right] \times \{x\}$ est manquant si l'un des deux carrés adjacents du n -ième découpage l'est. Soit Z_n le nombre de segments non manquants à l'étape n , à partir d'un certain rang, Z_n suit un processus de Galton-Watson de moyenne $p^2 N$. Donc, si $p \leq \frac{1}{\sqrt{N}}$, presque sûrement, en temps fini, tous les S_j^n sont manquants.

Soit $\omega \in \Omega$ et n tels que les S_j^n soient tous manquants. Alors on a un chemin C traversant $[0, 1]^2$ verticalement, vérifiant

$$C \cap A_\infty \subset \left\{ x, \frac{j}{N^n}, 1 \leq j \leq N^n \right\} =: D.$$

Ce chemin peut être choisi arbitrairement proche de $x \times [0, 1]$. On a presque sûrement qu'en un nombre fini k d'étapes supplémentaires $D \cap A_{n+k} = \emptyset$ car D est fini. Ainsi presque sûrement il existe en temps fini des chemins reliant le haut du carré au bas du carré arbitrairement proches de S dans A_∞^c .

De même, on peut avec probabilité 1 construire un chemin reliant la gauche à la droite du carré arbitrairement proche d'un segment N -adique horizontal qui est dans A_∞^c en temps fini.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ et des N -adiques $0 = a_0, \dots, a_d = 1$ tels que $\forall 0 \leq i < d-1, \varepsilon < a_{i+1} - a_i < 2\varepsilon$. Presque sûrement, il existe des chemins C_0, \dots, C_d traversant $[0, 1]^2$ de haut en bas et C'_0, \dots, C'_d traversant $[0, 1]^2$ de gauche à droite, dans A_∞^c , tels que

$$\forall 0 \leq i \leq d, d(C_i, \{a_i\} \times [0, 1]) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

et

$$\forall 0 \leq i \leq d, d(C'_i, [0, 1] \times \{a_i\}) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Le quadrillage engendré par les C_i et les C'_i permet d'assurer que deux points de la même composante connexes de A_∞ ont des abscisses différant au plus de $(2 + \frac{2}{3})\varepsilon = \alpha\varepsilon$, de même pour les ordonnées. Ainsi leur distance est majorée par $\sqrt{2}\alpha\varepsilon$. Le diamètre de toute composante connexe est inférieur à ce même majorant.

Bref : Pour tout $\varepsilon > 0$, les composantes connexes de A_∞ ont p.s un diamètre inférieur à ε . En prenant une suite $\varepsilon_n \rightarrow 0$ on conclut sans problème : presque sûrement toutes les composantes connexes de A_∞ ont un diamètre nul : ce sont des points. \square

4 Traversée horizontale

4.1 Existence d'un point critique

Soit $x \in A_0$, on note $C_n(x)$ la composante connexe de A_n contenant x . Si $x \notin A_n$, par convention $C_n(x) = \emptyset$. On note

$$B_n = \{x \in A_n, C_n(x) \cap \{0\} \times [0, 1] \neq \emptyset, C_n(x) \cap \{1\} \times [0, 1] \neq \emptyset\}.$$

Ainsi, B_n représente l'ensemble des points de A_n qui sont reliés aux deux segments verticaux $\{0\} \times [0, 1]$ et $\{1\} \times [0, 1]$ dans A_n . On définit également :

$$B_\infty = \bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n,$$

$$\Omega_1 = \{B_\infty \neq \emptyset\},$$

$$p_c(N) = \inf\{p, \mathbb{P}(\Omega_1) > 0\}.$$

Pour $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on dira que A_n est traversable si B_n est non vide.

Théorème 2. *Pour $N \geq 2, p_c(N) < 1$.*

Démonstration. On note pour cette démonstration $S = \{0\} \times [0, 1]$ Traitons le cas $N \geq 3$: On souhaite démontrer que

$$\exists p < 1, \mathbb{P}(\omega_1) > 0.$$

La preuve dans ce cas se décompose en trois étapes :

- On montrera dans un premier temps que si pour tout $n \in \mathbb{N}, B_n \neq \emptyset$ alors $B_\infty \neq \emptyset$.

- On démontrera ensuite que si, à chaque étape on ne retire d'un n -carré qu'au plus $N^2 - 1$ ($n + 1$)-carrés, alors A_n est traversable, et ce pour tout n .
- Enfin on démontrera qu'il existe $p < 1$ tel que ceci arrive avec une probabilité strictement positive.

Démontrons donc ces trois résultats successivement :

- Montrons dans un premier temps que

$$\forall n \in \mathbb{N}, B_n \neq \emptyset \Rightarrow B_\infty \neq \emptyset.$$

On va pour cela démontrer que les B_n sont fermés donc compacts, leur décroissance impliquera le résultat. Il suffit donc de montrer qu'à n fixé : $\{x \in A_n, C_n(x) \cap S \neq \emptyset\}$ est fermé. Fixons n et considérons une suite (x_p) à valeurs dans A_n telle que pour tout $p, C_n(x_p) \cap S \neq \emptyset$, on suppose que (x_p) converge vers x dans A_n . On a alors, pour tout p l'existence d'un point y_p de $S \cap A_n$ tel que x_p et y_p sont dans la même composante connexe. Quitte à extraire, y_p converge vers y dans $S \cap A_n$. Vue la structure de $A_n \cap S$ (c'est une union finie d'intervalles), à partir d'un certain rang y_p et y sont dans le même B_{ij}^n donc sont connectés. On a donc à partir d'un certain rang $x_p \in C_n(y_p) = C_n(y)$, or les composantes connexes sont des fermés de A_n donc $x \in C_n(y)$. Ainsi x est connecté à S dans A_n donc $x \in \{z \in A_n, C_n(z) \cap S \neq \emptyset\}$. On a ainsi démontré que B_n était fermé.

- On veut maintenant démontrer que si chaque carré père engendre au moins $N^2 - 1$ carré fils, alors $\forall n \leq n_0, B_n \neq \emptyset$, ce qui se voit bien sur un dessin.

Soit un événement $\omega \in \Omega$ telle que l'hypothèse soit vérifiée et démontrons par récurrence que tous les $B_n(\omega)$ sont non vides. Dans la suite on notera $B_n = B_n(\omega)$. $B_0 = A_0$ est trivialement non vide.

Pour l'hérédité, supposons qu'à un rang n fixé, B_n est non vide. Chaque $B_{ij}^n \cap A_n$ est clairement connexe donc si $B_{ij}^n \cap B_n \neq \emptyset$ alors $B_{ij}^n \subset B_n$. Il existe donc une suite de carrés B_{ij}^n tous dans B_n , dont le premier vérifie $i = 1$, le dernier $i = N^n$, et dont deux carrés consécutifs partagent tous une arête.

À i et j fixés, les sous carrés de taille $\frac{1}{N^{n+1}}$ inclus dans B_{ij}^n sont les

$$(B_{i'j'}^{n+1})_{(i',j') \in [N(i-1)+1; N(i-1)+N] \times [N(j-1)+1; N(j-1)+N]},$$

au plus un d'entre eux est dans A_{n+1}^c (par l'hypothèse). Cela permet d'assurer que $B_{ij}^n \cap A_{n+1}$ reste connexe, et d'autre part que si B_{ij}^n et $B_{i'j'}^n$ sont deux carrés consécutifs de la suite considérée précédemment, $B_{ij}^n \cap B_{i'j'}^n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ car au plus 2 des N segments de taille $\frac{1}{N^{n+1}}$ de leur arête commune sont dans A_{n+1}^c , et $N \geq 3$. Ainsi $B_{ij}^n \cap B_{i'j'}^n \cap A_{n+1}$ reste connexe et non vide. L'intersection I de la suite considérée précédemment avec A_{n+1} reste un connexe non vide de A_{n+1} contenant un point sur le segment $\{0\} \times [0, 1]$ et un sur le segment $\{1\} \times [0, 1]$. Donc $\emptyset \neq I \subset B_{n+1}$

- On souhaite donc maintenant démontrer que cette hypothèse est raisonnable, ie qu'elle arrive avec probabilité positive pour un $p < 1$. Pour cela on appelle "bonne"

une issue telle que A_1 contient au moins $N^2 - 1$ des B_{ij}^1 . On appelle "(très)ⁿ bonne" une issue telle que A_1 contient au moins $N^2 - 1$ (très)ⁿ⁻¹ bons carrés. On appelle θ_n la probabilité d'avoir une (très)ⁿ bonne issue ie soit de garder N^2 carrés dont $N^2 - 1$ ou N^2 sont (très)ⁿ⁻¹ bons, soit de garder $N^2 - 1$ carrés qui sont tous (très)ⁿ⁻¹ bons. On a donc :

$$\theta_{n+1} = p^{N^2} \left(\theta_n^{N^2} + N^2 \theta_n^{N^2-1} (1 - \theta_n) \right) + N^2 p^{N^2-1} (1 - p) \theta_n^{N^2-1},$$

en considérant que

$$\theta_0 = p^{N^2} + N^2 p^{N^2-1} (1 - p).$$

On note

$$\phi(x) = p^{N^2} \left(x^{N^2} + N^2 x^{N^2-1} (1 - x) \right) + N^2 p^{N^2-1} (1 - p) x^{N^2-1}$$

de sorte qu'en posant $\theta_{-1} = 1$, on ait :

$$\forall m \geq 0, \theta_m = \phi^{m+1}(1).$$

Par définition des événements "être une (très)ⁿ bonne issue", θ_n est décroissante minorée donc converge vers un point fixe de ϕ . Ce point fixe se trouve être le plus grand des points fixes de ϕ sur $[0, 1]$ par le même argument qu'à la propriété 3. Posons pour alléger $\alpha = p^{N^2}$ et $\beta = N^2 p^{N^2-1} (1 - p)$, de sorte que :

$$\phi(x) = (N^2 \alpha + \beta) x^{N^2-1} - (N^2 - 1) \alpha x^{N^2}$$

On veut montrer que ϕ admet un point fixe strictement positif, pour cela, on va se contenter de montrer que $\phi(1 - \varepsilon) > 1 - \varepsilon$ pour un ε bien choisi, car il est clair que $\phi(x) \leq x$ lorsque x est suffisamment proche de 0.

Les DL classiques donnent que pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit ($\varepsilon < \frac{3}{N^2 - 3}$ exactement), on a :

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon)^{N^2-1} &\geq 1 - (N^2 - 1)\varepsilon \\ (1 - \varepsilon)^{N^2} &\leq 1 - N^2\varepsilon + \frac{N^2(N^2 - 1)}{2}\varepsilon^2 \end{aligned}$$

D'où lorsque $\varepsilon < \frac{3}{N^2 - 3}$:

$$\begin{aligned} \phi(1 - \varepsilon) &\geq (N^2 \alpha + \beta)(1 - (N^2 - 1)\varepsilon) - (N^2 - 1)\alpha(1 - N^2\varepsilon + \frac{N^2(N^2 - 1)}{2}\varepsilon^2) \\ &\geq \alpha + \beta - (N^2 - 1)\beta\varepsilon - \frac{N^2(N^2 - 1)^2\alpha}{2}\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Si l'on a de plus $\varepsilon < \frac{1}{N^2 - 1}$:

$$\phi(1 - \varepsilon) \geq \alpha - \frac{N^2(N^2 - 1)^2}{2} \varepsilon^2.$$

On veut donc trouver $\varepsilon < \frac{1}{N^2 - 1}$ tel que :

$$\frac{N^2(N^2 - 1)}{2} \varepsilon^2 - \varepsilon + 1 - \alpha < 0.$$

L'étude de ce trinôme montre qu'il admet un minimum en $\frac{1}{N^2(N^2 - 1)^2} < \frac{1}{N^2 - 1}$, ce minimum est négatif lorsque

$$p > \left(1 - \frac{1}{2N^2(N^2 - 1)^2}\right)^{\frac{1}{N^2}},$$

ce qui conclut à l'existence d'un point fixe strictement positif pour ϕ .

Finalement, on a ainsi $\lim \theta_n > 0$, ce qui montre qu'avec probabilité strictement positive, on a une issue (très)^m bonne pour tout m .

Si w est un (très)^m bon événement pour tout m alors A_0 contient au moins $N^2 - 1$ B_{ij}^1 , qui sont (très)^m bons pour tout m . Notons $\tilde{A}_1(\omega)$ l'union de ces carrés. On note $\tilde{A}_2(\omega)$ l'union des B_{ij}^2 , inclus dans $\tilde{A}_1(\omega)$, qui sont (très)^m bons pour tout m : chaque B_{ij}^1 de $\tilde{A}_1(\omega)$ en contient au moins $N^2 - 1$. La suite des $A_0, \tilde{A}_1(\omega), \tilde{A}_2(\omega), \dots$ ainsi construite est une suite déterministe qui vérifie elle l'hypothèse du 2, donc également sa conclusion. Comme $\tilde{A}_\infty(\omega) \subset A_\infty(\omega)$, $A_\infty(\omega)$ est traversable.

On a ainsi conclu dans les cas $N \geq 3$.

Reste à traiter le cas $N = 2$: on procède par couplage avec le cas $N = 4$. L'idée est de construire un processus de percolation fractale (A_n) pour $N = 4$ et $p \in]p_c(4), 1[$ et un processus (\tilde{A}_n) pour $N = 2$ et $\tilde{p} \in]0, 1[$ bien choisi tel que $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset \tilde{A}_{2n}$. Alors, tout carré présent à l'étape n dans le cas $N = 4$ est présent à l'étape $2n$ dans le cas $N = 2$. Dès qu'il y a percolation avec probabilité strictement positive dans le cas $N = 4$, il y aura percolation avec probabilité strictement positive dans le cas $N = 2$. Par ailleurs, si l'on sait coupler A_1 avec \tilde{A}_2 , on saura établir ce couplage pour tout n .

Si l'on arrive à coupler les quatre carrés du quart supérieur droit de A_1 avec celui de \tilde{A}_2 , on pourra coupler A_1 avec \tilde{A}_2 car les quarts sont choisis indépendamment dans A_1 et dans \tilde{A}_2 . On s'intéresse donc aux 4 carrés de côté $\frac{1}{4}$ situés dans le coin supérieur droit. Le processus normal pour déterminer le statut "vide" ou "plein" de ces carrés consiste dans le cas $N = 4$ à tirer 4 Bernoulli iid de paramètre p , définissant chacun l'état d'un des carrés, dans le cas $N = 2$ à tirer 5 Bernoulli iid de paramètre \tilde{p} , la première déterminant si le quart en question est vide ou plein, et si il est plein, les 4 suivantes déterminent séparément l'état de chacun des 4 carrés. Plutôt que de fonctionner ainsi, on choisit un fonctionnement différent mais qui est équivalent du point de vue des lois : on a deux variables X et \tilde{X} à valeurs dans $\{0, \dots, 4\}$ qui détermineront le nombre de carrés pleins dans le coin supérieur

gauche, puis 5 variables uniformes $(U_i)_{i \in \{0, \dots, 4\}}$ à valeurs dans $\{1, \dots, \binom{4}{i}\}$ qui déterminent la disposition des carrés pleins parmi les 4 emplacements disponibles : le coin supérieur gauche de \tilde{A}_2 est déterminé par $U_{\tilde{X}}$ et celui de A_1 par U_X . On peut choisir les U_i de sorte que si $i < j$, pour tout événement ω , les carrés pleins de U_i sont pleins dans U_j . Dès lors si on arrive à coupler X et \tilde{X} de sorte que $X \leq \tilde{X}$, on aura réussi.

Il est clair que \tilde{X} suit une loi binomiale de paramètres $(4, \tilde{p})$, la loi de X est en revanche moins simple, mais ce n'est pas grave. Pour avoir $X \geq \tilde{X}$, il suffit d'avoir

$$F_2 =: F_{\tilde{X}} \leq F_X =: F_4$$

où F_Y désigne la fonction de répartition de la variable aléatoire Y . Or, X et \tilde{X} suivent des lois à valeurs de $\{0, \dots, 4\}$. Ainsi, F_4 et F_2 sont deux fonctions croissantes et constantes par morceaux sur les intervalles $[k, k+1[$, pour $k \in \{0, \dots, 3\}$. Pour obtenir la condition désirée avec une valeur de \tilde{p} non triviale, il est donc suffisant de choisir une valeur de \tilde{p} différente de 1 pour laquelle $F_2(3) \leq F_4(0)$. Or, on a $F_4(0) = (1-p)^4 > 0$, et $F_2(3) \xrightarrow{\tilde{p} \rightarrow 1} 0$, donc une telle valeur existe bien.

Pour achever le couplage, il suffit de se donner V une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$, et de définir $X = F_4^{-1}(V)$ pour $p_c < p < 1$ (par ce qui précède) et $\tilde{X} = F_2^{-1}(V)$ pour \tilde{p} choisi comme précédemment. Alors dans ce cas, tous les carrés conservés dans A_∞ (cas $N = 4$) le sont également pour \tilde{A}_∞ (cas $N = 2$). Donc $p_c(2) \leq \tilde{p} < 1$, ce qui achève la preuve du théorème. \square

4.2 Etude de la transition de phase

Le théorème 2 montre ainsi que la probabilité critique p_c est non triviale : il y a donc un phénomène de **transition de phase**, ce qui donne son intérêt mathématique au modèle étudié. Le but de ce qui suit est d'étudier de manière plus fine cette transition : que se passe-t-il juste avant, juste après et au point critique ? Nous allons voir que la transition de phase est plus violente que dans le modèle de percolation "classique" sur \mathbb{Z}^2 , comme le montre le théorème suivant.

Théorème 3. *Si p est choisi de sorte que $\mathbb{P}(A_\infty \text{ contient une composante connexe non réduite à un point}) > 0$, alors on a $p \geq p_c$.*

Ainsi, ce théorème montre que l'on passe directement d'un modèle où les composantes connexes sont des points à un ensemble qui possède un chemin traversant de gauche à droite avec probabilité strictement positive !

Pour démontrer le théorème 3, nous nous reposerons sur le lemme essentiel suivant :

Lemme 1. *Considérons le réseau \mathbb{Z}^2 , où l'on place dans chaque carré $[k, k+1] \times [j, j+1]$ une copie indépendante des A_∞ et appelons l'ensemble obtenu A'_∞ . Notons alors $\Omega_{K,J}$ l'événement : "il existe une traversée horizontale de $A_\infty^{K,J} = A'_\infty \cap [0, K] \times [0, J]$ ". Alors on a l'implication suivante :*

$$\mathbb{P}(\Omega_{1,2}) > 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\Omega_{1,1}) > 0.$$

Démonstration du lemme 1. On fait la preuve pour le cas $N \geq 3$ (on traitera le cas $N = 2$ à part à la fin de cette preuve). La preuve de ce lemme requiert quelques définitions et dessins. On commence par désigner par S_1^n un carré de la première colonne de $A_n^{1,2}$, par S_2^n un carré de la i -ème colonne de $A_n^{1,2}$, pour $i \in \{1, \dots, N^{n-1}\}$, par T_1^m un carré de la j -ième colonne de $A_m^{1,2}$ pour $j \in \{(N-1)N^{m-1}, \dots, N^m\}$, et enfin par T_2^m un carré de la dernière colonne de $A_m^{1,2}$.

On définit également l'événement suivant : $C(S_1^n, S_2^n, T_1^m, T_2^m) = \{A_\infty^{1,2} \text{ contient une composante connexe, qui contient elle-même un chemin } C \text{ qui traverse horizontalement } A_\infty^{1,2} \text{ et tel que le début de } C \text{ connecte la face gauche de } S_1^n \text{ à la face droite de } S_2^n \text{ en restant dans les } i \text{ premières colonnes de } A_\infty^{1,2} \text{ et tel que la fin de } C \text{ relie la face gauche de } T_1^m \text{ avec la face droite de } T_2^m \text{ tout en restant dans les } N^m - j + 1 \text{ dernières colonnes de } A_\infty^{1,2}\}$. Cet événement est visible sur la figure 5.

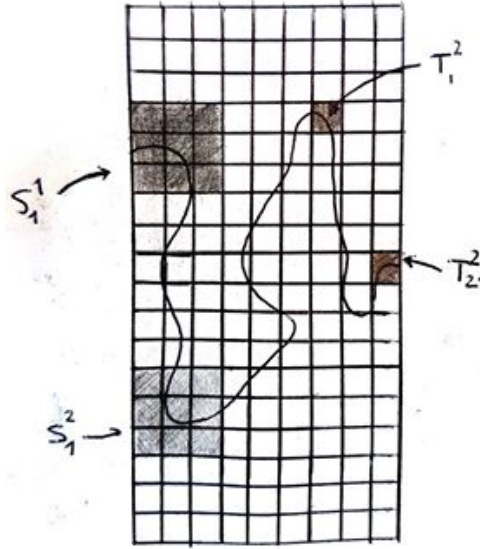


FIGURE 5 – L'événement $C(S_1^n, S_2^n, T_1^m, T_2^m)$

Etant donné que $\mathbb{P}(\Omega_{1,2}) > 0$, on obtient que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ on peut trouver $S_1^n, S_2^n, T_1^m, T_2^m$ tels que $\mathbb{P}(C(S_1^n, S_2^n, T_1^m, T_2^m)) > 0$. Supposons que S_1^n et S_2^n ne sont pas situés sur la même ligne, et que de même T_1^m et T_2^m ne sont pas situés sur la même ligne. Alors la figure 6 montre comment construire une traversée horizontale de l'ensemble $A_\infty^{N,2}$.

D'après l'inégalité FKG, cette traversée advient donc avec une probabilité strictement positive. En outre cette traversée réalise évidemment une traversée de l'ensemble $A_\infty^{N,N}$. On obtient donc que $\mathbb{P}(\Omega_{N,N}) > 0$, ce qui permet d'arriver au résultat attendu :

$$\mathbb{P}(\Omega_{1,1}) \geq \mathbb{P}(\Omega_{1,1} \text{ et } \forall 1 \leq i, j \leq N^2 \varepsilon_{ij}^n = 1) = \mathbb{P}(\Omega_{1,1} | \forall 1 \leq i, j \leq N^2, \varepsilon_{ij}^n = 1) p^{N^2} = p^{N^2} \mathbb{P}(\Omega_{N,N})$$

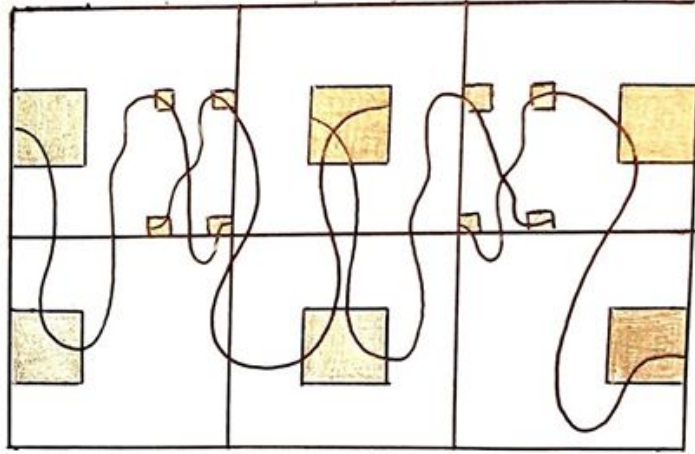


FIGURE 6 – La construction pour $N = 3$

Pour tous n, m , on peut trouver des $S_1^n, S_2^n, T_1^m, T_2^m$ avec $\mathbb{P}(C(S_1^n, S_2^n, T_1^m, T_2^m)) > 0$. Reste à prouver que l'on peut effectivement supposer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que S_1^n et S_2^n ne sont pas situés sur la même ligne, et m tel que T_1^m et T_2^m ne sont pas situés sur la même ligne.

Pour commencer on montre qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe T_1^m, T_2^m tels qu'avec probabilité non nulle $C(S_1^n, S_2^n, T_1^m, T_2^m)$ est réalisé et S_1^n et S_2^n ne sont pas situés sur la même ligne. Par l'absurde, si ce n'est pas le cas, alors pour tout n , avec probabilité $\mathbb{P}(\Omega_{1,2})$ il existe une des N^n lignes de la colonne $[0, \frac{1}{N}] \times [0, 2]$ telle que le chemin horizontal traverse chaque carré de cette ligne. Ainsi, il existe une ligne L de carrés de bords N^{-n} de la colonne $[0, \frac{1}{N}] \times [0, 2]$ telle que

$$\mathbb{P}(\text{"les carrés de } L \text{ sont tous pleins"}) \geq \frac{1}{2N^n} \mathbb{P}(\Omega_{1,2}).$$

D'autre part, on peut aisément avoir la majoration :

$$\mathbb{P}(\text{la première ligne a ses } N^{n-1} \text{ premiers carrés ouverts}) \leq p^{N^{n-1}}.$$

Ainsi, on obtient

$$\mathbb{P}(\Omega_{12})N^{-n} \leq 2p^{N^{n-1}}$$

ce qui est absurde pour n suffisamment grand (on a supposé $n \geq 3$).

Puis, ceci étant prouvé, on sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \in \mathbb{N}$, avec probabilité non nulle $C(S_1^{n_0}, S_2^{n_0}, T_1^m, T_2^m)$ est réalisé et $S_1^{n_0}$ et $S_2^{n_0}$ ne sont pas situés sur la même ligne. On se place donc sur cet événement, et le même raisonnement sur m nous démontre qu'il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel qu'avec probabilité non nulle, $C(S_1^{n_0}, S_2^{n_0}, T_1^{m_0}, T_2^{m_0})$ est réalisé, $S_1^{n_0}$ et $S_2^{n_0}$ ne sont pas situés sur la même ligne et $T_1^{m_0}$ et $T_2^{m_0}$ ne sont pas situés sur la même ligne

Enfin, le cas $N = 2$ se traite exactement de la même manière, à la précaution près qu'on doit considérer des $n, m \geq 2$ (afin que la première et la dernière colonne soient bien séparées par au moins une autre colonne). \square

Passons maintenant à la démonstration du théorème 3.

Preuve du théorème 3. Supposons que p est choisi de sorte que A_∞ contient une composante connexe non réduite à un point avec probabilité strictement positive, et notons C une de ces composantes connexes. Notons $p_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la projection sur l'axe des abscisses et de même p_2 la projection sur l'axe des ordonnées. Si λ désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} , alors soit on a $\lambda(p_1(C)) > 0$, soit on a $\lambda(p_2(C)) > 0$, puisque C est supposée connexe et non réduite à un point. Dans le premier cas, on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ et une colonne K_n de largeur $\frac{1}{N^n}$ tels que C traverse horizontalement K_n . Dans le second cas, on trouvera une ligne L_n traversée verticalement par C . Dans la suite on se restreindra au premier cas (le système est invariant par rotation de $\frac{\pi}{2}$). Notons S_1, \dots, S_{N^n} les carrés de K_n , dans l'ordre, et on considère un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow C \cap K_n$, qui commence dans le bord gauche de K_n et finit dans son bord droit. On note $\gamma^* = \gamma([0, 1])$. Deux cas peuvent se présenter, ils sont représentés sur la figure 7 :

- Il existe au moins trois carrés S_i, S_{i+1}, S_{i+2} de K_n tels que $\gamma^* \cap S_i, \gamma^* \cap S_{i+1}, \gamma^* \cap S_{i+2} \neq \emptyset$.
- Il existe au plus 2 carrés S_j et S_{j+1} tels que l'on ait $\gamma^* \cap S_j \neq \emptyset$ et $\gamma^* \cap S_{j+1} \neq \emptyset$.

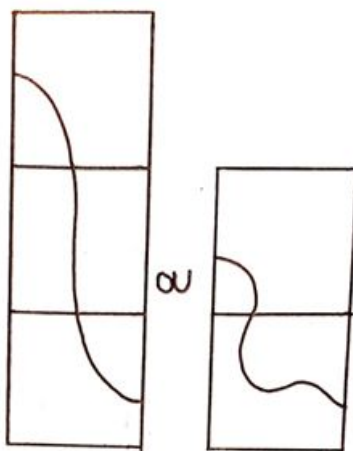


FIGURE 7 – Les deux possibilités

Dans la mesure où ces deux possibilités recouvrent l'événement " A_∞ contient une composante connexe non triviale", lui même de probabilité positive strictement, un de ces deux cas admet une probabilité strictement positive.

Si le premier cas admet une probabilité non nulle, alors avec probabilité non nulle A_∞ traverse $S_{i+1} \cap A_\infty$ verticalement. Ainsi, toujours avec probabilité non nulle il existe un

carré de taille $\frac{1}{N^n}$ traversé par A_∞ . Or si $\mathbb{P}(\Omega_{1,1}) = 0$, alors pour tout i , la probabilité de traverser S_i , ie $p^n \mathbb{P}(\Omega_{1,1})$ (par changement d'échelle) est nulle. Donc

$$\mathbb{P}(\exists i, A_\infty \text{ traverse } S_i) \leq \sum_i \mathbb{P}(A_\infty \text{ traverse } S_i) = 0.$$

Ainsi nécessairement $\mathbb{P}(\Omega_{1,1}) > 0$.

Si le second cas est de probabilité non nulle, A_∞ traverse horizontalement un groupe de deux carrés consécutifs avec probabilité strictement positive ce qui est impossible si $\mathbb{P}(\Omega_{1,2}) = 0$, par des arguments semblables à ceux du cas précédents. Donc $\mathbb{P}(\Omega_{1,2}) > 0$, et le lemme précédent s'applique : on obtient encore une fois $\mathbb{P}(\Omega_{1,1}) > 0$, ce qui achève la démonstration. \square

Une autre question intéressante à se poser est la suivante : y a-t-il percolation au point critique avec probabilité strictement positive ? Ce problème est une question primordiale en théorie de la percolation. Par exemple il est connu dans le modèle "standard" sur \mathbb{Z}^2 qu'il n'y a pas percolation au point critique, mais la même question sur \mathbb{Z}^3 n'a à ce jour pas été résolue. Dans notre modèle, la situation est différente : le théorème suivant affirme qu'il y a percolation avec une probabilité strictement positive à p_c .

Théorème 4. *La fonction $\theta : p \in [0, 1] \mapsto \mathbb{P}_p(\Omega_{1,1})$ est discontinue en p_c . En fait, $\theta(p_c) > 0$.*

Démonstration. On va commencer par démontrer que la fonction θ est continue à droite. Tout d'abord, on montre que θ est semi-continue supérieurement, ie que pour tout $\alpha \in [0, 1]$, l'ensemble $\{p \in [0, 1], \theta(p) < \alpha\}$ est ouvert. En effet, si l'on note $\theta_n : p \in [0, 1] \mapsto \mathbb{P}(\Omega_{1,1}^n)$, alors on a la convergence simple $\theta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \theta$ en décroissant. Or, les fonctions θ_n sont toutes continues (en fait elles sont polynomiales), donc en particulier elles sont semi-continues supérieurement. Puis :

$$\{p \in [0, 1], \theta(p) < \alpha\} = \left\{ p \in [0, 1], \inf_{n \in \mathbb{N}} \theta_n(p) < \alpha \right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{p \in [0, 1], \theta_n(p) < \alpha\}$$

qui est un ouvert comme union d'ouverts.

Mais θ est une fonction croissante (un argument classique de couplage le montre). Or, il est clair qu'une fonction croissante semi-continue supérieurement est continue à droite. Donc θ est continue à droite.

Cette remarque montre que la discontinuité de θ est équivalente à la stricte positivité de $\theta(p_c)$. Passons maintenant à la démonstration de ce point. Par le lemme 1, il suffit de démontrer que $\mathbb{P}_{p_c}(\Omega_{1,2}) > 0$. Par la suite, pour simplifier les notations, on notera $\tau(p) = \mathbb{P}_p(\Omega_{1,2})$. Soit $p > 0$, et supposons que $\Omega_{1,2}$ soit réalisé. Alors pour tout entier $j \in \{1, \dots, N\}$, l'un des deux événements suivants est réalisé (comme dans la preuve du théorème 3) :

- $E_1 =$ "Après une division, un des $2N$ carrés S_i de la j -ième colonne de $[0, 1] \times [0, 2] \cap A'_\infty$ est traversé verticalement".

- $E_2 =$ "Après une division, un des $2N - 1$ rectangles $S_i \cup S_{i+1}$ de la j -ième colonne de $[0, 1] \times [0, 2] \cap A'_\infty$ est traversé horizontalement".

Mais alors on obtient

$$\tau(p) \leq \mathbb{P}(E_1 \cup E_2)^N \leq (\mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2))^N.$$

Or, en notant $V(S_i)$ (resp $H(S_i)$) l'événement " S_i est traversé verticalement" (resp horizontalement), on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_1) &\leq 2N\mathbb{P}(V(S_i)) \\ &= 2Np\theta(p) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_2) &\leq \sum \mathbb{P}(H(S_i \cup S_{i+1})) \\ &\leq (2N - 1)(p^2\tau(p) + 2p(1 - p)\theta(p)) \\ &= (2N - 1)p^2\tau(p) + (4N - 2)p(1 - p)\theta(p) \\ &\leq (2N - 1)\tau(p) + (4N - 2)p\theta(p). \end{aligned}$$

Ainsi en combinant ces inégalités on obtient

$$\begin{aligned} \tau(p)^{\frac{1}{N}} &\leq (2N - 1)p^2\tau(p) + (6N - 2)p\theta(p) \\ &\leq (2N - 1)\tau(p) + (6N - 2)\theta(p) \\ &\leq (8N - 3)\tau(p), \end{aligned}$$

où la dernière ligne est justifiée par le fait que $\tau \geq \theta$.

Ainsi, si $\tau(p) > 0$, alors on obtient

$$\tau(p) \geq \left(\frac{1}{8N - 3} \right)^{\frac{N-1}{N}}.$$

Donc τ est discontinue. Comme τ est également continue à droite (c'est sensiblement la même preuve), on obtient $\tau(p_c) > 0$, donc $\theta(p_c) > 0$, ce qui achève la preuve. \square

5 Percolation dans \mathbb{R}^2

On s'intéresse à nouveau au plan recouvert de copies indépendantes de A_0 , le but étant d'étudier la probabilité de percolation dans ce cas. On souhaite démontrer que la probabilité critique d'existence d'une composante connexe non bornée est égale à p_c . Deux lemmes notés (a') et (b') sont essentiels à la démonstration de ce théorème, on les démontrera dans un premier temps. Pour cela, la stratégie va être d'adapter des résultats de percolation par sites à notre modèle de percolation fractale.

5.1 Enoncé et preuves des lemmes en percolation par sites

On se place donc dans le modèle connu de la percolation par sites, où chaque site est ouvert avec une probabilité p et fermé avec une probabilité $1 - p$, indépendamment des autres : on notera $\rho_{K,J}$ la probabilité qu'il y ait un chemin traversant horizontalement le rectangle $\{1, \dots, K\} \times \{1, \dots, J\}$.

Propriété 7. On a les inégalités suivantes :

(A) Soient $k, L \in \mathbb{N}$. Si $\rho_{L,L} \geq 1 - \varepsilon$, alors $\rho_{kL,L} \geq 1 - h_k(\varepsilon)$, où $h_k(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ indépendamment de L .

(B) Si $\rho_{2L,L} \geq 1 - \frac{1}{25e}$ (≈ 0.99), alors $\rho_{2^k L, 2^{(k-1)L}} \geq 1 - \frac{1}{25} \exp(-2^{k-1})$.

Pour ce faire on commence par le lemme suivant (qui est l'initialisation pour $k = \frac{3}{2}$ de l'inégalité (A)).

Lemme 2. On a l'inégalité $\rho_{\frac{3L}{2}, L} \geq (1 - \sqrt{1 - \rho_{L,L}})^3$.

Démonstration. (Lemme)

On se place dans le rectangle $\mathcal{R} = [0, \frac{3L}{2}] \times [0, L]$. Si s est un chemin traversant $[0, L] \times [0, L]$ de gauche à droite et orienté dans ce sens et supposé sans cycles, on définit les ensembles suivants, visibles sur la figure 8.

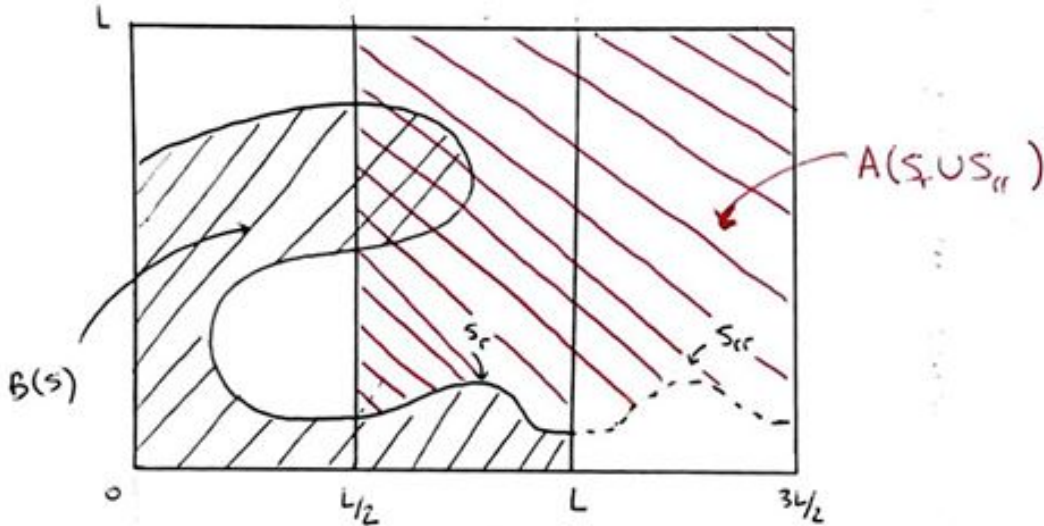


FIGURE 8 – Les différents ensembles considérés

- s_r est la portion de s située entre la dernière fois où s croise la droite $\{\frac{L}{2}\} \times [0, L]$ et $\{L\} \times [0, L]$.

- s_{rr} est le symétrique de s_r par rapport à la droite $\{L\} \times [0, L]$.
- $\mathcal{B}(s)$ est l'ensemble des points de $[0, L]^2$ situés strictement sous les arêtes de s .
- $\mathcal{A}(s_r \cup s_{rr})$ est l'ensemble des points de $[\frac{L}{2}, \frac{3L}{2}] \times [0, L]$ situés strictement au dessus des arêtes de $s_r \cup s_{rr}$.

On définit également les événements suivants :

- $E_s = \{s \text{ est le chemin ouvert le plus bas reliant } \{0\} \times [0, L] \text{ à } \{L\} \times [0, L]\}$.
- $F_s = \{\text{Il existe un chemin } s' \text{ reliant } [\frac{L}{2}, \frac{3L}{2}] \times \{L\} \text{ et } s_r \text{ dans } \mathcal{A}(s_r \cup s_{rr}) \setminus \mathcal{B}(s) \text{ et vérifiant : } \forall 1 \leq i \leq k, s'_i \in s \text{ ou } s'_i \text{ est ouvert}\}$.
- $F'_s = \{\text{Il existe un chemin ouvert reliant } [\frac{L}{2}, \frac{3L}{2}] \times \{L\} \text{ à } s_r \text{ dans } \mathcal{A}(s_r \cup s_{rr})\}$
- $G = \bigcup_{s \text{ chemin tel que le premier point de } s_r \text{ est d'ordonnée inférieure à } \frac{L}{2}} E_s \cap F_s$
- $H = \{\text{Il existe un chemin ouvert reliant } \{\frac{L}{2}\} \times [0, L] \text{ à } \{\frac{3L}{2}\} \times [0, L] \text{ dont le premier point a une ordonnée supérieure à } \frac{L}{2}\}$

Ces définitions en main, on peut attaquer la preuve du lemme. Observons que si $G \cap H$ est réalisé, il existe un chemin traversant de gauche à droite dans \mathcal{R} , comme le montre la figure 9 :

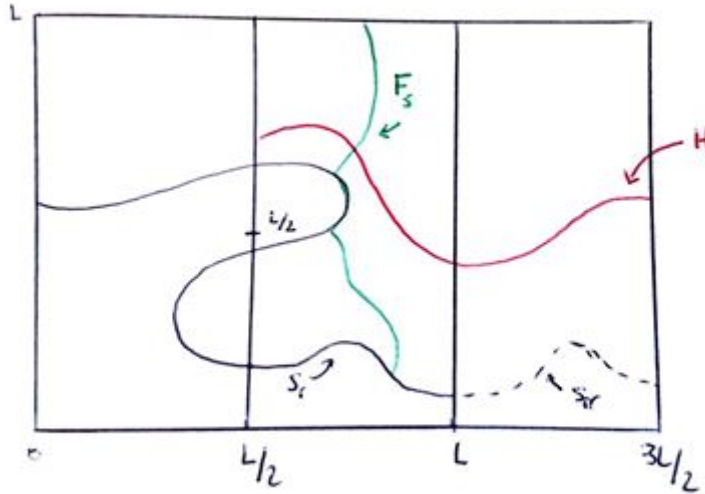


FIGURE 9 – Il existe un chemin traversant : on suit les chemins noir, puis vert et rouge

Il suffit donc de démontrer que

$$\mathbb{P}(G \cap H) \geq (1 - \sqrt{1 - \rho_{L,L}})^3.$$

Comme G et H sont des événements croissants, d'après l'inégalité FKG, on a $\mathbb{P}(G \cap H) \leq \mathbb{P}(G)\mathbb{P}(H)$. On estime séparément ces deux termes.

Si $A = \{\text{Il existe un chemin horizontal traversant dans } [\frac{L}{2}, \frac{3L}{2}] \times [0, L]\}$, $A_1 = H$ et $A_2 = \{\text{Il existe un chemin ouvert traversant dans } [\frac{L}{2}, \frac{3L}{2}] \times [0, L] \text{ dont l'ordonnée du premier point est inférieure à } \frac{L}{2}\}$, le square root trick assure que

$$\mathbb{P}(H) \geq 1 - \sqrt{1 - \rho_{L,L}}$$

Pour estimer $\mathbb{P}(G)$, on écrit $\mathbb{P}(G) = \sum_s \mathbb{P}(E_s \cap F_s) = \sum_s \mathbb{P}(E_s) \mathbb{P}(F_s | E_s)$.

Or, F_s et E_s sont indépendants (c'est l'intérêt de s'être mis dans le contexte de la percolation par sites) : en effet, F_s ne dépend que des points de $(\mathcal{A}(s_r \cup s_{rr}) \setminus \mathcal{B}(s)) \cup s$ tandis que E_s dépend des points de $\mathcal{B}(s)$.

De plus, si F'_s est réalisé, F_s est réalisé, comme le montrent les deux dessins de la figure 10 :

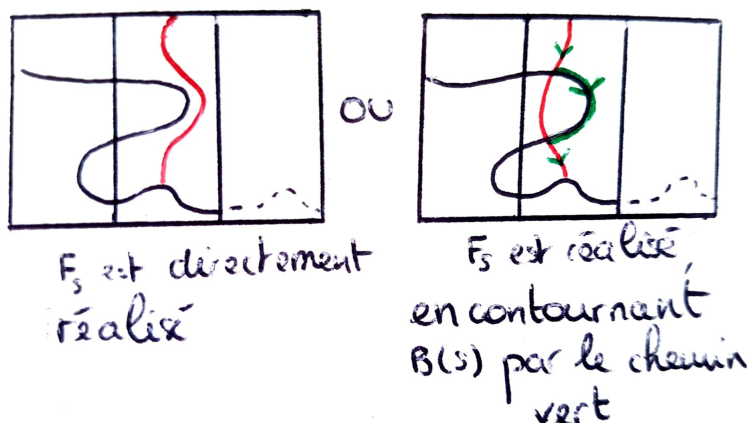


FIGURE 10 – Les deux possibilités qui réalisent F_s

Ces deux observations nous permettent d'affirmer que $\mathbb{P}(F_s | E_s) = \mathbb{P}(F_s) \geq \mathbb{P}(F'_s)$. Une application du square root trick avec les événements $A_1 = F'_s$, $A_2 = \{\text{Il existe un chemin reliant } [\frac{L}{2}, \frac{3L}{2}] \times \{L\} \text{ à } s_{rr} \text{ dans } \mathcal{A}(s_r \cup s_{rr})\}$ (on a bien $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2)$ car s_{rr} est le symétrique de s_r) nous donne

$$\mathbb{P}(F'_s) \geq 1 - \sqrt{1 - \mathbb{P}(A_1 \cup A_2)} \geq 1 - \sqrt{1 - \rho_{L,L}}.$$

car $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) \geq \rho_{L,L}$.

Enfin, soit $\tilde{E}_s = \{s \text{ est le plus haut chemin reliant } \{0\} \times [0, L] \text{ à } \{L\} \times [0, L]\}$.

Alors

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{y(s) \leq \frac{L}{2}} E_s \right) = \mathbb{P} \left(\bigcup_{y(s) \geq \frac{L}{2}} \tilde{E}_s \right)$$

et

$$\left(\bigcup_{y(s) \leq \frac{L}{2}} E_s \right) \cup \left(\bigcup_{y(s) \geq \frac{L}{2}} \tilde{E}_s \right) = \{\text{Il existe un chemin traversant de l'abscisse 0 à l'abscisse } L\}.$$

En appliquant encore une fois le square root trick, on obtient :

$$\sum_{s \text{ tq } y(s) \leq \frac{L}{2}} \mathbb{P}(E_s) \geq \mathbb{P} \left(\bigcup_{y(s) \leq \frac{L}{2}} E_s \right) \geq 1 - \sqrt{1 - \rho_{L,L}}.$$

Finalement en combinant ces trois inégalités on obtient bien

$$\mathbb{P}(G \cap H) \geq \mathbb{P}(G)\mathbb{P}(H) \geq (1 - \sqrt{1 - \rho_{L,L}})^3$$

D'où le lemme. □

Lemme 3. Pour $k \geq 1$, on a :

$$1 - \rho_{kL,L} \leq 3(1 - \rho_{(k+1)L/2,L}).$$

Démonstration. Si les $(A_i)_{1 \leq i \leq 3}$ sont trois événements, on a :

$$\mathbb{P} \left(\bigcup A_i^c \right) \leq \sum \mathbb{P}(A_i^c).$$

Disons que A_1 et A_2 sont les événements de traversée horizontale des blocs $[0, \frac{(k+1)L}{2}] \times [0, L]$ et $[\frac{(k+1)L}{2}, L] \times [0, L]$, et A_3 est l'événement de traversée verticale du bloc $[\frac{(k-1)L}{2}, \frac{(k+1)L}{2}] \times [0, L]$.

Il est clair sur le dessin 11 que $\bigcup A_i^c$ contient "il n'y a pas de traversée horizontale de $[0, kL] \times [0, L]$ ".

On a donc en particulier

$$1 - \rho_{kL,L} \leq \mathbb{P} \left(\bigcup A_i^c \right) \leq \sum \mathbb{P}(A_i^c) \leq 2(1 - \rho_{(k+1)L/2,L}) + 1 - \rho_{L,L} \leq 3(1 - \rho_{(k+1)L/2,L}).$$

La dernière inégalité vient de la décroissance de $\rho_{kL,L}$ par rapport à k . □

Une récurrence dont l'initialisation est assurée par le lemme 1 et l'hérédité par le lemme 2 permet alors de démontrer la propriété A.

Pour démontrer la propriété B, on démontre successivement deux contrôles :

Lemme 4.

$$1 - \rho_{4L,L} \leq 5(1 - \rho_{2L,L}).$$

Démonstration. La preuve de ce lemme est identique à celle du lemme précédent en considérant les chemins du dessin 12. □

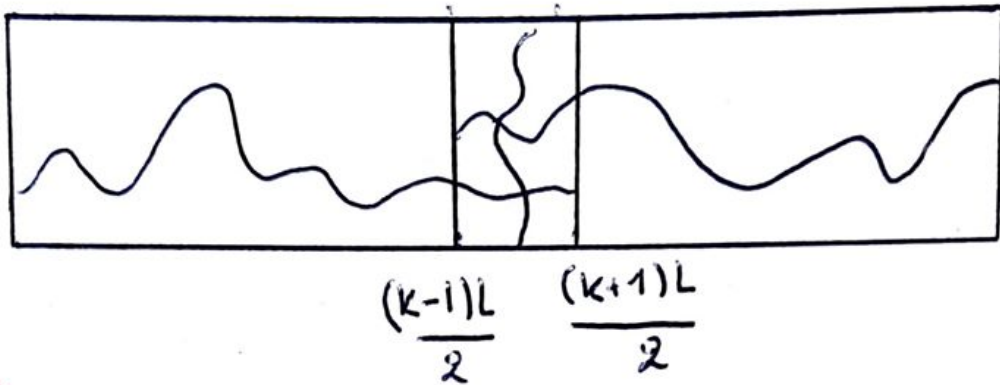


FIGURE 11 – La construction d'un chemin

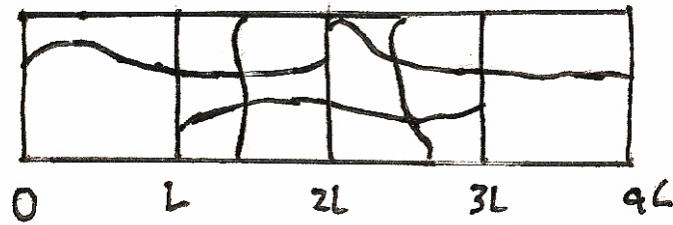


FIGURE 12 – La construction permettant d'estimer $\rho_{4L,L}$.

Lemme 5.

$$\rho_{4L,2L} \geq 1 - (1 - \rho_{4L,L})^2.$$

Démonstration. Si il y a une traversée horizontale de $[0, 4L] \times [0, L]$ ou une traversée horizontale de $[0, 4L] \times [L, 2L]$, alors il y a une traversée horizontale de $[0, 4L] \times [0, 2L]$. Comme les traversées de $[0, 4L] \times [0, L]$ et de $[0, 4L] \times [L, 2L]$ sont indépendantes car les ensembles d'arêtes concernées sont disjoints, l'inégalité est établie. \square

Rappelons et démontrons maintenant l'inégalité (B) :

Si $\rho_{2L,L} \geq 1 - \frac{1}{25e}$, alors

$$\rho_{2^k L, 2^{k-1} L} \geq 1 - \frac{1}{25} \exp(-2^{k-1}).$$

Démonstration. On commence par combiner les lemmes 3 et 4 pour avoir :

$$\rho_{4L,2L} \geq 1 - 25(1 - \rho_{2L,L})^2.$$

Soit x tel que $\rho_{2L,L} = 1 - \frac{x}{25}$. On suppose $x \leq 1$, alors d'après la formule précédente

$$\rho_{4L,2L} \geq 1 - \frac{x^2}{25}.$$

Une récurrence en appliquant cette formule pour $L' = 2L$ permet d'aboutir à la formule :

$$\rho_{2^k L, 2^{k-1} L} \geq 1 - \frac{1}{25} \exp(2^{k-1} \log(x)).$$

Pour $x \leq \frac{1}{e}$ ie $\rho_{2L,L} \geq 1 - \frac{1}{25e}$, on obtient bien (B). □

5.2 Retour à la percolation fractale

On considère le plan, où chaque carré de côté 1 et de sommets à coordonnées entières est une copie indépendante du carré étudié dans les chapitres précédents. On note A'_n les points conservés après n découpages et $A'_\infty = \bigcap A'_n$. On note de plus $\Omega_{K,J}^n$ l'événement "il existe une traversée horizontale de $([0, K] \times [0, J]) \cap A'_n$ ". Notre objectif est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 5. *Si $p \geq p_c$ alors p.s. A'_∞ a une unique composante connexe non bornée.*

Pour cela nous utilisons deux lemmes analogues aux lemmes (A) et (B).

Propriété 8. (a') Si $\mathbb{P}(\Omega_{L,L}^n) \geq 1 - \varepsilon$, alors $\mathbb{P}(\Omega_{kL,L}^n) \geq 1 - g_k(\varepsilon)$ où $g_k(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ indépendamment de L et de n .

(b') Si $\mathbb{P}(\Omega_{L,L}^n) \geq 1 - \frac{1}{25e}$ alors $\mathbb{P}(\Omega_{2^k L, 2^{k-1} L}^n) \geq 1 - \frac{1}{25} \exp(-2^{k-1})$.

Démonstration. Les lemmes se démontrent de manière analogue à A et B. En effet, les arguments de "square root trick" ainsi que les arguments géométriques sur les intersections de chemins, et que les arguments calculatoires se transposent. Les seuls arguments qui ne tiennent pas de façon claire en percolation fractale sont les arguments d'indépendance. Voyons les point par point.

- Le premier argument d'indépendance est dans la preuve du lemme 1. On utilise que E_s et F_s sont indépendants, car ils concernent des sites disjoints, pour affirmer que $\mathbb{P}(F_s | E_s) = \mathbb{P}(F_s)$. Comme $F'_s \subset F_s$, on a alors $\mathbb{P}(F_s | E_s) \geq \mathbb{P}(F'_s)$. En percolation fractale E_s et F_s ne sont pas indépendants car il se peut que des mêmes carrés agissent à la fois sur des points en-dessous et au dessus de s . Cependant on n'a besoin que de l'inégalité $\mathbb{P}(F_s | E_s) \geq \mathbb{P}(F_s)$ qui elle est vraie. En effet, soit s un chemin (ie une suite de carrés adjacents de côté $\frac{1}{N^n}$) traversant $[0, L]^2$ de gauche à droite. Les carrés se répartissent en trois groupes, visibles sur le dessin 13 :
 - Certains, de la forme $[\frac{i-1}{N^m}, \frac{i}{N^m}] \times [\frac{j-1}{N^m}, \frac{j}{N^m}]$ sont entièrement inclus dans $\mathcal{A}(s)$ et leur ε_{ij}^m est indépendant de E_s , on les appelle "non-conditionnés".
 - Certains sont strictement en dessous de s et leur ε_{ij}^m est indépendant de F_s
 - D'autres coupent s . Sur E_s , on a $s \subset A_n$ donc ces carrés là sont pleins, ce qui favorise F_s

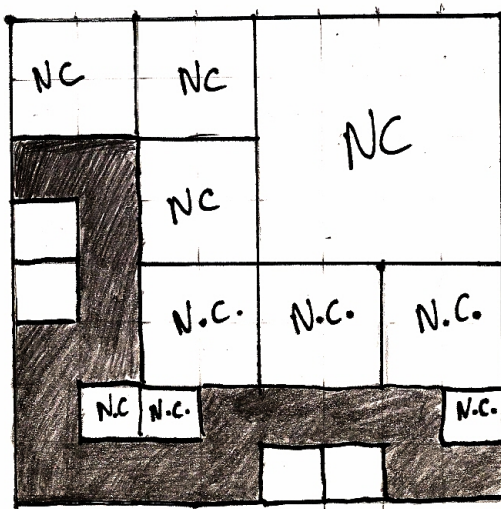


FIGURE 13 – En gris, le chemin s , en blanc les carrés dont le $\varepsilon_{ij} = 0$ nécessairement. Les carrés non conditionnés sont notés "NC".

Ainsi, supposons que s soit le plus bas chemin traversant $[0, L]^2$ de gauche à droite (ie on se place dans la distribution de probabilité conditionnelle par rapport à E_s), et soit s' un chemin vertical reliant $\left[\frac{L}{2}, \frac{3L}{2}\right] \times \{L\}$ et s_r dans $\mathcal{A}(s_r \cup s_{rr}) \setminus \mathcal{B}(s)$.

La probabilité que s' soit composé uniquement de carrés de $s \cup A_n$ est augmentée si l'on suppose E_s . Ainsi, on a bien l'inégalité voulue.

- Le deuxième argument d'indépendance est dans la preuve du lemme 4 : celui ci tient toujours en percolation fractale car il concerne des carrés élémentaires disjoints donc par hypothèse indépendants.

Cela permet d'adapter directement les démonstrations de (A) et (B) au cas fractal pour démontrer (a') et (b'). \square

Remarque 2. L'article [2] démontre des résultats analogues de (a') et (b') pour le cas symétrique où l'on percole avec très faible probabilité, qui sont utilisés par les auteurs pour établir les théorèmes 3 et 4 de ce mémoire :

(a) Si $\mathbb{P}(\Omega_{L,L}^n) \leq \varepsilon$, alors $\mathbb{P}(\Omega_{kL,L}^n) \leq h_k(\varepsilon)$ où $h_k(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ indépendamment de L et de n .

(b) Si $\mathbb{P}(\Omega_{L,L}^n) \leq \frac{1}{25\varepsilon}$, alors $\mathbb{P}(\Omega^n, 2^k L, 2^{k-1} L) \leq \frac{1}{25} \exp(-2^{k-1})$.

Cependant, les preuves présentées sont très synthétiques et l'argument de "décroissance des événements considérés" nous a paru erroné : par exemple avec les notations précédentes E_s n'est pas croissant. La démonstration présentée plus haut des théorèmes 3 et 4 utilise donc une autre méthode, issue d'un autre article [5].

Revenons donc au théorème 5 et démontrons le :

Démonstration. On se place à $p = p_c$. Par (a') il existe une borne η uniforme en n et en L , telle que si $\mathbb{P}(\Omega_{L,L}^n) > \eta$ alors $\mathbb{P}(\Omega_{2L,L}^n) > 0.99$, ce pour tout n . Or pour L assez grand, cette borne est dépassée : en effet, en faisant un changement d'échelle (dézoomage par un facteur N^m), la loi conditionnelle de A'_{n+m} sachant que pour tout $k \leq m$, $\varepsilon_{ij}^k = 1$ est égale à la loi après dézoomage :

$$A'_n/N^m \stackrel{\text{loi}}{=} (A'_{n+m} | \forall k \leq m, \varepsilon_{ij}^k = 1).$$

Ainsi $\mathbb{P}(\Omega_{N^m, N^m}^n) = \mathbb{P}(\Omega_1^{n+m} | \forall k \leq m, \varepsilon_{ij}^k = 1)$.

Soit $\varepsilon > 0$ et m tel que

$$\mathbb{P}(\Omega_1^m) - \mathbb{P}(\Omega_1) \leq \varepsilon \mathbb{P}(\Omega_1) \leq \varepsilon \mathbb{P}(\Omega_1^m).$$

Alors

$$\mathbb{P}(\Omega_1 | \forall k \leq m, \varepsilon_{ij}^k = 1) \geq \mathbb{P}(\Omega_1 | \Omega_1^m) = \frac{\mathbb{P}(\Omega_1)}{\mathbb{P}(\Omega_1^m)} \geq \frac{1}{1 + \varepsilon} \geq 1 - \varepsilon.$$

On a donc par croissance, pour tout $\varepsilon > 0$, pour m assez grand, pour tout n :

$$\mathbb{P}(\Omega_{N^m, N^m}^n) = \mathbb{P}(\Omega_1^{n+m} | \forall k \leq m, \varepsilon_{ij}^k = 1) \geq \mathbb{P}(\Omega_1 | \forall k \leq m, \varepsilon_{ij}^k = 1) \geq 1 - \varepsilon.$$

Ceci permet de justifier le choix de L tel que pour tout n , $\mathbb{P}(\Omega_{2L,L}^n) > 0.99$.

On adopte les notations suivantes :

$$B_{2^{j-1}} = [0, 2^j L] \times [0, 2^{j-1} L],$$

$$B_{2^j} = [0, 2^j L] \times [0, 2^{j+1} L],$$

$$\Lambda_{2^{j-1}}^n = \text{"Il y a une traversée de gauche à droite de } B_{2^{j-1}} \text{ dans } A'_n \text{"},$$

$$\Lambda_{2^j}^n = \text{"Il y a une traversée de haut en bas de } B_{2^j} \text{ dans } A'_n \text{"}.$$

Un dessin permet de voir que si tous les Λ_j^n arrivent, alors il y a un chemin infini dans A'_n . D'après (b'), on a

$$\mathbb{P}((\Lambda_{2^{j-1}}^n)^c) \leq \frac{1}{25} \exp(-2^{j-1}),$$

$$\mathbb{P}((\Lambda_{2^j}^n)^c) \leq \frac{1}{25} \exp(-2^j).$$

Par les mêmes arguments de compacité qu'au théorème 1, on peut passer à la limite en n :

$$\mathbb{P}((\Lambda_{2^{j-1}}^\infty)^c) \leq \frac{1}{25} \exp(-2^{j-1}),$$

$$\mathbb{P}((\Lambda_{2^j}^\infty)^c) \leq \frac{1}{25} \exp(-2^j).$$

Sommons :

$$\mathbb{P} \left(\left(\bigcap_{k \geq 1} \Lambda_k^\infty \right)^c \right) \leq \sum \frac{2}{25} (e^{-2})^{j-1} \leq \frac{2}{25(1 - e^{-2})} \leq \frac{1}{9}.$$

D'où finalement, avec probabilité supérieure à $\frac{8}{9}$, il existe une composante connexe non bornée. Par ailleurs, l'existence d'une composante non bornée ne dépend d'aucune partie finie des (ε_{ij}^n) (où les i, j sont pris de sorte à indexer tous les carrés de taille $\frac{1}{N^n}$ du plan), c'est un élément de la tribu queue. Par la loi du 0-1 de Kolmogorov, on a alors que p.s il existe une composante connexe non bornée.

On souhaite montrer que s'il existe une composante non bornée, presque sûrement elle est unique. Pour cela on considère les rectangles :

$$V_k = [2^k, 3 \cdot 2^k] \times [-3 \cdot 2^k, +3 \cdot 2^k]$$

et

$$H_k = [-3 \cdot 2^k, 3 \cdot 2^k] \times [2^k, 3 \cdot 2^k]$$

pour $k \in \mathbb{Z}$. Si Γ_k est l'événement correspondant à la traversée verticale de V_k et $-V_k$ ainsi qu'à celle horizontale de H_k et $-H_k$, Γ_k implique l'existence d'un anneau autour de 0 composés de point de module entre 2^k et $3 \cdot 2^k$. On souhaite montrer que pour p telle que $\mathbb{P}(\Omega_1) > 0$, $\mathbb{P}(\limsup \Gamma_k) = 1$. On sait que toute composante connexe non bornée de A'_∞ intersecte tous les anneaux à partir d'un certain rang. Si on a deux composantes connexes non bornées, elles intersectent donc nécessairement un même anneau, donc sont reliées, il y a contradiction.

On va démontrer que $\mathbb{P}(\Gamma_k) \rightarrow 1$, ce qui prouvera que $\mathbb{P}(\limsup \Gamma_k) = 1$. On a :

$$1 - \mathbb{P}(\Gamma_k) \leq 4(1 - \mathbb{P}(\Omega_{6 \cdot 2^k, 2 \cdot 2^k})).$$

Donc

$$\mathbb{P}(\Gamma_k) \geq 1 - 4(1 - \mathbb{P}(\Omega_{3L', L'}))$$

avec $L' = 2^{k+1}$, et le lemme 3 donne que quelquesoit la valeur de L' :

$$1 - \mathbb{P}(\Omega_{3L', L'}) \leq 3(1 - \mathbb{P}(\Omega_{2L', L'})).$$

D'où :

$$1 - \mathbb{P}(\Gamma_k) \leq 12(1 - \mathbb{P}(\Omega_{2^{k+2}, 2^{k+1}})).$$

Enfin :

$$\mathbb{P}(\Gamma_k) \geq 1 - 12(1 - \mathbb{P}(\Omega_{2^{k+2}, 2^{k+1}})).$$

On a vu au début de la démonstration qu'à partir d'un certain rang k_0 : $\mathbb{P}(\Omega_{2^{k+2}, 2^{k+1}}) \geq 0.99$ et dès lors :

$$\mathbb{P}(\Gamma_k) \geq 1 - \frac{12}{25} \exp(-2^{k-k_0-1}) \rightarrow 1$$

ce qui permet de conclure. □

Références

- [1] Benoit B. Mandelbrot. Intermittent turbulence in self-similar cascades : divergence of high moments and dimension of the carrier. *J. Fluid Mech.*, 62(2) :331—358, 1974.
- [2] J. T. Chayes, L. Chayes, and R. Durrett. Connectivity properties of Mandelbrot's percolation process. *Probab. Theory Related Fields*, 77(3) :307–324, 1988.
- [3] T. E. Harris. A lower bound for the critical probability in a certain percolation process. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 56 :13–20, 1960.
- [4] C. M. Fortuin, P. W. Kasteleyn, and J. Ginibre. Correlation inequalities on some partially ordered sets. *Comm. Math. Phys.*, 22 :89–103, 1971.
- [5] F. M. Dekking and R. W. J. Meester. On the structure of Mandelbrot's percolation process and other random Cantor sets. *J. Statist. Phys.*, 58(5-6) :1109–1126, 1990.