

# Modèle de Potts, représentations et dualité de Schur-Weyl

Alexandre Défossez

## Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Le modèle d'Ising</b>	<b>3</b>
1.1 Cas général . . . . .	3
1.2 Transition de phases . . . . .	3
1.3 Cas unidimensionnel . . . . .	3
1.4 Cas bidimensionnel . . . . .	4
<b>2 Représentation par boucles</b>	<b>5</b>
2.1 Modèle de Potts . . . . .	5
2.2 Composantes de spin . . . . .	5
2.3 Graphe dual . . . . .	5
2.4 Le graphe médian . . . . .	6
2.5 Le modèle des 6-vertex . . . . .	6
<b>3 Algèbre de Temperley-Lieb</b>	<b>8</b>
3.1 Matrice de transfert . . . . .	8
3.2 Les projecteurs de Jones-Wenzl . . . . .	10
3.3 Trace Markov . . . . .	10
<b>4 Représentation de <math>\mathfrak{sl}_2</math></b>	<b>13</b>
4.1 Algèbre de Lie . . . . .	13
4.2 Groupe de Lie . . . . .	13
4.3 Rappels sur les représentations . . . . .	14
4.4 Algèbre enveloppante . . . . .	15
4.5 Représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_2$ . . . . .	16
4.6 Opérateur de Casimir . . . . .	17
4.7 Semi-simplicité de $\mathfrak{sl}_2$ . . . . .	17
4.7.1 Cas où $W$ est de codimension 1 . . . . .	17
4.7.2 Cas général . . . . .	18
<b>5 Le groupe quantique <math>U_q(\mathfrak{sl}_2)</math></b>	<b>19</b>
5.1 Le groupe quantique $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ . . . . .	19
5.2 Représentations de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ . . . . .	19
5.3 Cas où $q$ est racine de l'unité . . . . .	20
<b>6 Dualité de Schur-Weyl</b>	<b>22</b>
6.1 Diagrammes de Young . . . . .	22
6.2 Symétriseurs de Young . . . . .	22
6.3 Représentations de $\Sigma_L$ . . . . .	23
6.4 Commutants . . . . .	25
6.5 Construction de Weyl . . . . .	26
6.6 Dualité de Schur-Weyl . . . . .	28
6.7 Lien avec le modèle de Potts . . . . .	29
<b>Conclusion</b>	<b>31</b>

## Introduction

J'ai travaillé sous la direction de Jesper Jacobsen (LPT, ENS Paris) et David Hernandez (Institut de mathématiques de Jussieu) sur le modèle des boucles sur réseaux et la théorie des représentations. La théorie des boucles sur réseaux permet l'étude des transitions de phases sur le modèle de Potts (légère généralisation du modèle d'Ising). Elle utilise pour l'étude de la fonction de partition canonique des représentations de l'algèbre de Temperley-Lieb. Par ailleurs, cette algèbre est associée avec le groupe quantique  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  par la dualité de Schur-Weyl quantique qui jouera un rôle important dans l'expression de la fonction de partition canonique.

Nous commencerons par une étude physique rapide du modèle d'Ising et des transitions de phases avant de présenter le modèle de Potts et le modèle des boucles sur réseaux. Nous introduirons ensuite l'algèbre de Temperley-Lieb qui permet une représentation algébrique de ces boucles et qui apporte des informations sur la fonction de partition canonique. Puis nous nous concentrerons sur la théorie des représentations en s'intéressant à l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}_2$  et au groupe quantique  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ . Finalement nous resterons dans le domaine de la théorie des représentations en donnant une démonstration de la dualité de Schur-Weyl classique et nous donnerons quelques pistes pour l'étude quantique et son utilité pour l'étude de la fonction de partition canonique.

Je tiens à remercier Pr. Jesper Jacobsen et Pr. David Hernandez pour leurs conseils, explications et la relecture du présent rapport. Je remercie également Pr. Jesper Jacobsen pour ses schémas sur l'algèbre de Temperley-Lieb que j'ai en partie repris dans mon rapport.

## 1 Le modèle d'Ising

Le modèle d'Ising est un modèle simple très utilisé pour comprendre les transitions de phases. Même s'il peut sembler un peu simpliste il n'en demeure pas moins extrêmement utile pour la compréhension de la thermodynamique et de la physique statistique, certains le qualifiant même de drosophile des transitions de phases.

### 1.1 Cas général

On s'intéresse au modèle d'Ising de spins en interactions sur un réseau (quelconque pour le moment). On modélise le système comme un ensemble de spin valant  $\pm 1$  et on regarde uniquement l'interaction des plus proches voisins. On pose un hamiltonien de la forme :

$$\mathcal{H} = -J. \sum_{(i,j)} S_i.S_j - B. \sum_i S_i \quad (1.1)$$

où chaque  $S_i$  est correspond au  $i^e$  spin. Le premier terme correspond à l'interaction entre les spins et le deuxième à l'interaction avec un champ extérieur. La somme  $(i, j)$  se fait sur les plus proches voisins dans le réseau.

### 1.2 Transition de phases

Dans notre cas, nous prendront  $B = 0$  et  $J > 0$ , c'est-à-dire que nous considérons un système sans champ extérieur et ferromagnétique i.e. le cas d'énergie minimale est obtenue quand tous les spins son alignés. A priori, le système a tout intérêt à se trouver dans cet état qui minimise son énergie. C'est le cas à température nulle mais pour une température non nulle le système va subir des inversions spins. En fait, la quantité minimisée en pratique par le système est l'énergie libre  $F = E - T.S$ . On a bien  $F = E$  pour la température nulle mais si  $T$  augmente, une autre façon de minimiser  $F$  devient d'augmenter l'entropie, c'est-à-dire le nombre de configurations possibles à énergie fixée.

Pour l'énergie minimale, tous les spins sont alignés, il n'y a donc que deux possibilités. Si des spins s'inversent, on augmente le nombre de possibilité. Ainsi pour la première énergie possible au dessus de l'énergie minimale (i.e. avec un spin dans le sens opposé à tous les autres), on a une entropie proportionnelle à  $\log N$  avec  $N$  le nombre de spin.

Quand la température augmente, l'aspect entropique va l'emporter et le système va chercher à maximiser  $S$ . Dans ce cas, le système va devenir complètement désordonné avec un spin moyen  $\langle S \rangle$  nul. Entre les deux, le système passe généralement par une transition de phase à la limite où l'entropie et l'énergie se compense dans l'expression de  $F$ . À ce moment là on note des effets notables comme l'invariance par changement d'échelle ou la divergence de la longueur de corrélation.

Dans le cas unidimensionnel on n'observe pas de transition de phase. Cela vient du fait que la formation d'une longue chaîne de spins n'a pas une énergie qui diverge. En effet, les bords de la chaîne se limite toujours à 2 spins donc on a une énergie de  $2.J$ . Dès que  $T > 0$  on ne peut donc pas avoir compensation entre l'entropie et l'énergie donc on n'observe pas de transition de phase.

Dans le cas bidimensionnel toutefois, la formation d'une chaîne de spin à une énergie proportionnelle à sa longueur  $L$  qui va donc diverger (dans la limite thermodynamique donc pour  $N$  grand). On a alors l'entropie qui est aussi proportionnelle à la longueur. En effet, on peut considérer que pour rajouter un élément à une telle chaîne on a à chaque fois 3 choix donc une entropie de l'ordre de  $\log 3^L \approx L$ . On va donc observer une compensation pour une température finie entre les deux et donc une transition de phase.

### 1.3 Cas unidimensionnel

Le cas unidimensionnel se traite facilement. En posant la matrice de transfert

$$\begin{pmatrix} e^{\beta.J} & e^{-\beta.J} \\ e^{-\beta.J} & e^{\beta.J} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

on obtient que la fonction de partition canonique vaut

$$Z = \text{Tr}(T^N). \quad (1.3)$$

En effet, en identifiant  $S_{N+1}$  à  $S_1$  (conditions aux limites périodiques), on a

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{S_1, \dots, S_N} e^{-\mathcal{H}(S_1, \dots, S_N)} \\ &= \sum_{S_1, \dots, S_N} \prod_{i=1}^N T_{S_i, S_{i+1}} \\ &= \sum_{S_1} (T^N)_{S_1, S_1} \end{aligned}$$

d'où l'expression voulue.

## 1.4 Cas bidimensionnel

L'approche précédente avec les matrices de transfert peut encore s'appliquer au cas bidimensionnel mais devient beaucoup plus lourde avec des matrices de côté  $2^l$  avec  $l$  la longueur d'un côté du réseau. C'est pourquoi nous allons ici adopter une nouvelle approche en représentant l'état du réseau d'une autre manière. Nous souhaitons représenter l'état du système non pas comme la donnée de tous ses spins mais comme la donnée des composantes connexes de même spins. À termes nous représenterons ces composantes par des boucles qui les entourent. Cette démarche reprend la présentation faite dans [7].

## 2 Représentation par boucles

### 2.1 Modèle de Potts

On généralise ici légèrement le modèle précédent en considérant que  $S_n$  varie de 1 à  $Q$ . On rappelle

$$\mathcal{H} = -K \cdot \sum_{(i,j) \in E} \delta_{(S_i, S_j)}$$

avec  $K = \beta \cdot J$  sans dimension et  $E$  l'ensemble des arrêtes du réseau. On a donc

$$Z = \sum_{\{S_i\}} \prod_{(i,j) \in E} e^{K \cdot \delta_{(S_i, S_j)}}.$$

On s'intéresse toujours au cas ferromagnétique  $K > 0$  où les spins ont tendance à s'aligner.

### 2.2 Composantes de spin

On adopte ici un nouveau point de vue. Plutôt que de décrire le système comme la donnée de l'orientation de chaque spin, on s'intéresse plutôt aux composantes de spins. En partant du réseau initial, on le modifie de telle sorte qu'une arrête n'est présente que si les spins de part et d'autre ont la même orientation. Ainsi, les composantes connexes deviennent les composantes de même orientation de spin. Ainsi, nous allons transformer la somme sur les valeurs des spins en une somme sur les sous ensembles de  $E$ . On notera que

$$e^{K \cdot \delta_{(S_i, S_j)}} = 1 + v \cdot \delta_{(S_i, S_j)}$$

avec  $v = e^K - 1$ . De plus, étant donné une fonction  $h$  définie sur  $E$ , on a

$$\prod_{e \in E} (1 + h(e)) = \sum_{E' \subset E} \prod_{e \in E'} h(e).$$

On obtient finalement

$$Z = \sum_{\{S_i\}} \sum_{E' \subset E} \prod_{(i,j) \in E'} v \cdot \delta_{(S_i, S_j)} = \sum_{E' \subset E} v^{|E'|} \cdot Q^{k(E')} \quad (2.1)$$

avec  $k(E')$  le nombre de composante connexes de  $E'$  c'est-à-dire le nombre de spin à choisir (car le spin est le même au sein d'une même composante). On a ainsi obtenu la représentation de Fortuin-Kasteleyn du modèle de Potts.

### 2.3 Graphe dual

Il est intéressant d'introduire la notion de graphe dual. Étant donné un graphe planaire  $G = (V, E)$  avec  $V$  les sommets et  $E$  les arrêtes, on peut définir son dual  $G^* = (V^*, E^*)$  en plaçant un sommet sur chaque face du graphe et en reliant deux sommets si et seulement si les deux faces correspondantes sont adjacentes sur  $G$ . On notera qu'il existe alors une bijection entre  $E$  et  $E^*$  car chaque arrête du graphe d'origine coupe une et une seule arrête du graphe dual. On a également la relation d'Euler

$$|V| + |V^*| = |E| + 2$$

ainsi que la relation  $(G^*)^* = G$ . Il est alors possible de définir une fonction de partition canonique sur le graphe dual définie par

$$Z_{G^*}(Q, v^*) = \sum_{E_2 \subset E^*} (v^*)^{|E_2|} \cdot Q^{k(E_2)}.$$

On a toujours

$$Z_G(Q, v) = \sum_{E_1 \subset E} (v)^{|E_1|} \cdot Q^{k(E_1)}.$$

Il est possible de choisir  $v^*$  tel que  $Z_G(Q, v) = \alpha Z_{G^*}(Q, v^*)$ . En effet il est possible de faire correspondre à chaque  $E_1$  un ensemble  $E_2$  tel qu'une arrête soit dans  $E_2$  si et seulement si l'arrête de  $E$  correspondante n'est pas dans  $E_1$ . Ainsi on a

$$|E_1| + |E_2| = |E|.$$

De plus on a la relation entre les graphes  $G_1 = (V, E_1)$  et  $G_2 = (V^*, E_2)$  donnée par

$$k(E_1) = |V| - |E_1| + c(E_1) = |V| - |E_1| + k(E_2) - 1 \quad (2.2)$$

avec  $k$  le nombre de composante connexes et  $c$  le nombre de cycles indépendants (c'est-à-dire le plus petit nombre d'arrêtes à retirer du graphe pour qu'il n'existe plus de cycle). Cette formule peut-être prouvée par induction. On en déduit

$$v^{|E_1|} Q^{k(E_1)} = \alpha(v^*)^{E_2} Q^{k(E_2)}$$

avec  $\alpha$  défini par

$$\alpha = Q^{1-|V^*|} v^{|E|}$$

et  $v^* = \frac{Q}{v}$ . On a donc le résultat voulu. En particulier, si  $G = G^*$  et qu'on suppose qu'il existe une unique transition de phase alors elle a nécessairement lieu lorsque  $v = v^*$  et donc on a  $v_c = \pm\sqrt{Q}$ .

## 2.4 Le graphe médian

Nous allons introduire un nouveau graphe appelé le graphe médian que nous noterons  $\mathcal{M}(G) = (\tilde{V}, \tilde{E})$  construit à partir de  $G$  et  $G^*$ . On a déjà dit que chaque arrête de  $G$  coupe une et une seule arrête de son graphe dual. C'est sur ces points d'intersection que se trouve les sommets du graphe médian. La réunion sur le plan du graphe  $G$  et  $G^*$  donne un quadrillage du plan formé par les intersections des arrêtes de  $G$  et de  $G^*$ . De chacun des sommets partent deux demi-arrêtes qui vont croiser les arrêtes de l'autre graphe. On a déjà dit qu'à ce croisement se trouver un sommet du graphe médian. On relie de plus deux arrêtes du graphes médians si elles sont dans la même "case" du quadrillage du plan. On notera que la définition est symétrique en  $G, G^*$  donc qu'un graphe à le même graphe médian que son dual. On peut voir que le résultat est assez simple dans le cas d'un réseau régulier comme montré sur la figure 1.

Nous allons maintenant associer à chaque ensemble  $E'$  qui apparait dans l'expression (2.1) un ensemble de boucles disjointes sur les arrêtes de  $\mathcal{M}(G)$ . L'idée est qu'une boucle ne doit jamais traverser une arrête présente dans  $E'$ . Plus explicitement, en prenant  $i \in \tilde{V}$  et en notant les arrêtes adjacentes de  $E, E^*$  et  $\tilde{E}$  dans l'ordre  $\tilde{e}_1 e \tilde{e}_2 e^* \tilde{e}_3 e \tilde{e}_4 e^*$ , on liera les arrêtes  $\tilde{e}_4$  à  $\tilde{e}_1$  et  $\tilde{e}_2$  à  $\tilde{e}_3$  si  $e \in E'$ . Dans le cas contraire, on liera les arrêtes  $\tilde{e}_1$  à  $\tilde{e}_2$  et  $\tilde{e}_3$  à  $\tilde{e}_4$ .

Ces boucles vont tourner autour des composantes de même spin. Cependant il n'y a pas une seule boucle car composante de même spin car celles-ci peuvent tourner aussi à l'intérieur d'une composante si celle-ci a des cycles. On a en fait

$$l(E') = k(E') + c(E')$$

avec  $l$  le nombre de boucles. Cette formule ainsi que (2.2) permet d'obtenir une nouvelle expression pour  $Z$  donnée par

$$Z = Q^{|V|/2} \sum_{E' \subset E} x^{|E'|} Q^{l(E')/2} \quad (2.3)$$

avec  $x = vQ^{-1/2}$ . Cette dernière représentation est appelée la représentation par boucles du modèle de Potts.

## 2.5 Le modèle des 6-vertex

Nous nous plaçons par la suite sur le graphe médian. Nous allons étudier brièvement un nouveau modèle pour le modèle de Potts. Le but est de répartir le poids  $n := \sqrt{Q}$  de chaque boucle sur ses sommets pour obtenir une définition locale. Pour cela, on commence par donner à chaque boucle une orientation arbitraire  $s = \pm 1$ . On écrit que le poids de la boucle non orientée est la somme de ces deux poids ( $w_1$  pour le sens horaire,  $w_2$  pour l'autre).

Il existe plusieurs façon de faire le partage du poids entre  $w_1$  et  $w_2$  mais nous allons nous intéresser à une en particulier. En écrivant  $n = 2 \cdot \cos(\gamma)$ , on peut prendre  $w_1 = e^{i\gamma}$  et  $w_2 = e^{-i\gamma}$ . On se place dans le cas où  $\omega$  est réel.

Dans le cas d'un réseau carré, il est possible de distribuer le poids en donnant à chaque sommet un poids  $e^{\pm i\omega/4}$  à chaque virage d'un angle  $\pm\pi/2$ .

Nous allons maintenant regarder les différentes possibilités à un sommet en oubliant que les boucles sont disjointes et en gardant uniquement les informations d'orientations des arrêtes comme indiqué sur la figure 2. Comme les boucles n'ont pas le droit de se croiser certains cas sont non

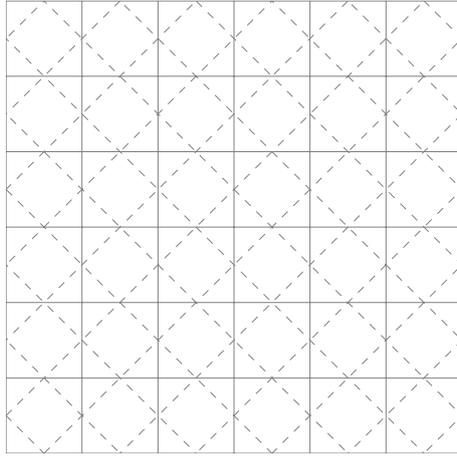


FIGURE 1: Un réseau carré et son graphe médian en pointillé.

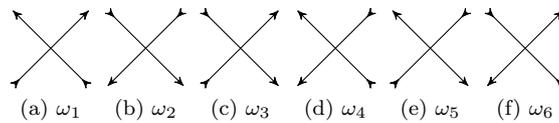


FIGURE 2: Les 6 possibilités de schéma pour un sommet

ambigus. Nous allons en plus prendre en compte la participation en  $x^{|E'|}$  dans l'expression (2.3). Pour cela il faut voir si le sommet considéré est sur une arête horizontale de  $G$  ou une arête verticale. Dans le premier cas on notera les poids  $\omega_1, \dots, \omega_6$  et dans le deuxième  $\omega'_1, \dots, \omega'_6$ . Ainsi pour le cas  $\omega_1$  on a une seule possibilité pour les boucles et on sait de plus que l'arête n'est pas dans  $E'$  par conséquent on prend  $\omega_1 = 1$  (on a une boucle dans le sens horaire et l'autre dans le sens anti-horaire). Pour  $\omega_3$  on a encore deux boucles dans des sens différents mais cette fois on a une arête dans  $E'$  donc  $\omega_3 = x_1$  etc. Pour le cas 5 par exemple, on a deux possibilités de boucles et on écrit le poids sous la forme de la somme du poids de chacun des cas. Finalement on trouve

$$\omega_1, \dots, \omega_6 = 1, 1, x, x, e^{i\gamma/2} + x.e^{-i\gamma/2}, x.e^{i\gamma/2} + e^{-i\gamma/2}.$$

On peut faire de même pour le cas d'une arête verticale. Finalement on obtient encore une nouvelle expression pour  $Z$  qui est donnée par

$$Z = Q^{|V|/2} \cdot \sum_A \prod_{p=1}^6 (w_p)^{N_p} (w'_p)^{N'_p} \quad (2.4)$$

avec  $A$  l'ensemble des configurations possibles des flèches,  $N_p$  le nombre de sommets dans l'état  $p$  et sur une arête horizontale et  $N'_p$  le nombre de sommets dans l'état  $p$  sur une arête verticale. Nous ne détaillerons pas plus ce modèle nommé le modèle à 6-vertex. Je n'ai pas eu occasion de l'utiliser mais il est plus commode lorsque l'on travaille avec le groupe quantique  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  que nous introduiront plus tard de travailler avec celui-ci.

### 3 Algèbre de Temperley-Lieb

Nous avons vu l'importance pour le calcul de  $Z$  de décrire les boucles sur le réseau et de les compter. Pour cela nous allons utiliser l'algèbre de Temperley-Lieb  $TL_N(n)$  sur  $\mathbb{C}$ . On la définit à partir de  $N-1$  générateurs  $E_1, \dots, E_{N-1}$  auxquels s'ajoute l'identité. Les générateurs vérifient par ailleurs les trois relations suivantes :

$$E_i^2 = n \cdot E_i, \tag{3.1}$$

$$E_{i\pm 1} \cdot E_i \cdot E_{i\pm 1} = E_i, \tag{3.2}$$

$$E_i \cdot E_j = E_j \cdot E_i \quad \text{si } |i - j| > 1. \tag{3.3}$$

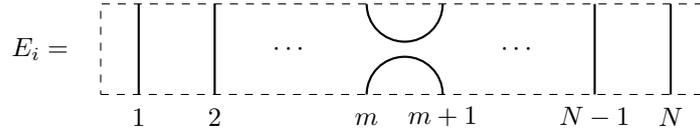
Nous nommerons les éléments obtenus à partir des générateurs sans combinaison linéaire les mots de l'algèbre de Temperley-Lieb. Le paramètre  $n$  est le même que celui précédemment introduit, c'est-à-dire le poids des boucles. On peut écrire  $n$  sous la forme  $n = [2]_q = [2] = q + q^{-1}$  avec

$$[d]_q = [d] = \frac{q^d - q^{-d}}{q - q^{-1}}. \tag{3.4}$$

On prendra de plus  $q = e^{i\gamma}$ .

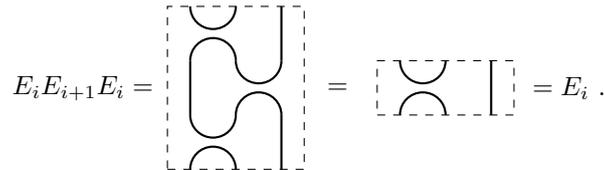
Nous allons de plus supposé que  $q$  n'est pas une racine de l'unité pour s'assurer que les représentations que nous utiliseront par la suite sont fidèles.

Nous allons représenter les éléments de cette algèbre sous la forme de diagrammes. Pour cela nous nous intéressons à deux rangées de  $N$  points. À l'identité nous associons le diagramme où chaque points de la rangée inférieure est reliée par une ligne droite au point directement au dessus. Les générateurs  $E_i$  sont associés chacun à un diagramme où chaque point de la rangée inférieure est relié directement au point supérieur sauf le  $i^{\text{e}}$  et le  $i+1^{\text{e}}$ . Ceux de la rangée inférieure sont reliés par un arc de cercle et ceux de la rangée supérieure sont de même reliés par un autre arc de cercle :



La définition est étendue en utilisant les relations définissant l'algèbre  $TL_N(n)$  puis par linéarité.

La multiplication est définie en superposant les deux diagrammes. Les boucles sont éliminées est remplacée par un facteur  $n$  tandis que les autres fils sont "tirés". Par exemple la multiplication de  $E_i \cdot E_{i+1} \cdot E_i$  est donnée par



On peut de plus vérifier que cette multiplication est bien compatible avec chacune des relations données ci-avant.

#### 3.1 Matrice de transfert

Nous allons maintenant étudier comment relier la fonction de partition canonique  $Z$  à l'algèbre de Temperley-Lieb. On considère un espace de largeur  $L$  et de hauteur  $M$  avec des conditions libres sur les côtés mais une périodicité entre le bas et le haut qui sont identifiés. Nous allons généralisés légèrement par rapport à ce que nous avons pu faire en utilisant deux poids différents pour les liens horizontaux (poids  $x_1$ ) et verticaux (poids  $x_2$ ).

On peut considérer que l'on construit étage par étage le système de boucles présenté pour le modèle de Potts. La matrice permettant de rajouter un étage sera notée  $T$ . On considère les sommets du graphes médians qui sont sur les arrêtes horizontales du nouvel étage et sur les arrêtes verticales de liant l'étage actuel au nouvel étage. On se place dans l'algèbre  $TL_N(n)$  avec  $N = 2L$ . La matrice  $T$  comportera deux facteurs, l'un pour prendre en compte les liens verticaux et l'autre pour les liens horizontaux. Les liens verticaux font intervenir les générateurs d'indices impairs. Si

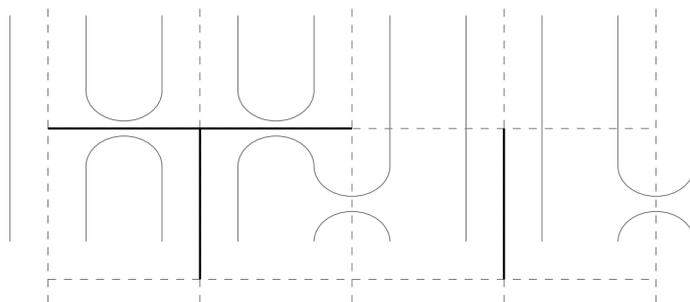


FIGURE 3: Exemple de construction d'un nouvel étage. En foncé les arrêtes présentes dans  $E'$  et en clair les diagrammes de  $TL_N(n)$ .

un lien vertical est présent on veut que la courbe soit parallèle à ce lien et on va donc utiliser l'identité avec un poids  $x_2$ . Si un lien n'est pas présent, on veut que la courbe traverse l'arrête et on va donc utiliser un générateur  $E_{2i-1}$  avec un poids 1. Dans le cas des liens horizontaux la situation est naturellement inversée, avec un poids  $x_1$  pour les générateurs  $E_{2i}$  et 1 pour l'identité.

Un exemple de passage d'un étage à l'autre est donnée sur la figure 3. Chaque passage est donné comme la superposition de deux diagrammes, un pour les liens verticaux et l'autre pour les liens horizontaux. On effectue ensuite le produit que nous avons décrit précédemment. Finalement, il suffit d'énumérer toutes les possibilités et on obtient

$$T = Q^{L/2} \left( \prod_{i=1}^{L-1} (I + x_1 E_{2i}) \right) \cdot \left( \prod_{i=1}^L (x_2 I + E_{2i-1}) \right). \quad (3.5)$$

Pour obtenir  $M$  étages il suffit d'utiliser  $T^M$  comme matrice de transfert.

Pour avoir les conditions périodiques on identifie ensuite le haut et le bas. Il apparait alors deux types de boucles, les boucles contractables qui sont sur un nombre pairs de brins et les boucles non contractables qui sont sur un nombre impair de brins. On donnera un poids  $n$  aux boucles contractables et un poids  $l = [2]_t$  aux boucles non contractables. Alors pour un diagramme  $w$  on définit sa trace comme étant

$$\text{Tr}_{n,l} w = n^{N_1} l^{N_2}$$

avec  $N_1$  (resp  $N_2$ ) le nombre de boucles contractables (resp non contractables) après avoir fait les "collages" que nous avons décrits. Finalement on peut étendre cette définition par linéarité. On appellera cette trace la trace de Markov et on a

$$Z = \text{Tr}_{n,l}(T^M). \quad (3.6)$$

Nous allons présenter rapidement la notion de diagramme réduit. On appellera *fil* un lien qui va de la partie inférieure d'un diagramme à la partie supérieure. Un diagramme réduit est simplement de la moitié supérieure d'un diagramme. On appellera encore les fils ayant été réduit des fils. Il est possible d'obtenir de nouveau un diagramme en collant un demi-diagramme et un demi-diagramme inversé (c'est-à-dire ayant subi une symétrie horizontale) à condition qu'ils aient le même nombre de fils. Ainsi si on note  $d_{2j}$  le nombre de diagramme réduit à  $2j$  fils, on a immédiatement le nombre de diagramme à  $2j$  fils qui est donné par  $d_{2j}^2$ .

On notera que le nombre de fils ne peut que diminuer après superposition avec un diagramme. Par conséquent, en écrivant  $T$  dans la base des diagrammes et en les ordonnant par nombre de fils décroissant on obtient une forme triangulaire inférieure. Les blocs diagonaux correspondent à un nombre fixé de fils. Le bloc associé à  $2j$  fils est noté  $\tilde{T}_{2j}$ . De plus comme  $T$  n'agit que sur la partie supérieure d'un diagramme on peut se limiter aux diagrammes réduits et écrire que l'action de  $\tilde{T}_{2j}$  se décompose comme la copie de  $d_{2j}$  blocs identiques  $T_{2j}$  qui correspondent à l'action de  $T$  uniquement sur les diagrammes réduits.

Nous allons essayer de retrouver l'expression de  $Z$  comme une sorte de trace. On peut définir

$$K_{2j} = \text{Tr}(T_{2j}^M) = \sum_{i=1}^{d_{2j}} (\lambda_i)^M$$

avec  $\lambda_i$  les valeurs propres de  $T_{2j}$ . Il est possible d'exprimer  $Z$  comme combinaison linéaire de ces traces :

$$Z = \sum_{j=0}^L D_{2j} K_{2j} \tag{3.7}$$

avec  $D_{2j}$  des coefficients à déterminer. Nous allons démontrer cette expression par la suite en utilisant la méthode décrite dans [6].

### 3.2 Les projecteurs de Jones-Wenzl

Nous avons déjà introduit les blocs  $T_k$  qui agissent sur les diagrammes réduits à exactement  $k$  fils. Nous allons donc nous intéresser à la représentation à exactement  $k$  fils que nous noterons  $\nu_k$ . Dans ce cas, l'action d'un générateur  $E_i$  est d'annihiler un diagramme ayant deux fils en position  $i$  et  $i + 1$  et d'agir comme nous l'avons précédemment décrit sinon. Nous nous placerons dans le cas où  $q$  n'est pas une racine de l'unité et dans ce cas la représentation est fidèle.

Or il existe un élément de l'algèbre de Temperley-Lieb qui remplit une fonction proche, c'est-à-dire qu'il protège les  $k$  premiers fils et toute multiplication avec un autre mot qui supprimerait un fils donne 0. Nous les appellerons les projecteurs de Jones-Wenzl (JW). Ils sont définis par récurrence pour  $k \geq 1$  :

$$P_{k+1} = P_k - \frac{[k]}{[k+1]} P_k E_k P_k. \tag{3.8}$$

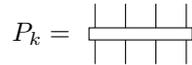
Ils ont des propriétés intéressantes. Tout d'abord ils absorbent tout projecteur plus petit :

$$\forall k \geq 1, \forall m \leq k, P_m P_k = P_k P_m = P_k \tag{3.9}$$

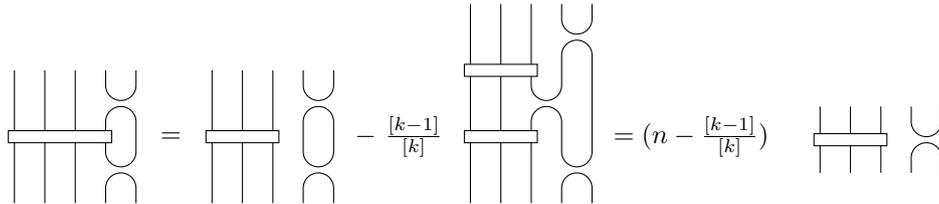
et ensuite ils protègent les premiers fils :

$$\forall 1 \leq m \leq k - 1, E_m P_k = P_k E_m = 0. \tag{3.10}$$

Ces deux propriétés sont montrées par récurrence sur  $k$ . Nous représenterons ces projecteurs sous la forme :

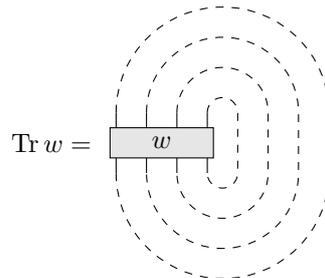


Il existe de plus une relation intéressante qui permet de se débarrasser d'une boucle "coincée" dans le projecteur :



### 3.3 Trace Markov

Nous reprenons maintenant la trace de Markov  $\text{Tr}_{n,l}$  que nous avons déjà introduite. Nous la représentons schématiquement :



Il est possible de déterminer la trace de Markov des projecteurs JW à l'aide de la relation de récurrence et on obtient finalement que  $\text{Tr}_{n,l} P_k = [k + 1]_t$ .

Nous allons maintenant doter  $\nu_k$  d'un produit scalaire. Pour cela étant donné deux états réduits  $v_1$  et  $v_2$  on définit  $\langle v_1 | v_2 \rangle$  en retournant  $v_1$  et en le collant au dessus de  $v_2$ . Si jamais tous les fils de  $v_1$  peuvent se coller à ceux de  $v_2$  alors le produit scalaire est  $n^{N_1}$  avec  $N_1$  le nombre de boucles. Dans le cas contraire, le produit scalaire vaut 0.

On peut alors trouver une base orthonormée de  $\nu_k$  que nous noterons  $\mathcal{B}_k$ . De plus nous étendons la définition du produit scalaire de telle sorte que les différents  $\nu_k$  soient en somme orthogonale.

Nous allons maintenant construire un projecteur sur  $\nu_k$ . Celui-ci est défini par

$$P_{N,k} = \sum_{b \in \mathcal{B}_j} |b\rangle \circ P_j \circ \langle b|. \tag{3.11}$$

Plus précisément, on commence par coller le diagramme réduit et renversé  $b$  au dessus d'un mot  $w$  de l'algèbre de Temperley-Lieb. Puis on multiplie par  $P_j$  et finalement on colle  $b$ . Par exemple pour

$$b = \boxed{\text{---} \cup \text{---} \text{---}} \boxed{\text{---}}$$

et

$$w = \boxed{\text{---} \text{---} \cup \text{---} \text{---}}$$

on aurait

$$|b\rangle \circ P_j \circ \langle b| \circ w = \boxed{\text{---} \text{---} \cup \text{---} \text{---} \text{---} \cup \text{---} \text{---}}$$

On voit que la protection obtenue est plus malléable que celle des projecteurs de JW qui ne protègent que les  $k$  premiers fils. Ici on a réussi à protéger les fils du mot

$$\boxed{\text{---} \text{---} \cup \text{---} \text{---} \text{---} \cup \text{---} \text{---}}$$

On a également une relation de fermeture :

$$\sum_{j=0}^L P_{N,2j} = \text{Id.}$$

On peut donc écrire

$$w = \sum_j P_{N,j} w = \sum_j \boxed{\begin{array}{c} P_{N,j} \\ \text{---} \\ w \end{array}}$$

On s'intéresse maintenant à chacun des termes et on a

$$\text{Tr}_{n,l} \boxed{\begin{array}{c} P_{N,j} \\ \text{---} \\ w \end{array}} = \sum_{b \in \mathcal{B}_j} \boxed{\begin{array}{c} b \\ \text{---} \\ b \\ \text{---} \\ w \end{array}} = \sum_{b \in \mathcal{B}_j} \boxed{\begin{array}{c} b \\ \text{---} \\ w \\ \text{---} \\ b \end{array}}$$

On obtient finalement

$$\mathrm{Tr}_{n,l}(w) = \sum_k Tr_{n,l} P_k \sum_{b \in \mathcal{B}_k} \langle b|w|b \rangle = \sum [k+1]_t \mathrm{Tr}_{\nu_k} w$$

avec  $\mathrm{Tr}_{\nu_k} w$  la trace classique définie par le produit scalaire. En appliquant cette formule à  $T^M$ , on retrouve dans l'expression de  $Z$  donnée par (3.7)  $K_k$  qui est la trace classique des blocs diagonaux  $T_k$  donnée par le terme en  $\mathrm{Tr}_{\nu_k}$  et on identifie immédiatement les coefficients  $D_k = [k+1]_t$ .

Il existe cependant un autre moyen d'obtenir ces coefficients  $D_k$  auquel nous allons nous intéresser maintenant et qui fait intervenir la théorie des représentations et la dualité de Schur-Weyl.

## 4 Étude des représentations finies de $\mathfrak{sl}_2$

Nous allons étudier ici l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}_2$  qui permettra de mieux appréhender l'étude qui sera faite de son homologue quantique  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ . Nous commencerons par définir la notion d'algèbre de Lie avant de nous intéresser aux représentations de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}_2$ . Une description plus exacte de la notion de groupe de Lie est donnée dans [4]. Ici nous utiliserons une définition plus simple telle qu'elle peut être trouvée dans [12].

### 4.1 Algèbre de Lie

La notion d'algèbre de Lie est donnée par la définition 4.1.

#### Définition 4.1

Une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est un espace vectoriel doté d'une application bilinéaire antisymétrique  $[\cdot, \cdot]$  (appelé crochet de Lie) qui vérifie en plus l'identité de Jacobi :

$$\forall x, y, z \in \mathfrak{g}, [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0. \quad (4.1)$$

Une sous algèbre de Lie est un sous espace vectoriel stable par  $[\cdot, \cdot]$ .

En particulier il est possible de doter  $\mathcal{M}_n(k)$  (et de manière générale toute algèbre) d'une structure d'algèbre de Lie en prenant

$$\forall x, y \in \mathcal{M}_n(k), [x, y] = x \cdot y - y \cdot x \quad (4.2)$$

qui vérifie immédiatement l'identité de Jacobi. On note cette algèbre de Lie  $\mathfrak{gl}_n$ . On peut noter que le noyau de la trace est immédiatement stable par le crochet de Lie et forme donc une sous algèbre de Lie. On la note  $\mathfrak{sl}_n$ . En particulier pour  $n = 2$ , on obtient l'algèbre de Lie cherchée.

### 4.2 Groupe de Lie

En réalité la notion d'algèbre de Lie est liée à celle de groupe de Lie. Une définition simplifiée d'un groupe de Lie est de dire qu'il s'agit d'un sous groupe fermé de  $GL_n(k)$ . Cependant il existe des groupes de Lie qui ne rentrent pas dans cette catégorie.

Il est possible de faire le lien entre un groupe de Lie et une algèbre de Lie. En effet, étant donné un groupe de Lie  $G$  et un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$  non vide :

$$\mathfrak{g} = \{X = \gamma'(0) \mid \gamma : I \rightarrow G \in \mathcal{C}^1, \gamma(0) = e\}$$

c'est-à-dire intuitivement l'ensemble des vecteurs tangent à  $G$  dans  $M_n(k)$ . On peut montrer que  $\mathfrak{g}$  est une sous algèbre de Lie de  $\mathfrak{gl}$ . En particulier l'algèbre  $\mathfrak{sl}_n$  est associée au groupe  $G = SL_n$  ce qui justifie la notation.

Ce résultat est facile à montrer. On notera  $S$  l'ensemble des matrices de traces nulles. Soit  $M \in S$ . Alors on pose  $f_M : t \rightarrow \exp(t.M)$  définie sur  $I = [0, 1]$ . On a

$$\det(f_M(t)) = \det \exp(t.M) = \exp t \cdot \text{Tr}(M) = 1$$

donc  $\forall t \in I, f_M(t) \in SL_n$ . De plus  $f_M(0) = I_n$  et  $f'_M(0) = M$  donc on a bien  $M \in \mathfrak{sl}_n$ .

Réciproquement, soit  $M \in \mathfrak{sl}_n$ . Alors on a  $f$  telle que donnée dans la définition de  $\mathfrak{sl}_n$  avec  $\det \circ f = 1$  donc en différenciant et en l'appliquant en 0 on obtient

$$d(\det)(f(0)) \circ f'(0) = 0$$

$$\text{Tr } M = 0$$

donc  $M \in S$  et  $S = \mathfrak{sl}_n$ .

Nous ne développerons pas plus ces notions mais en faisant appel à des outils de géométrie différentielle il est possible de donner une définition plus générale des groupes de Lie.

### 4.3 Rappels sur les représentations

On rappelle ici quelques définitions et résultats sur les représentations.

#### Définition 4.2 (Représentation d'un groupe)

Soit  $G$  un groupe, on appelle  $(\rho, V)$  une représentation de  $g$  avec  $V$  un espace vectoriel et  $\rho$  un morphisme de groupe de  $g$  dans  $\text{GL}(V)$ . On pourra la noter simplement  $V$  ou  $\rho$  s'il n'y pas d'ambiguïté. On identifie parfois directement  $G$  et  $\text{GL}(V)$  ainsi que  $\mathbb{C}.G$  avec  $M(V)$ . Une sous représentation est un sous espace vectoriel de  $V$  stable sous l'action  $g$ . C'est donc aussi une représentation (induite).

Un morphisme de représentation  $f$  de  $(\rho, V)$  dans  $(\pi, W)$  est un morphisme de  $V$  dans  $W$  vérifiant

$$\forall g \in G, \pi(g) \circ f = f \circ \rho(g).$$

#### Définition 4.3 (Représentation irréductible)

Soit  $G$  un groupe et  $V$  une représentation. On dit que  $V$  est irréductible si  $V$  n'admet pas de sous représentation non triviale. On dit aussi que  $V$  est simple.

#### Définition 4.4 (Représentation semi-simple)

Soit  $G$  un groupe et  $V$  une représentation. On dit que  $V$  est semi-simple si  $V$  peut s'écrire comme somme directe de sous représentations irréductibles.

Il est utile de noter que si  $V$  et  $W$  sont deux représentations irréductibles de dimension finie, elles sont soit isomorphes (au sens de morphisme de représentation), soit tout morphisme de représentation de  $V$  dans  $W$  est nul. Il suffit de noter que le noyau et l'image sont des sous représentations donc sont triviales. De plus, si le corps est algébriquement clôt (ce qui est le cas ici), l'espace propre associé à une racine  $\lambda$  du polynôme caractéristique est trivial non réduit à 0 donc tout morphisme de  $V$  dans  $W$  est une homothétie. Ce résultat est appelé le lemme de Schur. Il mène au résultat suivant très important dans le cas des groupes finis.

#### Proposition 4.1

Toute représentation de dimension finie d'un groupe fini est semi-simple.

Il est possible de faire correspondre à chaque représentation un caractère.

#### Définition 4.5 (Caractère)

Soit  $G$  un groupe,  $V$  une représentation. On définit le caractère  $\chi_V$  comme l'application de  $G$  dans  $k$ , étendue à  $\mathbb{C}.G$  par linéarité, définie par

$$\forall g \in G, \chi_V(g) = \text{Tr}(g).$$

On notera que c'est une fonction centrale i.e. elle est constante sur une classe de conjugaison.

Dans le cas où la caractéristique est nulle, on sait que les caractères des représentations irréductibles forment une base de l'ensemble des fonctions centrales de  $G$  dans  $k$ . Par conséquent, on sait en particulier qu'il y a autant de représentation irréductible que de classe de conjugaison (ce qui sera utile lors de l'étude des représentations du groupe symétrique). Deux représentations sont isomorphes si et seulement si elles ont même caractère. De plus, on peut facilement obtenir la décomposition d'une représentation en représentations irréductibles à partir du caractère de la représentation.

Enfin on rappelle un résultat sur la représentation standard :

#### Proposition 4.2 (Représentation standard)

Soit  $G$  un groupe fini. On prend  $V = \mathbb{C}.G$  qu'on appelle la représentation standard dont l'action de  $G$  est définie par

$$\forall g \in G, \forall h \in G, g \cdot h = gh$$

où le deuxième terme fait intervenir le produit interne. On étend cette action par linéarité à tout  $V$ .

Alors si on note  $V_i$  (resp.  $n_i$ ) les représentations irréductibles de  $G$  (resp. leur dimension), on

a

$$V = \bigoplus_i V_i^{\oplus n_i}.$$

Dans le cas d'un groupe de Lie, on rajoute comme condition que le morphisme de groupe  $\rho$  doit être un morphisme de groupe de Lie (c'est-à-dire continue). On définit une représentation d'algèbre de Lie comme la différentielle d'une représentation de groupe de Lie du groupe correspondant. Il est équivalent de dire qu'une représentation d'algèbre de Lie est un morphisme d'algèbre de Lie. On a par ailleurs équivalence entre la plupart des propriétés (en particulier l'irréductibilité) pour la représentation du groupe de Lie et de l'algèbre de Lie correspondante.

Les principaux résultats sur les représentations des groupes finis (en particulier la semi-simplicité des représentations) peut se généraliser au cas des groupes compacts (par exemple  $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ ). Ce n'est cependant pas le cas du groupe  $\mathrm{SL}_n$  et nous devons donc démontrer dans ce cas particulier le résultat de semi-simplicité des représentations finies.

#### 4.4 Algèbre enveloppante

Nous allons tout d'abord introduire l'algèbre enveloppante  $U(\mathfrak{sl}_2)$ . Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie. On note  $T$  son algèbre tensorielle et  $I$  l'idéal bilatère engendré par tous les éléments de la forme

$$x \cdot y - y \cdot x - [x, y]$$

alors on définit l'algèbre enveloppante de  $\mathfrak{g}$  notée  $U = U(\mathfrak{g})$  par

$$U = T/I.$$

Cela revient à remplacer  $[\cdot, \cdot]$  par le commutateur après avoir introduit un produit pour obtenir une algèbre (ce qui est possible avec l'algèbre tensorielle). Il existe un morphisme d'algèbre de Lie  $\iota$  de  $\mathfrak{g}$  dans  $U$  défini comme l'image de l'inclusion dans l'algèbre tensorielle par la projection canonique sur  $T/I$ . C'est immédiatement un morphisme d'algèbre de Lie,  $I$  ayant été choisi dans ce but.

L'intérêt de  $U$  est qu'elle vérifie une propriété universelle permettant de relever un morphisme d'algèbre de Lie en un morphisme d'algèbre comme décrit par la proposition (4.3).

##### Proposition 4.3 (Propriété universelle de $U$ )

Soit  $A$  une algèbre associative, on note  $L(A)$  l'algèbre de Lie définie en prenant le commutateur pour  $[\cdot, \cdot]$ . Soit  $f$  un morphisme d'algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  dans  $L(A)$ . Alors il existe un unique morphisme d'algèbre  $\phi$  de  $U$  dans  $A$  tel que

$$f = \phi \circ \iota.$$

**Démonstration :** En utilisant la propriété universelle de l'algèbre tensorielle, on peut relever  $f$  en un unique morphisme d'algèbre  $f'$  de  $T$  dans  $A$ . Pour montrer que  $f'$  définit bien un morphisme d'algèbre de  $U$  dans  $A$  il suffit de montrer que  $f'(I) = 0$ , ce que l'on peut faire pour chacun de ses générateurs. Soit donc  $x, y \in \mathfrak{g}$ ,

$$f'(x \cdot y - y \cdot x - [x, y]) = f(x) \cdot f(y) - f(y) \cdot f(x) - [f(x), f(y)] = 0 \quad (4.3)$$

car  $f$  est un morphisme d'algèbre de Lie et car  $[\cdot, \cdot]$  est le commutateur pour  $A$ . Ainsi l'application  $\phi = \bar{f}$  donnée par

$$\forall \bar{x} \in U, \bar{f}(\bar{x}) = f'(x)$$

est bien définie et est un morphisme d'algèbre de  $U$  dans  $A$ .

L'unicité est donnée par le fait que  $\mathfrak{g}$  génère  $T$  donc  $U$  et que la relation  $f = \phi \circ \iota$  donne à  $\phi$  une unique valeur sur  $\mathfrak{g}$ . ■

Ce résultat permet en particulier d'étudier indifféremment les représentations d'algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  ou d'algèbre de son algèbre enveloppante  $U(\mathfrak{g})$ .

### 4.5 Représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_2$

Nous allons considérer la base de  $\mathfrak{sl}_2$  donnée par

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a les relations suivantes

$$[H, X] = 2.X \quad [H, Y] = -2.Y \quad [X, Y] = H. \quad (4.4)$$

Prenons maintenant  $V$  une représentation de  $\mathfrak{sl}_2$  de dimension finie.  $H$  admet au moins une valeur propre  $\lambda$  associée au vecteur  $v$ . On a alors  $H \cdot X \cdot v = X \cdot H \cdot v + [H, X] \cdot v = \lambda.X \cdot v + 2.X \cdot v$  d'où  $X \cdot v$  est vecteur propre pour la valeur propre  $\lambda + 2$  (s'il est non nul). De même,  $Y \cdot v$  est vecteur propre pour la valeur propre  $\lambda - 2$ .

Il existe donc  $v_0$  valeur propre pour  $\lambda_0$  de  $H$  tel que  $X \cdot v_0 = 0$  car  $H$  n'admet qu'un nombre fini de valeurs propres. On note  $v_k = Y^k \cdot v$  (attention, c'est bien  $\rho(Y)^k$  et non pas  $Y^k$  dans  $M_2(\mathbb{C})$ ). Là encore, on sait qu'il existe un petit  $n$  tel que  $v_{n+1} = 0$ . On a

$$\forall k \in [0, n], H \cdot v_k = (\lambda_0 - 2.k).v_k. \quad (4.5)$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} X \cdot v_k &= X \cdot Y^k \cdot v_0 \\ &= Y^k \cdot X \cdot v_0 + [X, Y^k] \cdot v_0 \\ &= 0 + [X, Y] \cdot Y^{k-1} \cdot v_0 + [X, Y^{k-1}] \cdot Y v_0 \\ &= H \cdot v_{k-1} + [X, Y^{k-1}] \cdot v_1 \\ &= (\lambda_0 - 2.k + 2).v_{k-1} + (\lambda_0 - 2.k + 4).v_{k-1} + [X, Y^{k-2}] \cdot v_2 \\ &\dots \\ &= (k.\lambda_0 + k.(k+1) - k.2.k).v_{k-1} \end{aligned}$$

d'où finalement

$$X \cdot v_k = k.(\lambda_0 - k + 1).v_{k-1}. \quad (4.6)$$

En utilisant  $X \cdot v_{n+1} = 0 = (n+1).(\lambda_0 - n).v_n$  et comme  $v_n \neq 0$ , on a  $\lambda_0 = n$ . De plus, on a que  $W = \text{Vect}(v_k)_{k \leq n}$  est stable par  $X$  d'après (4.6), par  $Y$  par définition et par  $H$  car ceux sont des vecteurs propres donc on a  $W = V$ . Enfin, les  $v_k$  pour  $k \leq n$  sont libres car associés à des valeurs propres différentes de  $H$ . Par conséquent c'est une base de  $V$ .

On a donc complètement caractérisé la représentation  $V$  et en prenant la base des  $\frac{v_k}{k!}$  on obtient les actions suivantes :

$$\rho(H) = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \dots \\ 0 & n-2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -n \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

$$\rho(X) = \begin{pmatrix} 0 & n & 0 & \dots \\ 0 & 0 & n-1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

$$\rho(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & n & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Réciproquement, montrons que toute représentation de ce type est irréductible. Il est immédiat de vérifier que  $\rho$  tel que définit par les relations précédentes est un morphisme d'algèbre de Lie. Il reste donc à vérifier que  $V$  est irréductible. Soit  $W$  une sous représentation non réduite à 0. Alors

elle contient au moins un vecteur propre de  $H$ . Or, par les actions de  $X$  et  $Y$  on sait qu'on peut récupérer tous les vecteurs propres à partir d'un seul et  $W$  stable sous l'action de  $X$  et  $Y$  donc on a  $W = V$  et  $V$  est irréductible.

On notera qu'une représentation de dimension 1 (nécessairement irréductible) est triviale (c'est-à-dire que  $\rho = 0$ ).

## 4.6 Opérateur de Casimir

Nous allons étudier brièvement un élément du centre de  $\mathfrak{sl}_2$  qui sera utile pour la démonstration à venir de la semi-simplicité des représentations de dimension finie.

L'opérateur de Casimir est donné par

$$C = X \cdot Y + Y \cdot X + \frac{H^2}{2}. \quad (4.10)$$

Alors on a

$$\begin{aligned} [C, H] &= [X \cdot Y, H] + [Y \cdot X, H] + \frac{1}{2}[H^2, H] \\ &= X \cdot 2 \cdot Y - 2 \cdot X \cdot Y - Y \cdot 2 \cdot X + 2 \cdot Y \cdot X \\ &= 0. \end{aligned}$$

De même on obtient  $[C, X] = 0$  et  $[C, Y] = 0$ .  $C$  est donc dans le centre de  $U(\mathfrak{sl}_2)$ . Il est alors intéressant de noter que  $\rho(C)$  commute avec  $\rho(H)$  qui est diagonalisable à valeurs propres distinctes, donc  $\rho(C)$  est diagonalisable dans la même base que  $H$ . De plus,  $\rho(C)$  commute avec  $\rho(X)$  et  $\rho(Y)$ , en particulier en notant  $\mu_k$  la valeur propre associée à  $v_k$  on a

$$\mu_{k+1} \cdot v_{k+1} = C \cdot Y \cdot v_k = Y \cdot C \cdot v_k = \mu_k \cdot v_{k+1}.$$

On en déduit que  $\rho(C)$  est scalaire. On note  $\rho(C) = \alpha \text{Id}$ .

## 4.7 Semi-simplicité de $\mathfrak{sl}_2$

Montrons maintenant que toute représentation de dimension finie  $V$  est semi-simple. Pour cela il suffit de montrer que étant donné une sous représentation  $W$  de  $V$ , il existe une sous représentation  $U$  telle que  $V = W \oplus U$ .

### 4.7.1 Cas où $W$ est de codimension 1

Nous allons traiter ce cas par récurrence sur la dimension de  $V$ . Si la  $V$  est de dimension 2 alors  $W$  est une représentation triviale. De même,  $V/W$  est une représentation de dimension 1 donc triviale, par conséquent, il existe  $(v_1 \in W, v_2)$  une base de  $V$  telle que  $\mathfrak{sl}_2 \cdot v_1 = 0$  et  $\mathfrak{sl}_2 \cdot v_2 \subset \mathbb{C}v_1 = W$ . On a donc que  $\mathfrak{sl}_2 \cdot \mathfrak{sl}_2 \cdot V = 0$  donc  $[\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{sl}_2] \cdot V = 0$  et en utilisant (4.4),  $V$  est une représentation triviale donc n'importe quel supplémentaire de  $W$  convient.

Supposons maintenant  $\dim W = p > 1$ . On sait que  $H$  admet un vecteur propre et en faisant agir  $X$  et  $Y$  dessus on peut engendrer une sous représentation irréductible de  $W$  que nous noterons  $W_1$ .

Supposons tout d'abord que  $W_1 \neq W$ . On a donc  $1 < \dim W_1 < p$ . Notons  $\pi$  la projection canonique de  $V$  dans  $V/W_1$  alors  $\pi(W)$  est de codimension 1 et de dimension inférieure stricte à  $p$  donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. Il existe donc  $\bar{U}$  vérifiant

$$\pi(V) = \pi(W) \oplus \bar{U}$$

on a donc

$$V = W + \pi^{-1}(\bar{U}).$$

De plus,  $\bar{U}$  est de dimension 1 donc  $W_1$  est une sous représentation de  $\pi^{-1}(\bar{U})$  de codimension 1 et on peut à nouveau appliquer l'hypothèse de récurrence. Il existe donc  $U$  tel que

$$\pi^{-1}(\bar{U}) = U \oplus W_1$$

donc (et comme  $W_1 \subset W$ )

$$V = W + W_1 + U = W + U.$$

Finalement, comme  $U$  est de dimension 1 et  $W$  de codimension 1, la somme est directe et  $U$  convient.

Supposons maintenant que  $W_1 = W$ , c'est-à-dire que  $W$  est irréductible. La représentation  $V/W$  est de dimension 1 donc triviale et  $C/\alpha$  envoie  $V$  sur  $W$  et agit comme l'identité sur  $W$ . C'est donc un projecteur sur  $W$ . Comme de plus il est dans le centre de  $\mathfrak{sl}_2$ , c'est un morphisme de représentation de  $V$  dans  $W$  et son noyau convient.

#### 4.7.2 Cas général

Considérons maintenant  $W$  et  $V$  de dimension quelconque. On introduit deux espaces vectoriels,  $Z$  et  $Z'$  avec  $Z$  (resp  $Z'$ ) l'ensemble des applications linéaires de  $V$  dans  $W$  telle que la restriction à  $W$  soit une homothétie (respectivement zéro). On note que  $Z' \subset Z$  et que  $\text{codim} Z' = 1$ .

Nous allons maintenant les munir d'une structure de représentation de  $\mathfrak{sl}_2$  en définissant l'action d'un élément  $x$  de  $\mathfrak{sl}_2$  sur  $f \in Z$  par

$$\forall v \in V, (x \cdot f)(v) = (x \circ f)(v) - f(x \cdot v). \quad (4.11)$$

C'est immédiatement un morphisme d'algèbre de Lie car la représentation de  $\mathfrak{sl}_2$  sur  $V$  est un morphisme d'algèbre de Lie et de plus  $f$  est linéaire. Il suffit de montrer que  $Z$  et  $Z'$  sont stable. Soit donc  $x \in \mathfrak{sl}_2$ ,  $f \in Z$ ,  $\alpha$  le rapport d'homothétie de  $f$  sur  $W$  et  $v \in W$

$$\begin{aligned} (x \cdot f)(v) &= (x \circ f)(v) - f(x \cdot v) \\ &= x \cdot (\alpha \cdot v) - \alpha \cdot x \cdot v \quad \text{car } W \text{ est stable sous l'action de } x \\ &= 0. \end{aligned}$$

donc  $Z$  et  $Z'$  sont stable sous l'action de  $\mathfrak{sl}_2$ . On peut donc appliquer le résultat de codimension 1 et on a  $Z''$  une sous représentation de  $Z$  telle que

$$Z = Z' \oplus Z''.$$

Prenons  $f$  un élément qui engendre  $Z''$  (de dimension 1). Alors  $f$  agit comme une homothétie de rapport  $\alpha \neq 0$  sur  $W$ . Par conséquent,  $f/\alpha$  est un projecteur de  $V$  sur  $W$ . Montrons en plus que c'est un morphisme de représentation. La représentation  $W''$  étant de dimension 1, c'est la représentation triviale donc  $\forall x \in \mathfrak{sl}_2, x \cdot f = 0$  c'est-à-dire d'après (4.11)

$$\forall v \in V, x \circ f(v) - f(x \cdot v) = 0.$$

Ainsi, le noyau de  $f$  est un supplémentaire de  $W$  dans  $V$  ainsi qu'une sous représentation d'où le résultat voulu.

## 5 Le groupe quantique $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

Nous allons désormais étudier le groupe quantique (une algèbre malgré son nom)  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  ainsi que ses représentations qui s'avèreront semblables à celle de  $\mathfrak{sl}_2$ . Cette algèbre jouera un rôle important comme nous le verrons lors de l'étude de la dualité de Schur-Weyl. En particulier une connaissance de ses représentations permet de calculer la fonction de partition canonique dans le modèle de Potts.

### 5.1 Le groupe quantique $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

Le groupe quantique  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  est introduit comme une déformation de l'algèbre enveloppante  $U(\mathfrak{sl}_2)$  en fonction d'un paramètre  $q \in \mathbb{C}$ . On prend  $q$  un élément de  $k$  non nul et différent de 1 et  $-1$ . On définit

$$[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}. \quad (5.1)$$

On notera  $[n]_q = [n]$  quand il n'y a pas d'ambiguïté.

#### Définition 5.1 (Définition de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ )

$U_q(\mathfrak{sl}_2)$  est défini comme l'algèbre engendrée par 4 éléments  $E, F, K$  et  $K^{-1}$  vérifiant les relations

$$K \cdot K^{-1} = K^{-1} \cdot K = 1, \quad (5.2)$$

$$K \cdot E \cdot K^{-1} = q^2 E, \quad K \cdot F \cdot K^{-1} = q^{-2} F, \quad (5.3)$$

$$[E, F] = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} \quad (5.4)$$

avec  $[\cdot, \cdot]$  le commutateur usuel tel que défini pour une algèbre.

Cette algèbre n'est pas définie pour  $q = 1$ . Cependant elle est isomorphe à l'algèbre  $U'_q$  engendrée par  $E, F, K, K^{-1}, L$  avec les relations

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1,$$

$$KEK^{-1} = q^2 E, \quad KFK^{-1} = q^{-2} F,$$

$$[E, F] = L, \quad (q - q^{-1})L = K - K^{-1},$$

$$[L, E] = q(EK + K^{-1}E), \quad [L, F] = -q^{-1}(FK + K^{-1}F).$$

Il suffit d'envoyer  $E, F$  et  $K$  sur eux mêmes et  $L$  sur  $[E, F]$ . Nous admettons ce résultat. Dans le cas où  $q = 1$  on retrouve  $U(\mathfrak{sl}_2)$

Cette algèbre n'est pas définie pour  $q = 1$  mais une autre définition valable dans ce cas et donnant une algèbre isomorphe à  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  permet d'obtenir  $U(\mathfrak{sl}_2)$  pour  $q = 1$ . On retrouve les relations de  $U(\mathfrak{sl}_2)$  en envoyant  $K$  sur 1,  $E$  sur  $X$ ,  $F$  sur  $Y$  et  $L$  sur  $H$ .

### 5.2 Représentations de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

Nous supposons que  $q$  n'est pas une racine de l'unité. Sous cette condition il est possible de caractériser toutes les représentations irréductibles finies de  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  et de démontrer que toute représentation finie est semi-simple.

La définition de représentation pour une algèbre est la même que dans les cas précédent à ceci près que  $\rho$  doit maintenant être un morphisme d'algèbre de  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  dans  $\text{End}V$ .

Soit  $V$  une représentation finie de  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ . Soit  $v$  un vecteur propre de  $K$  associé à la valeur propre  $\lambda$ . Alors

$$K \cdot (E \cdot v) = q^2 \cdot \lambda \cdot E \cdot v$$

donc  $E \cdot v$  est un vecteur propre pour  $K$  de valeur propre  $q^2 \cdot \lambda$ . De même,  $F \cdot v$  est un vecteur propre de  $K$  de valeur propre  $q^{-2} \cdot \lambda$ .

Il est alors possible de calquer la démonstration faite dans le cas de  $\mathfrak{sl}_2$ . On obtient ainsi à partir d'un vecteur  $v$  tel que  $E \cdot v = 0$  une base  $(v_p)$  définie par

$$v_p = \frac{1}{[p] \cdot [p-1] \cdots [1]} F^p \cdot v$$

qui engendre tout  $V$ . À partir de là, on peut calquer la démonstration sur celle faite pour  $\mathfrak{sl}_2$  et il suffit de remplacer tous entier  $n$  par son homologue quantique  $[n]$ . L'élément clé qui fait que la démonstration fonctionne est que les différentes valeurs propres  $q^{2 \cdot p}$  sont distinctes deux à deux dans le cas où  $q$  n'est pas une racine de l'unité et on peut donc utiliser la dimension finie pour justifier que la chaîne des  $v_p$  doit s'arrêter. On obtient de la même manière que nous l'avons fait pour  $\mathfrak{sl}_2$  la semi-simplicité.

Une légère différence avec  $\mathfrak{sl}_2$  et qu'il existe pour chaque dimension deux représentations indexées par un paramètre  $\epsilon = \pm 1$ . En effet, pour  $n + 1$  la dimension de  $V$ , on peut montrer par récurrence

$$0 = E \cdot v_{n+1} = \frac{q^{-n}\lambda - q^n\lambda^{-1}}{q - q^{-1}} \cdot v_n$$

avec  $\lambda$  la valeur propre associée à  $v_0$ . Ainsi  $\lambda = \epsilon q^n$  avec  $\epsilon = \pm 1$ . On a par ailleurs

$$K \cdot v_p = \epsilon q^{-2 \cdot p} \cdot v_p.$$

Finalement, en plus de remplacer les entiers par leurs homologues quantiques il faut multiplier les matrices  $\rho(E)$  et  $\rho(K)$  par  $\epsilon$ . On obtient :

$$\rho(K) = \epsilon \begin{pmatrix} [n] & 0 & 0 & \dots \\ 0 & [n-2] & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & [-n] \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

$$\rho(E) = \epsilon \begin{pmatrix} 0 & [n] & 0 & \dots \\ 0 & 0 & [n-1] & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & [1] \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

$$\rho(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ [1] & 0 & 0 & \dots \\ 0 & [2] & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & [n] & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

### 5.3 Représentations quand $q$ est une racine de l'unité

On note  $d$  le plus petit entier supérieur stricte à 1 tel que  $q^d = 1$  et on prend  $e = d$  si  $d$  est impair et  $e = d/2$  si  $d$  est pair.

La démonstration précédente s'applique à condition que la dimension de  $V$  soit inférieure stricte à  $e$ . Ainsi, toutes les représentations irréductibles de dimension  $n < e$  sont exactement celles trouvées dans le cas où  $q$  n'est pas racine de l'unité.

Les choses se compliquent si l'on cherche une représentation irréductible de dimension  $n \geq e$  finie. En fait il n'en existe pas pour  $n > e$ . Nous allons montrer ce résultat en commençant par quelques lemmes.

#### Lemme 5.1

Tout élément dans le centre de  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  (i.e. qui commute avec tous les autres éléments) agit sur une représentation irréductible  $V$  comme une homothétie.

**Démonstration :** Soit  $z$  un élément du centre et  $\lambda$  une valeur propre de l'action de  $z$  sur une représentation irréductible de  $V$ . Alors  $\text{Ker}(\rho(z) - \lambda)$  est une sous représentation car stable sous l'action de tout élément de  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  car  $z$  commute avec chacun. Comme elle est non réduite à 0 mais qu'elle est triviale on a  $\text{Ker}(\rho(z) - \lambda) = V$  et  $\rho(z) = \lambda \cdot \text{Id}$ . ■

Il nous faut maintenant quelques formules de commutations entre les générateurs de  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  que l'on peut obtenir par récurrence sur  $m$ .

#### Lemme 5.2

Soit  $m \leq 0$  et  $n = \pm 1$ , alors on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
E^m \cdot K^n &= q^{-2 \cdot m \cdot n} \cdot K^n \cdot E^m \quad \text{et} \quad F^m \cdot K^n = q^{2 \cdot m \cdot n} \cdot K^n \cdot F^m, \\
[E, F^m] &= [m] \cdot \frac{q^{m-1}K - q^{-(m-1)}K^{-1}}{q - q^{-1}} \cdot F^{m-1}, \\
[E^m, F] &= [m] \cdot E^{m-1} \cdot \frac{q^{m-1}K - q^{-(m-1)}K^{-1}}{q - q^{-1}}.
\end{aligned}$$

**Lemme 5.3**

Les éléments  $E^e$ ,  $F^e$  et  $K^e$  sont dans le centre de  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ . En particulier ils agissent comme l'identité

**Démonstration :** C'est une conséquence immédiate du lemme précédent et du fait que

$$[e] = q^{e-1} + \dots + q^{-e+1} = 0. \quad \blacksquare$$

Nous aurons finalement besoin d'un autre élément du centre, l'opérateur de Casimir quantique noté  $C_q$  est défini par

$$C_q = E \cdot F + \frac{q^{-1}K + qK^{-1}}{(q - q^{-1})^2} = F \cdot E + \frac{qK + q^{-1}K^{-1}}{(q - q^{-1})^2}.$$

**Lemme 5.4**

$C_q$  est dans le centre de  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ .

**Démonstration :** Il est immédiat que  $C_q$  commute avec  $K$  car  $KEFK^{-1} = EF$ . On a

$$E \cdot C_q = E \cdot F \cdot E + E \cdot \frac{qK + q^{-1}K^{-1}}{(q - q^{-1})^2} = E \cdot F \cdot E + \frac{q^{-1}K + qK^{-1}}{(q - q^{-1})^2} \cdot E = C_q \cdot E$$

et de même pour  $F$ . \blacksquare

**Proposition 5.1**

Il n'existe pas de représentation irréductible  $V$  de  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  de dimension finie  $n > e$  dans le cas où  $q$  est une racine de l'unité.

**Démonstration :** Soit  $V$  une telle représentation. Supposons qu'il existe un vecteur propre de  $K$   $v$  tel que  $F \cdot v = 0$ . On prend le sous espace  $V'$  engendré par  $(v, E \cdot v, \dots, E^{e-1} \cdot v)$ . Il est immédiatement stable sous l'action de  $K$  et  $F$  en utilisant les relations du lemme 5.2. Finalement il est stable sous l'action de  $E$  car  $E^e$  agit comme  $\alpha \cdot \text{Id}$  pour un certain  $\alpha \in k$ . Or  $\dim(V') \leq e < \dim(V)$  ce qui contredit l'hypothèse que  $V$  est irréductible.

Supposons maintenant qu'il n'existe pas de tel vecteur propre de  $K$ . Soit  $v$  un vecteur propre pour l'action de  $K$ , on a  $F \cdot v \neq 0$ . On pose  $V''$  le sous espace vectoriel engendré par les vecteurs  $(v, F \cdot v, \dots, F^{e-1} \cdot v)$ .  $V''$  est immédiatement stable sous l'action de  $K$  et sous l'action de  $F$  car  $F^e$  agit comme  $\beta \cdot \text{Id}$  pour un certain  $\beta \in k$ . De plus  $\beta \neq 0$  car l'action de  $F$  n'est pas triviale comme  $F \cdot v \neq 0$ .

Montrons que  $V''$  est stable sous l'action de  $E$ . On sait qu'il existe  $\gamma \in k$  tel que l'action de  $C_q$  sur  $V$  soit  $\gamma \cdot \text{Id}$ . Soit  $p > 0$ , on a

$$\begin{aligned}
E \cdot (F^p \cdot v) &= E \cdot F \cdot (F^{p-1} \cdot v) \\
&= \left( C_q - \frac{q^{-1}K + qK^{-1}}{(q - q^{-1})^2} \right) \cdot (F^{p-1} \cdot v) \\
&= \gamma \cdot F^{p-1} \cdot v - \frac{q^{-1}K + qK^{-1}}{(q - q^{-1})^2} \cdot (F^{p-1} \cdot v).
\end{aligned}$$

et donc  $E \cdot (F^p \cdot v) \in V''$ . Enfin on a  $v = \beta^{-1} \cdot F^e \cdot v$  donc on peut se ramener au cas  $p > 0$ . Finalement  $V''$  est une sous représentation non triviale ce qui contredit l'hypothèse sur  $V$ . \blacksquare

Nous ne détaillerons pas plus le cas où  $q$  est une racine de l'unité mais il est possible de déterminer également les représentations de dimension exactement  $e$ .

## 6 Dualité de Schur-Weyl

Considérons un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$   $V$  de dimension finie et  $U = V^{\otimes L}$ . On peut trouver deux actions immédiates sur  $U$ . D'une part l'action de  $\text{GL}(V)$  par

$$g \cdot \bigotimes_i v_i = \bigotimes_i g \cdot v_i \quad (6.1)$$

et d'autre part l'action du groupe symétrique  $\Sigma_L$  par

$$\sigma \cdot \bigotimes_i v_i = \bigotimes_i v_{\sigma^{-1}(i)}. \quad (6.2)$$

Il est immédiat que ces deux actions commutent. En réalité on a un résultat bien plus fort car chaque action engendre le centraliseur complet de l'autre et on peut écrire  $U$  sous la forme

$$U = \bigoplus_D \pi_D \otimes \rho_D \quad (6.3)$$

où  $D$  parcourt les diagrammes de Young que nous introduirons par la suite, les  $\pi_D$  (resp  $\rho_D$ ) sont des représentations irréductibles de  $\Sigma_L$  (resp  $\text{GL}(V)$ ) deux à deux non isomorphes.

Nous allons chercher à démontrer ce résultat et à obtenir des informations plus précises sur les représentations qui sont présentes dans la décomposition. Ce résultat est présenté pour la première fois par Schur puis repris par Weyl dans [14]. Nous suivrons essentiellement la démonstration présente dans [4] sauf pour les dernières étapes qui sont inspirées de [5].

### 6.1 Diagrammes de Young

Les classes de conjugaisons de  $\Sigma_L$  sont données par le résultat sur la décomposition en orbites disjointes qui permet d'écrire toute permutation comme le produit de cycles à supports disjoints. On peut donc ordonner ces cycles par ordre décroissant de taille. On sait que la conjugaison consiste à changer des numéros par d'autres et donc le contenu des cycles ne compte pas. Ainsi, une classe de conjugaison est uniquement déterminé par la donnée de la taille de ses cycles par ordre décroissant de taille pourvu que la somme des tailles fassent  $L$ . Ainsi à chaque partition on associe une unique liste  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  avec  $k$  la taille de la liste,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$  et  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = L$ .

On associe à un tel  $\lambda$  un tableau de Young constitué de  $L$  cases rangées en  $k$  lignes alignées à gauche, la  $i^{\text{e}}$  comptant  $\lambda_i$  cases. Un exemple est donné sur la figure 4.

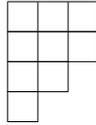


FIGURE 4: Diagramme de Young associé à  $\lambda = (3, 3, 2, 1)$ .

On numérote par la suite les cases du diagramme de 1 à  $L$  en allant de gauche à droite et de haut en bas comme montré sur la figure 5.

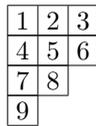


FIGURE 5: Diagramme de Young numéroté associé à  $\lambda = (3, 3, 2, 1)$ .

### 6.2 Symétriseurs de Young

On sait déjà comment rendre un état complètement symétrique ou complètement antisymétrique (c'est le cas pour les états qui décrivent les fermions ou les bosons). Pour le premier cas, on utilise

étant donné un élément  $v$  d'une représentation  $V$  de  $\Sigma_L$

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in \Sigma_L} \sigma \cdot v \quad (6.4)$$

et pour l'autre

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in \Sigma_L} \text{sign}(\sigma) \cdot \sigma \cdot v. \quad (6.5)$$

Ces deux applications sont appelées des symétriseurs de Young. On peut généraliser ce concept à tout type de symétrie et non plus seulement à totalement symétrique ou antisymétrique à l'aide des diagrammes de Young.

Pour cela, on sépare  $\Sigma_L$  en deux sous groupes :

$$P = P_\lambda = \{\sigma : \sigma \text{ préserve les lignes du diagramme de Young}\} \quad (6.6)$$

et

$$Q = Q_\lambda = \{\sigma : \sigma \text{ préserve les colonnes du diagramme de Young}\} \quad (6.7)$$

et on introduit deux applications

$$a_\lambda = \sum_{g \in P} g \quad \text{et} \quad b_\lambda = \sum_{g \in Q} \text{sign}(g) \cdot g. \quad (6.8)$$

Finalement le symétriseur de Young associé à  $\lambda$  est donné par

$$c_\lambda = a_\lambda \cdot b_\lambda. \quad (6.9)$$

Pour  $\lambda = (L)$ ,  $P$  vaut  $\Sigma_L$  et  $Q$  est réduit à l'identité donc on retrouve pour  $c_\lambda$  le cas totalement symétrique. Pareillement le cas totalement antisymétrique est obtenu pour  $\lambda = (1, 1, 1, \dots)$ .

Le résultat important est que les images de  $\mathbb{C}.\Sigma_L$  par multiplication à droite par  $c_\lambda$  sont exactement toutes les représentations irréductibles de  $\Sigma_L$  ce que nous allons montrer dans la prochaine partie.

### 6.3 Représentations de $\Sigma_L$

On reprend les notations précédentes avec  $\lambda$  fixée. On pourra omettre par la suite le  $\lambda$  en indice. On notera  $A = \mathbb{C}.\Sigma_L$  l'espace vectoriel engendré par les permutations considérées comme linéairement indépendantes c'est-à-dire l'espace vectoriel  $\mathbb{C}^{L!}$  doté de sa base canonique  $(e_i)$  et dans lequel on inclue  $\Sigma_L$  par l'identification de  $(e_i)$  à la  $i^e$  permutation (pour un ordre arbitraire mais fixé donné aux permutations). Nous allons commencer par démontrer quelques résultats préliminaires.

#### Lemme 6.1

Nous avons les relations suivantes :

(1)

$$\forall p \in P, p \cdot a = a \cdot p = a,$$

(2)

$$\forall q \in Q, (\text{sign}(q) \cdot q) \cdot b = b \cdot (\text{sign}(q) \cdot q) = b,$$

(3)

$$\forall p \in P, q \in Q, p \cdot c \cdot \text{sign}(q) \cdot q = c,$$

(4)  $c$  est l'unique élément à vérifier la propriété (3) à multiplication par un scalaire près.

**Démonstration :** Les trois premières relations sont immédiates. Il suffit de montrer la dernière propriété. Supposons que  $c' = \sum_g n_g \cdot g$  vérifie la relation (3). Alors, pour tout  $p \in P$  et  $q \in Q$  et  $g \in \Sigma_L$ ,  $n_{p \cdot g \cdot q} = \text{sign}(q) \cdot n_g$ , en particulier,  $n_{p \cdot q} = \text{sign}(q) n_e$ . Or, au facteur  $n_e$  près, c'est exactement la valeur attendue lorsque l'on décompose le produit  $a \cdot b$  et tous les autres termes sont nuls dans  $c$ . Ainsi, il suffit de vérifier que pour tout élément qui n'est pas de la forme  $p \cdot q$ ,  $n_g = 0$ .

Soit  $T$  le tableau de Young numéroté associé à  $\lambda$  et  $T' = g \cdot T$ , c'est-à-dire le tableau obtenu en remplaçant les numéros de case  $i$  par  $g(i)$ .

Supposons qu'il n'existe pas deux numéros qui soient dans la même ligne de  $T$  et la même colonne de  $T'$ . Alors les  $\lambda_1$  numéros de la première ligne de  $T$  doivent être réparti dans exactement  $\lambda_1$  colonnes différentes de  $T'$  (sinon on en aurait deux dans la même colonne de  $T'$  et ils sont par définition sur la même ligne de  $T$ ). Ainsi, il est possible de prendre une permutation  $q'_1$  de  $T'$  en conservant les colonnes (c'est-à-dire dans  $Q' = g \cdot Q \cdot g^{-1}$ ) qui ramène chacun de ces numéros en tête de leur colonne. Ensuite, par une permutation  $p_1 \in P$  de  $T$  on peut obtenir les numéros de la première ligne dans le même ordre dans  $q'_1 \cdot T'$  et  $p_1 \cdot T$ . En répétant l'argument pour la ligne suivante on peut ainsi obtenir par itération  $q' \in Q'$  et  $p \in P$  tels que  $q' \cdot T' = p \cdot T$  c'est-à-dire pour un certain  $q \in Q$

$$g \cdot q \cdot g^{-1} \cdot g \cdot T = p \cdot T$$

c'est-à-dire

$$g = p \cdot q^{-1}$$

donc on peut écrire  $g$  sous la forme  $p \cdot q$  avec  $p \in P$  et  $q \in Q$ .

On suppose maintenant que  $g$  ne s'écrit pas sous la forme  $p \cdot q$ . On a donc qu'il existe deux numéros différents qui sont dans la même ligne de  $T$  et la même colonne de  $T'$ . En posant  $t$  la transposition de ces deux numéros on a  $t \in P$  et  $t \in Q'$ . On pose  $q = g^{-1} \cdot t \cdot g \in Q$ . On a  $g = t \cdot g \cdot q$  donc  $n_{t \cdot g \cdot q} = \text{sign}(q) \cdot n_g$  d'où  $n_g = -n_g$  et donc  $n_g = 0$  ■

On définit pour la suite une relation d'ordre lexicographique sur les partitions. C'est à dire que  $\lambda > \mu$  si et seulement si le premier terme non nul  $\lambda_i - \mu_i$  est strictement positif (en prenant  $\mu_i = 0$  ou  $\lambda_i = 0$  si l'un des deux n'est pas assez long).

### Lemme 6.2

Soit  $\lambda$  et  $\mu$  deux partitions. Si  $\lambda > \mu$ , alors  $\forall x \in A, a_\lambda \cdot x \cdot b_\mu = 0$ , en particulier,  $c_\lambda \cdot c_\mu = 0$ . De plus, pour tout  $x$  dans  $A$ ,  $c_\lambda \cdot x \cdot c_\lambda$  est un proportionnel à  $c_\lambda$ . En particulier, il existe  $n_\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $c_\lambda \cdot c_\lambda = n_\lambda \cdot c_\lambda$ .

**Démonstration :** On se limite à  $x \in \Sigma_L$  par linéarité. Quitte à considérer le tableau  $T' = x \cdot T$  avec  $T$  le tableau de Young utilisé pour construire  $b_\mu$  et comme  $a_\lambda \cdot x \cdot b_\mu = 0 \Leftrightarrow a_\lambda \cdot x \cdot b_\mu \cdot x^{-1} = 0$  on peut se ramener au cas où  $x = e$ . L'hypothèse  $\lambda > \mu$  implique alors qu'il existe deux éléments dans la même ligne de  $T$  et la même colonne de  $T'$ . On note  $t$  la transposition de ces deux éléments. On a alors  $a_\lambda \cdot t = a$  et  $t \cdot b_\mu = -b_\mu$  d'après le lemme 6.1. On a donc

$$a_\lambda \cdot b_\mu = a_\lambda \cdot t \cdot t \cdot b_\mu = -a_\lambda \cdot b_\mu$$

d'où le résultat voulu.

Pour la deuxième partie, on a avec le point (iii) du lemme 6.1

$$\forall p \in P, q \in Q, p \cdot c \cdot x \cdot c \cdot \text{sign}(q) \cdot q = c \cdot x \cdot c$$

donc toujours d'après le même point,  $c \cdot x \cdot c$  est proportionnel à  $c$ . ■

### Proposition 6.1

Soit  $\lambda$  une partition comme définie précédemment. Alors,  $V_\lambda = A \cdot c_\lambda$  est une représentation irréductible de  $\Sigma_L$ . Toute représentation irréductible de  $\Sigma_L$  est de cette forme.

Si  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux partitions non égales, alors  $V_\lambda$  et  $V_\mu$  ne sont pas isomorphes en tant que représentations de  $\Sigma_L$ .

**Démonstration :** Soit  $W$  une sous représentation de  $V = V_\lambda$ . Alors d'après le lemme 6.2,  $c \cdot V \subset \mathbb{C} \cdot c$  donc soit  $c \cdot W = 0$ , soit  $c \cdot W = \mathbb{C} \cdot c$ . Dans le premier cas, on a  $W \cdot W \subset A \cdot c \cdot W = 0$  et nous verrons que cela implique  $W = 0$ . Dans le second cas, on a  $V = A \cdot c \subset W$  donc  $V = W$ .

Supposons maintenant que  $W \cdot W = 0$ . On sait d'après le lemme de Schur qu'il existe un supplémentaire de  $W$  dans  $A$  qui est une sous représentation  $U$  de  $\Sigma_L$ . On a donc

$$A = W \oplus U,$$

$$A \cdot W \subset W \quad \text{et} \quad A \cdot U \subset U.$$

Il existe un unique couple  $(u, w) \in U \times W$  tel que  $u + w = e$ . On a donc

$$u + w = e = e^2 = u^2 + u \cdot w + w \cdot u$$

d'où comme  $u \cdot w \in W$  et  $w \cdot u \in U$ ,

$$u = u^2 + w \cdot u \quad \text{et} \quad w = u \cdot w.$$

On obtient alors

$$w \cdot u = u \cdot (e - u) = u \cdot w = w$$

donc  $w \in U$  or  $U \cap W = \{0\}$  donc  $w = 0$  et  $e \in U$ . Comme  $A \cdot U \subset U$ , on a  $U = A$  et  $W = \{0\}$ .

On a donc bien que  $V$  est une représentation irréductible de  $\Sigma_L$ . On obtient de plus que  $c \cdot V \neq \{0\}$ .

On prend  $\lambda \neq \mu$ , par exemple  $\lambda > \mu$ . Supposons  $f$  un isomorphisme entre  $V_\lambda$  et  $V_\mu$ , on a  $f \circ c_\lambda = c_\lambda \circ f$  (en considérant  $c_\lambda$  dans  $\text{End}V$ ). Or  $f(V_\lambda) = V_\mu$  donc  $c_\lambda \cdot V_\mu = f(c_\lambda \cdot V_\lambda)$ . On a  $c_\lambda \cdot V_\lambda = \mathbb{C} \cdot c_\lambda \neq \{0\}$  mais  $c_\lambda \cdot V_\mu = c_\lambda \cdot A \cdot c_\mu = \{0\}$ , ce qui est absurde. Donc  $V_\mu$  et  $V_\lambda$  ne sont pas isomorphes.

Finalement, on a vu dans les rappels sur les représentations qu'il y a autant de représentations irréductibles que de classes de conjugaisons. Or,  $\lambda$  parcourt l'ensemble des classes de conjugaisons de  $\Sigma_L$  donc les  $V_\lambda$  sont exactement toutes les représentations irréductibles de  $\Sigma_L$ . ■

## 6.4 Commutants

Nous allons montrer deux résultats qui permettront de montrer que  $\text{GL}_n$  et  $\Sigma_L$  engendrent respectivement le commutant complet de l'autre dans  $\text{End}U$ . Le résultat le plus facile est de montré que  $\text{GL}_n$  engendre le commutant de  $\Sigma_L$ .

### Lemme 6.3

Le commutant  $B$  de  $\Sigma_L$  est engendré en tant que sous espace vectoriel de  $\text{End}(U)$  par  $\text{End}(V)$ . De plus, un sous espace vectoriel de  $U$  est une sous représentation de  $B$  si et seulement si c'est une sous représentation de  $\text{GL}(V)$ . En particulier une représentation est irréductible pour  $B$  si et seulement si elle l'est pour  $\text{GL}(V)$ .

**Démonstration :** Considérons  $W = \text{End}(V)$ . Alors on peut écrire  $\text{End}(U) = W^{\otimes L}$ . On définit sur  $W$  l'action à gauche de  $\Sigma_L$  définie par

$$\forall g \in \Sigma_L, \forall f_1 \otimes \dots \otimes f_L, g \cdot (f_1 \otimes \dots \otimes f_L) = f_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes f_{\sigma^{-1}(L)}.$$

On notera la relation

$$f(v \cdot \sigma) = (\sigma \cdot f)(v) \cdot \sigma$$

que l'on peut vérifier pour  $f$  et  $v$  tenseurs purs. Prenons  $f$  un endomorphisme de  $U$ . Alors on a l'équivalence entre les trois relations :

(i)

$$\forall v \in U, \forall \sigma \in \Sigma_L, f(v \cdot \sigma) = f(v) \cdot \sigma,$$

(ii)

$$\forall v \in U, \forall \sigma \in \Sigma_L, (\sigma \cdot f)(v) \cdot \sigma = f(v) \cdot \sigma,$$

(iii)

$$\forall \sigma \in \Sigma_L, (\sigma \cdot f) = f.$$

Ainsi  $B$  est le sous espace vectoriel des tenseurs symétrique  $\text{Sym}^L W$ . Or cet espace est engendré par l'ensemble des  $w^{\otimes L}$  pour  $w$  qui parcourt  $W$  et ainsi on montre que  $B$  est engendré par  $\text{End}(V)$ .

Montrons l'assertions précédente. Pour cela il suffit de montrer que tout vecteur de la forme  $q \cdot (v_1 \otimes \dots \otimes v_L)$  peut-être obtenu avec  $q$  le symétriseur

$$q = \frac{1}{L!} \sum_{\sigma \in \Sigma_L} \sigma$$

car  $q$  est une projection sur  $\text{Sym}^L W$ . On procède par récurrence sur le nombre  $n$  de vecteurs différents qui apparaissent dans  $(v_1, \dots, v_L)$ . Pour  $n = 1$  c'est trivial. Pour  $n > 1$  on écrit

$$q \cdot (v_1 \otimes \dots \otimes v_L) = (v_1 + \dots + v_L)^{\otimes L} - A$$

avec  $A$  une somme de termes où à chaque fois au moins un des vecteurs est répété. Ainsi, avec l'hypothèse de récurrence  $A$  peut-être engendré donc de même pour  $q \cdot (v_1 \otimes \dots \otimes v_L)$ .

Le deuxième point est une conséquence de la densité de  $\text{GL}(V)$  dans  $\text{End}(V)$ . ■

Comme  $\Sigma_L$  est un groupe fini on sait que  $U$  est semi-simple. Cela permet d'utiliser un résultat théorique général sur les commutants qui permet, quand on sait que  $B$  est le commutant de  $A$  de montrer que  $A$  est le commutant de  $B$ .

### Théorème 6.1 (Théorème du double commutant)

Soit  $U$  un espace vectoriel et  $A$  une sous algèbre de  $\text{End}(U)$ . On note  $B$  le commutant de  $A$ , sous algèbre de  $\text{End}(U)$ . Alors si  $U$  peut se décomposer en somme directe de représentations

irréductibles de  $A$ , alors  $A$  est le commutant de  $B$ .

**Démonstration :** Il est immédiat que  $A$  est inclut dans le commutant de  $B$ . Soit maintenant un élément  $f$  dans le commutant de  $B$ . Soit de plus  $n$  la dimension de  $U$  et  $u_1, \dots, u_n$  une base  $U$ . On note  $w = u_1 \oplus \dots \oplus u_n \in U^{\oplus n}$ . On note  $W = A \cdot w$  qui est donc une représentation de  $A$ . Comme  $U$  peut se décomposer en représentation irréductible il en va de même pour  $U^{\oplus n}$ . Ainsi  $W$  admet un supplémentaire qui est invariant sous l'action de  $A$  donc en particulier il existe une projection  $p$  sur  $W$  qui soit un morphisme de représentation. L'action de  $p$  peut-être décrite comme une matrice  $n \times n$  dont chaque élément représente un endomorphisme de  $U$  qui commute avec  $A$  donc qui est dans  $B$ . De plus on a  $p(w) = w$  donc

$$p(f(v_1) \oplus \dots \oplus f(v_n)) = f(v_1) \oplus \dots \oplus f(v_n) \in W$$

par définition de  $W$  il existe donc  $a \in A$  tel que

$$f(v_1) \oplus \dots \oplus f(v_n) = a(v_1) \oplus \dots \oplus a(v_n)$$

c'est-à-dire tel que  $f = a$  et donc  $A$  est bien le commutant de  $B$ . ■

En appliquant ce théorème pour  $A$  l'algèbre engendrée par  $\Sigma_L$  dans  $\text{End } U$  et  $B$  l'algèbre engendrée par  $\text{GL}(V)$  on arrive à la conclusion que  $\text{GL}(V)$  engendre bien le commutant de  $\Sigma_L$ .

## 6.5 Construction de Weyl

Reprenons  $U = V^{\otimes L}$  et les deux actions de  $\text{GL}_n$  et  $\Sigma_L$ . Nous allons maintenant construire certaines représentations irréductibles de  $\text{GL}_n$  et montrer la semi-simplicité de  $U$ .

### Définition 6.1 (Foncteur de Schur)

Soit  $\lambda$  une partition de  $L$ . On pose  $\mathbb{S}_\lambda V = \text{Im}(c_\lambda|_U)$ . On définit le foncteur de Schur

$$\mathbb{S}_\lambda : V \rightsquigarrow \mathbb{S}_\lambda V.$$

Par exemple, pour  $\lambda = (d)$ , on a  $\mathbb{S}_\lambda V = \text{Sym}^d V$  et pour  $\lambda = (1, 1, \dots)$ , on obtient  $\mathbb{S}_\lambda V = \bigwedge^d V$ .

On peut voir que les  $\mathbb{S}_\lambda V$  sont stable sous l'action de  $\text{GL}(V)$  car cette action commute avec  $c_\lambda$  donc laisse stable son image.

Nous allons essayer de montrer que les  $\mathbb{S}_\lambda V$  sont des représentations irréductibles de  $\text{GL}(V)$  et que l'on peut décomposer  $U$  avec ces représentations. Pour cela commençons par montrer un lemme plus général qui contient l'essentiel de la démonstration.

Nous allons considérer pour le moment  $G$  un groupe fini quelconque,  $A = \mathbb{C}.G$  et  $U$  un  $A$ -module à droite. On pose

$$B = \text{Hom}_G(U, U) = \{\phi : U \rightarrow U : \forall v \in U, g \in G, \phi(v \cdot g) = \phi(v) \cdot g\}.$$

$B$  agit sur  $U$  à gauche et commute avec l'action à droite de  $A$ . De plus le lemme de Schur nous dit que si  $U = \bigoplus_i U_i^{\otimes n_i}$  avec  $U_i$  des représentations irréductibles de  $A$  non isomorphes alors

$$B = \bigoplus_i \text{End}_G(U_i^{\oplus n_i}, U_i^{\oplus n_i}) = \bigoplus_i M_{n_i}(\mathbb{C}).$$

Si  $W$  est une représentation de  $A$ , alors le produit tensoriel  $U \otimes_A W$  est une représentation de  $B$  pour l'action  $b \cdot (v \otimes w) = (b \cdot v) \otimes w$ .

### Lemme 6.4

Soit  $U$  un module de dimension finie sur  $A$  à droite.

- (i) Pour tout  $c \in A$ , l'application canonique de  $U \otimes_A A \cdot c$  dans  $U \cdot c$  est un isomorphisme de modules sur  $B$ .
- (ii) Si  $W = A \cdot c$  est une représentation irréductible de  $A$  alors  $U \otimes_A W = U \cdot c$  est une représentation irréductible de  $B$  (éventuellement triviale).
- (iii) Si les  $W_i = A \cdot c_i$  sont les représentations irréductibles de  $A$  avec  $m_i$  la dimension de  $W_i$  alors on a (à isomorphisme près) :

$$U = \bigoplus_i (U \otimes_A W_i)^{\oplus m_i} = \sum_i (U \cdot c_i)^{\oplus m_i}.$$

Avant de commencer la démonstration voyons à quoi ce lemme va nous servir. On remarque que  $G = \Sigma_L$  rentre dans le cadre du lemme 6.4 car les représentations irréductibles de  $A = \mathbb{C}G$  sont bien de la forme  $A \cdot c$  pour  $c \in A$  comme nous l'avons démontré à la partie précédente. On prend de plus  $U = V^{\otimes L}$ . Alors on obtient une décomposition de  $U$  en représentations irréductibles de  $B$  se qui montre que  $U$  est semi-simple pour les représentations de  $B$  et les représentations qui apparaissent dans la décomposition sont exactement les foncteurs de Schur que nous avons présentés.

Dans ce cas  $B$  est constitué de l'ensemble des endomorphismes de  $U$  qui commutent avec l'action de  $\Sigma_L$ . On a montré que  $B$  est engendrée par les endomorphismes de  $V$  avec le lemme 6.3. En particulier les représentations irréductibles de  $B$  sont aussi des représentations irréductibles de  $\text{GL}(V)$  ce qui permet de conclure avec la proposition 6.2.

### Proposition 6.2

Les  $\mathbb{S}_\lambda V$  pour  $\lambda$  décrivant les partitions de  $L$  telles que décrites précédemment sont des représentations irréductibles de  $\text{GL}(V)$ . De plus, on peut décomposer  $U$  en tant que représentation de  $\text{GL}(V)$  en utilisant uniquement ces représentations. En particulier  $U$  est semi-simple pour l'action de  $\text{GL}(V)$ .

Il reste à faire la démonstration du lemme 6.4.

**Démonstration :** Pour prouver (i), regardons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} U \otimes_A W & \xrightarrow{\cdot c} & U \otimes_A A \cdot c & \hookrightarrow & U \otimes_A A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{\cdot c} & U \cdot c & \hookrightarrow & U \end{array}$$

Comme indiqué, les flèches horizontales de gauche sont des surjections et celles de droite des injections. Les deux flèches verticales extérieures sont des isomorphismes donc la flèche verticale intérieure est un isomorphisme.

Prouvons (ii). Tout d'abord on prend  $U$  irréductible c'est-à-dire qu'on a  $B = \mathbb{C}$ . Il faut donc montrer que  $\dim U \otimes_A W \leq 1$ .

On considère  $V = U^*$  qui est un  $A$ -module à gauche par  $(c \cdot f)(v) = f(v \cdot c^T)$ . On notera  $\phi$  l'isomorphisme utilisé pour identifier  $U$  à son dual.  $U$  est irréductible donc  $V$  aussi.

En effet, on prend  $Z^*$  une sous représentation et  $Z = Z^{**}$ . On va montrer que  $Z$  est une sous représentation de  $U$ . Prenons  $(e_1, \dots, e_l)$  une base de  $Z$  et  $(e_1^*, \dots, e_l^*)$  sa base duale. On complète la base de  $Z^*$  en une base de  $V$  avec des formes linéaires d'une sous représentation de  $V$  supplémentaire de  $Z^*$ . Ainsi on a

$$\forall j > l, c \cdot e_j^* \in \text{Vect}(e_{l+1}^*, \dots, e_n^*).$$

Prenons donc  $c \in A$ ,  $i \leq l$  et  $j > l$ . Alors

$$e_j^*(e_i \cdot g^T) = (g \cdot e_j^*)(e_i) = \sum_{k>l} \lambda_k e_k^*(e_i) = 0.$$

Ainsi on en déduit que  $e_i \cdot g^T \in Z$  donc que  $Z$  est stable sous l'action de  $A$  donc  $Z$  est soit  $U$  soit réduit à 0. Dans les deux cas on en déduit que  $Z^*$  est une sous représentation triviale.

Ceci étant montré on peut donc identifier  $U \otimes_A W$  par le morphisme  $\phi$  à  $U^* \otimes_A W$ . Or  $U^* \otimes_A W = \text{Hom}_A(U, W)$ . Or, celui-ci est soit 0 soit  $\mathbb{C}$  d'après le lemme de Schur d'où le résultat voulu.

Dans le cas où  $U$  n'est pas irréductible, on l'écrit sous la forme  $U = \bigoplus_i U_i^{\oplus n_i}$  avec les  $U_i$  irréductibles deux à deux non isomorphes. On suppose que  $U \otimes_A W$  est non réduit à 0 (le résultat est immédiat sinon). On a  $U \otimes_A W = \bigoplus_i (U_i \otimes_A W)^{\oplus n_i} = \mathbb{C}^{\oplus n_k}$  pour un certains  $k$ . En effet, dans la preuve pour le cas irréductible, on peut voir que le terme  $U_i \otimes_A W$  subsiste si et seulement si  $W$  est isomorphe à  $U_i^*$  (et est alors isomorphe à  $\mathbb{C}$ ) ce qui arrive au plus une fois et arrive au moins une fois car on a supposé que  $U \otimes_A W$  non réduit à 0. Or  $\mathbb{C}^{\oplus n_k}$  est immédiatement irréductible sous l'action de  $B = \bigoplus_j M_{n_j}(\mathbb{C})$ . En effet on peut se restreindre à l'action de  $M_{n_k}$  qui permet étant donné n'importe quel vecteur non nul de  $\mathbb{C}^{\oplus n_k}$  de l'envoyer sur n'importe quel autre vecteur.

Montrons finalement (iii). On sait que  $U = U \otimes_A A$  et que  $A = \bigoplus_i W_i^{\oplus m_i}$  (décomposition de la représentation standard). On peut donc écrire

$$U = \bigoplus_i (U \otimes_A W_i)^{\oplus m_i}$$

qui est bien une décomposition de  $U$  en sous représentation irréductibles de  $B$  d'après (ii). ■

## 6.6 Dualité de Schur-Weyl

Nous allons maintenant pouvoir commencer la démonstration de la dualité de Schur-Weyl telle que décrite dans le théorème 6.2.

### Théorème 6.2 (*Dualité de Schur-Weyl*)

Soit  $V$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  de dimension finie et  $L$  un entier. Les deux actions de  $\mathrm{GL}(V)$  et de  $\Sigma_L$  sur  $U := V^{\otimes L}$  commutent et chacune engendre le centraliseur de l'autre dans  $\mathrm{End} U$ . De plus l'espace  $U$  peut se décomposer sous la forme

$$U = \bigoplus_D \pi_D \otimes \rho_D$$

où la somme  $D$  se fait sur les diagrammes de Young distincts à  $L$  cases et au plus  $\dim V$  lignes. Les  $\pi_D$  (resp  $\rho_D$ ) sont des représentations irréductibles de  $\Sigma_L$  (resp  $\mathrm{GL}(V)$ ) deux à deux non isomorphes. Plus exactement, en notant  $\lambda_D$  la partition de  $L$  associée au diagramme  $D$ , on a  $\rho_D = \mathbb{S}_{\lambda_D} V$ .

Nous avons montré avec la proposition 6.2 que  $U = \bigoplus_i n_i W_i$  avec  $W_i$  des représentations irréductibles de  $\mathrm{GL}(V)$  non isomorphes deux à deux et  $n_i$  le nombre de fois que  $W_i$  apparaît dans la décomposition de  $U$ .

Dans la suite, on donnera parfois les définitions sur les tenseurs purs uniquement. Ces définitions seront à étendre par linéarité à tous les tenseurs.

On définit  $F_i = \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}(V)}(W_i, U)$  et on définit  $q : F_i \otimes W_i \rightarrow U$  par

$$\forall v \otimes u \in F_i \otimes W_i, q(v \otimes u) = v(u).$$

De plus,  $F_i \otimes W_i$  est une représentation de  $\mathrm{GL}(V)$  sous l'action

$$\forall g \in \mathrm{GL}(V), \forall v \otimes u \in F_i \otimes W_i, g \cdot (v \otimes u) = v \otimes (g \cdot u).$$

On note  $Z_i = n_i W_i = W_i^{\oplus n_i} = \bigoplus_j W_i^j$  avec  $W_i^j$  les  $n_i$  copies identiques que  $W_i$ .

### Proposition 6.3

$q$  est un isomorphisme de représentation de  $F_i \otimes W_i^1$  dans  $Z_i$ .

**Démonstration :** Soit  $g \in \mathrm{GL}(V)$ ,  $v \otimes u \in F_i \otimes W_i$ ,

$$g \cdot q(v \otimes u) = g \cdot v(u) = v(g \cdot u) = q(g \cdot (v \otimes u))$$

ce qui montre que  $q$  est bien un morphisme de représentation. Il est immédiatement surjectif car pour tout  $j$  il existe un isomorphisme de représentation de  $W_i^1$  dans  $W_i^j$  qui est donc un élément de  $F_i$ .

Par ailleurs, les deux espaces ont même dimension. En effet, soit  $f_1, \dots, f_{n_i}$  les isomorphismes de représentation de  $W_i^1$  dans  $W_i^j$ . Alors toujours comme conséquence du lemme de Schur,  $F_i = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_{n_i})$ . Ainsi  $q$  est bien injective. ■

La proposition 6.3 permet de réécrire la décomposition de  $U$  sous la forme

$$U = \bigoplus_i F_i \otimes W_i.$$

Or on peut considérer une action de  $\Sigma_L$  sur  $F_i$  en définissant

$$\forall \sigma \in \Sigma, \forall v \in F_i, \forall u \in W_i, (\sigma \cdot v)(u) = \sigma \cdot v(u).$$

En effet l'action de  $\Sigma_L$  commute avec celle de  $\mathrm{GL}(V)$  ce qui préserve  $F_i$  sous l'action définie ci-dessus.

### Proposition 6.4

Pour tout  $i$ ,  $F_i$  est une représentation irréductible de  $\Sigma_L$ . De plus, si  $i \neq j$ , alors  $F_i$  et  $F_j$  ne sont pas isomorphes comme représentation de  $\Sigma_L$ .

**Démonstration :** Soit  $f, g \in F_i$  tous deux non nuls. On veut montrer qu'il existe  $\sigma \in \Sigma_L$  tel que  $f = \sigma \cdot g$  ce qui suffit à montrer que  $F_i$  est irréductible. On note  $X = f(W_i)$  et  $Y = g(W_i)$ . Alors  $X$  et  $Y$  sont deux représentations irréductibles isomorphes à  $W_i$ . Il existe donc un isomorphisme de représentation  $\phi$  de  $X$  vers  $Y$  et comme  $X$  admet un supplémentaire invariant par  $\text{GL}(V)$  dans  $U$ , on peut étendre  $\phi$  en un morphisme de représentation de  $U$  dans  $Y$ . Cet élément  $\phi$  appartient donc au commutant de  $\text{GL}(V)$  qui est engendré par  $\Sigma_L$ . Ainsi  $g^{-1}\phi \circ f$  est un isomorphisme de représentation de  $W_i$  dans  $W_i$  donc d'après le lemme de Schur il existe  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que

$$\phi \circ f = \alpha \cdot g$$

c'est-à-dire

$$f = \alpha \cdot \phi^{-1} \circ g.$$

Montrons maintenant que si  $i \neq j$ , alors  $F_i$  et  $F_j$  ne sont pas isomorphes comme représentation de  $\Sigma_L$ . Supposons qu'il existe  $\psi$  un isomorphisme de représentation de  $F_i$  dans  $F_j$ . On prend  $f \in F_i$  non nul et on pose  $g = \psi(f)$ . On pose  $X = f(W_i)$  et  $Y = g(W_j)$ , alors ce sont deux sous représentations irréductibles non isomorphes donc en particulier en somme directe dans la décomposition de  $U$ . Il est donc possible de trouver  $p$  projection sur  $Y$  qui soit aussi un morphisme de représentation (pour l'action de  $\text{GL}(V)$ ). On a donc  $p(X) = 0$  donc  $p \cdot f = 0$  or

$$0 = \psi(p \cdot f) = p \cdot \psi(f) = p \cdot g = g$$

donc  $\psi = 0$  et les deux représentation de sont pas isomorphes. ■

Cela conclut la démonstration de la dualité de Schur-Weyl entre  $\text{GL}(V)$  et  $\Sigma_L$ . Nous avons réussi à obtenir en plus les représentations qui sont en jeu dans la décomposition donnée par la dualité de Schur-Weyl. Il est cependant possible de pousser plus loin l'étude en cherchant à déterminer par exemple les caractères de ces représentations. On peut également montrer qu'il suffit de se restreindre aux diagrammes avec au plus  $\dim V$  lignes (sinon les représentations associées à un diagramme avec plus de lignes sont réduites à 0).

## 6.7 Lien avec le modèle de Potts

Il est possible de relier l'expression (3.7) de  $Z$  obtenue pour le modèle de Potts à l'aide de la dualité de Schur-Weyl. En effet il existe une dualité entre l'algèbre de Temperley-Lieb et le groupe quantique  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ . Cette dualité quantique (par opposition à la dualité classique qui fait intervenir des algèbres sans paramètres comme  $\Sigma_L$ ) est pour la première fois présentée par Jimbo dans [9]. Celle-ci concerne  $U_q(\mathfrak{gl}(N+1))$  et l'algèbre de Hecke qui est une sorte de déformation de  $\Sigma_L$  obtenue en ajoutant un paramètre dans les relations d'une manière similaire à celle dont  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  est obtenue à partir de  $\mathfrak{sl}_2$ . Quand ce paramètre vaut 1 on retrouve le groupe symétrique.

Il est donc possible de décomposer l'espace sur lequel agit la matrice de transfert  $T$  sous la forme

$$V = \bigoplus_i \mu_i \otimes \nu_i$$

avec  $\mu_i$  (resp  $\nu_i$ ) des représentations irréductibles de  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  (resp  $TL_N(n)$ ) non isomorphes deux à deux. Nous avons déjà étudié les représentations irréductibles de  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ . Il faudrait faire de même pour les représentations de l'algèbre de Temperley-Lieb.

L'étude des représentations irréductibles de  $TL_N(n)$  utilise les mêmes outils que ce pour étudier les représentations du groupe symétrique (c'est-à-dire les tableaux de Young). Cependant nous n'avons plus à notre disposition certains résultats théoriques sur les représentations des groupes finis car les mots de l'algèbre de Temperley-Lieb ne sont pas dotés d'une structure de groupe mais de monoïde (aucun n'est inversible sauf l'identité). Là encore, le fait  $q$  soit ou non une racine de l'unité influe sur la difficulté de la tâche.

Il n'est pas étonnant que les tableaux de Young soient encore utiles car l'algèbre de Temperley-Lieb est en réalité une sorte de restriction<sup>1</sup> de l'algèbre de Hecke qui est une déformation du groupe symétrique. Je n'ai malheureusement pas eu le temps d'étudier les représentations irréductibles de l'algèbre de Temperley-Lieb mais celles-ci sont décrites dans [13].

Revenons à l'expression obtenue pour la trace  $Tr_{n,l}$ . On voit qu'elle s'écrit comme combinaison linéaire des traces sur les  $\nu_{2k}$  (les représentations à exactement  $k$  fils) et que le coefficient  $D_{2k}$  est  $[2k+1]$ . On sent alors que  $V$  va se décomposer comme somme de ces représentations et que la

1. Restriction au sens où il existe une surjection de l'algèbre de Hecke dans l'algèbre de Temperley-Lieb et non pas au sens de l'inclusion.

représentation duale (c'est à dire celle qui apparait en produit tensoriel dans le même terme de la décomposition) de  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  sera une des deux représentations de dimension  $2k + 1$ . Pour bien comprendre la décomposition il faudrait comprendre comment  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  agit sur notre espace et cela peut se faire en repassant sous la représentation du modèle à 6-vertex.

Obtenir par ce moyen l'expression de la trace ne semble pas aisé mais cela permet au moins de voir que le coefficient devant les traces classiques vient de l'action de  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  ce qui n'était a priori pas évident.

## Conclusion

L'étude que nous avons menée permet d'obtenir certaines informations sur la fonction de partition canonique  $Z$  ce qui est une première étape avant d'obtenir des informations précises sur les transitions de phases qui peuvent se produire. Nous avons également vu que parfois une étude simple des symétries du problème peut nous donner la valeur d'un paramètre pour avoir une transition de phase. Il serait intéressant de finir l'étude du lien entre la dualité de Schur-Weyl quantique et l'expression de la fonction de partition canonique. De plus nous nous sommes restreint à l'étude du cas où  $q$  n'est pas une racine de l'unité mais il serait possible de poursuivre l'étude dans le cas général bien que le problème devienne bien plus complexe quand  $q$  est une racine de l'unité.

J'ai eu l'occasion de découvrir de nombreuses autres notions que je n'ai pas développées ici car je ne les ai finalement pas utilisées mais ces elles sont très fortement liés aux sujets que nous avons présentés et elles reviennent souvent dans les livres et articles que j'ai lus : coalgèbre, algèbre de Hopf, équation de Yang-Baxter et matrice  $R$ , algèbre de Hecke etc.

Je n'ai finalement eu le temps que de parcourir un minuscule bout de chemin mais cela m'a cependant permis de mieux comprendre les travaux du Pr. Jacobsen et de sortir de l'opacité totale qui les caractérisait au début de mon stage. Cela m'a permis d'avoir un aperçu de ce que la théorie des représentations (et de manière plus générale les autres notions que je viens de mentionner) peut apporter à la physique statistique. Ces outils mathématiques permettent aussi de mettre à jour des symétries dans le problème physique qui ne sont ni intuitives ni triviales.

## Références

- [1] Olivier Biquard. Algèbre 1, notes de cours, 2011.
- [2] Vjayanthi Chari and Andrew Pressley. *A guide to quantum groups*. Cambridge University Press, 1994.
- [3] William Fulton. *Young Tableaux*. Cambridge University Press, 1997.
- [4] William Fulton and Joe Harris. *Representation theory a first course*. Springer, 1991.
- [5] Roe Goodman and Nolan R. Wallach. *Symmetry, Representations, and Invariants*. Springer, 2004.
- [6] Jesper Jacobsen. Notes de cours sur l'algèbre de temperley-lieb.
- [7] Jesper Jacobsen. Notes de cours sur le modèle de potts.
- [8] Jesper Jacobsen. *Conformal Invariance : an Introduction to Loops, Interfaces and Stochastic Loewner Evolution*, chapter Loop Models and Boundary CFT. Springer-Verlag, 2012.
- [9] Michio Jimbo. A  $q$ -analogue of  $U(\mathfrak{gl}(n+1))$ , hecke algebra, and the yang-baxter equation. *Letters in Mathematical Physics*, 11 :247–252, 1986.
- [10] Christian Kassel. *Quantum Groups*. Springer-Verlag, 1995.
- [11] Christian Kassel, Marc Rosso, and Vladimir Turaev. *Quantum groups and knot invariants*. Société Mathématique de France, 1997.
- [12] Yvette Kosmann-Schwarzbach. *Groupes et symétries. Groupes finis, groupes et algèbres de Lie, représentations*. Les éditions de l'École Polytechnique, 2006.
- [13] Anne Morre. Representation of the temperley-lieb algebra. 2008.
- [14] Hermann Weyl. *The classical groups, their invariants and representations*. Princeton University Press, 1946.