

Instabilités en hydrodynamique : l'exemple de l'effet de la rotation sur les supernovae gravitationnelles

Alix Deleporte

4 septembre 2013

Table des matières

1	De l'espace au laboratoire, la réduction du problème	4
1.1	Le problème originel	4
1.1.1	Vie et mort des étoiles	4
1.1.2	Explosion ou implosion ?	5
1.1.3	L'expérience SWASI	5
2	Les équations différentielles ordinaires (EDO)	7
2.1	Le théorème de Cauchy-Lipschitz	7
2.2	Régularité du flot	8
2.3	Stabilité des points d'équilibre dans le cas autonome en dimension finie	9
2.4	Stabilité des points d'équilibre en général	10
3	Equilibre instable dans SWASI	14
3.1	Le point d'équilibre	14
3.2	Linéarisation autour du point d'équilibre	14
3.3	Stabilité du point d'équilibre	17
4	Stabilité dans les équations aux dérivées partielles	21
4.1	Développements en série entière	21
4.2	Cas des systèmes symétriques	22
4.3	Cas non hyperboliques	23
4.4	Exposants de Lyapunov et EDP symétriques autonomes	24
5	Conclusion	26
A	Codes source des programmes utilisés	27
A.1	Code source du programme permettant de déterminer le spectre en fonction du mode	27
A.2	Code source modifié permettant de suivre l'évolution d'un mode propre donné en fonction du moment cinétique	34
A.3	Code source du programme permettant d'afficher un mode propre calculé	35
B	Références	39

Le soleil était là qui mourait dans l'abîme.
 L'astre, au fond du brouillard, sans vent qui le ranime
 Se refroidissait, morne et lentement détruit.
 On voyait sa rondeur sinistre dans la nuit ;
 Et l'on voyait décroître, en ce silence sombre,
 Ses ulcères de feu sous une lèpre d'ombre.
 Charbon d'un monde éteint ! flambeau soufflé par Dieu !
 Ses crevasses montraient encore un peu de feu
 Comme si par les trous du crâne on voyait l'âme.
 Au centre palpait et rampait une flamme
 Qui par instants léchait les bords extérieurs,
 Et de chaque cratère, il sortait des lueurs
 Qui frissonnaient ainsi que de flamboyants glaives,
 Et s'évanouissaient sans bruit comme des rêves.
 L'astre était presque noir. L'archange était si las
 Qu'il n'avait plus de voix et plus de souffle, hélas !
 Et l'astre agonisait sous ses regards farouches.
 Il mourait, il luttait. Avec ses sombres bouches
 Dans l'obscurité froide il lançait par moments
 Des flots ardents, des blocs rougis, des monts fumants,
 Des rocs tout écumants de sa clarté première :
 Comme si ce volcan de vie et de lumière,
 Englouti par la brume où tout s'évanouit,
 N'eût point voulu mourir sans insulter la nuit
 Et sans cracher sa lave à la face de l'ombre.
 Autour de lui le temps et l'espace et le nombre
 Et la forme et le bruit expiraient, en créant
 L'unité formidable et noire du néant.
 Le spectre Rien levait sa tête hors du gouffre.
 Soudain, du cœur de l'astre, un âpre jet de soufre,
 Pareil à la clameur du mourant éperdu,
 Sortit, clair, éclatant, splendide, inattendu,
 Et, découpant au loin mille formes funèbres,
 Énorme, illumina, jusqu'au fond des ténèbres,
 Les porches monstrueux de l'infini profond.
 Les angles que la nuit et l'immensité font
 Apparurent. Satan, égaré, sans haleine,
 La prunelle éblouie et de ce rayon pleine,
 Battit de l'aile, ouvrit les mains, puis tressaillit
 Et cria : — Désespoir ! le voilà qui pâlit ! —
 Et l'archange comprit, pareil au mâât qui sombre,
 Qu'il était le noyé du déluge de l'ombre ;
 Il reploya ses ailes aux ongles de granit,
 Et se tordit les bras, et l'astre s'éteignit.

Victor Hugo, *Et nox facta est*, VIII

Résumé

Si la description faite par Victor Hugo de la mort de notre étoile ne manque pas de charme, elle souffre néanmoins d'un manque de réalisme évident. L'étude de la fin de vie des étoiles massives (plus que $10 M_{\odot}$), et en particulier du phénomène de *supernova*, a conduit à la création d'un modèle réduit et simplifié, accessible expérimentalement et d'étude numérique aisée, nommé SWASI (Shallow Water Accretion Shock Instability).

L'étude de ce système à échelle réduite non seulement est très instructive physiquement, de par les similarités démontrées, par Blondin & Mezzacappa (2003), entre les phénomènes à l'oeuvre dans le cas réduit et dans le cas réel, mais révèle également toute la richesse mathématique des phénomènes liés aux EDP (Équations aux Dérivées Partielles), et en particulier, ici, des phénomènes d'instabilités.

Qu'est-ce qu'un système instable? Quelles sont les conséquences de/des instabilité(s) de SWASI?

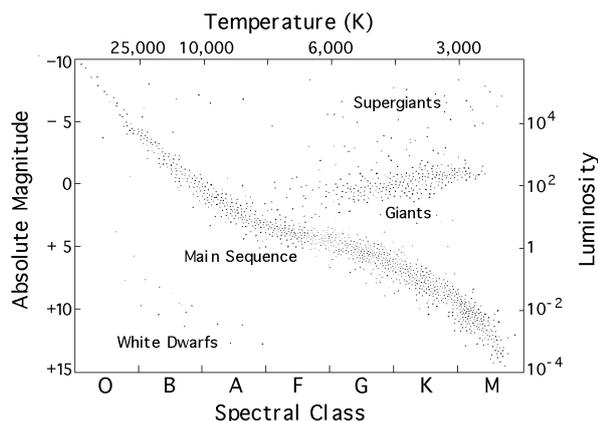


FIGURE 1 – Une classification courante des étoiles. Les étoiles comme le soleil se situent dans la séquence principale (au centre), les étoiles qui nous intéressent sont en fin de vie et se trouvent tout en haut à droite.

1 De l'espace au laboratoire, la réduction du problème

1.1 Le problème originel

L'objet d'étude général de l'équipe de T. Foglizzo concerne la mort des étoiles massives. Pour comprendre ces événements, il faut revenir un peu sur les phénomènes à l'oeuvre à travers la vie d'une étoile.

1.1.1 Vie et mort des étoiles

Qu'est-ce qu'une étoile ? Un corps fluide autogravitant, assez massif pour pouvoir entretenir, en son sein, des réactions autoentretenues de fusion nucléaire. Au moment où une étoile se forme (par contraction d'un nuage de gaz), elle contient surtout de l'hydrogène, constituant majoritaire de la matière habituelle. Au coeur de l'étoile, cet hydrogène se transforme progressivement en hélium ; cette réaction exothermique permet à l'étoile de produire son rayonnement. Lorsque la majeure partie de l'hydrogène est épuisée, l'étoile grossit pour permettre la formation d'éléments plus lourds. Pour les étoiles peu massives (comme le soleil), la pression interne n'est pas suffisante pour générer des éléments lourds, et les réactions nucléaires s'essouffent, entraînant un effondrement de l'étoile sur elle-même pour former un corps inerte, appelé *naine blanche*, qui se refroidit peu à peu. Mais pour les étoiles suffisamment massives, la réaction continue jusqu'à la formation de fer, qui est le plus stable des éléments (sa fusion comme sa fission sont endothermiques). Un coeur de fer inerte se forme alors au coeur de l'étoile. Lorsqu'il devient assez gros, la gravitation en son sein devient assez forte pour vaincre la répulsion électromagnétique ; ce coeur s'effondre alors rapidement sur lui-même pour donner une étoile à neutrons, d'un rayon d'environ 30 km, selon la réaction :



Cette réaction est fortement exothermique, et les neutrinos libérés transmettent leur énergie (par absorption, selon le sens contraire de la réaction 1) aux couches externes de l'étoile. Celles-ci acquièrent alors assez d'énergie pour vaincre l'appel gravitationnel énorme de la neutrinosphère, et l'onde de choc créé par l'effondrement du coeur se propage vers l'extérieur, permettant aux couches supérieures d'être définitivement expulsées. On parle alors de *supernova*.¹

1. Il s'agit ici d'une supernova *gravitationnelle*, à distinguer des supernovae thermonucléaires, issues de l'explosion d'une naine blanche autour de laquelle un disque d'accrétion de gaz d'étoile voisine s'est formé, et dont la pression dépasse la pression limite de dégénérescence électronique.

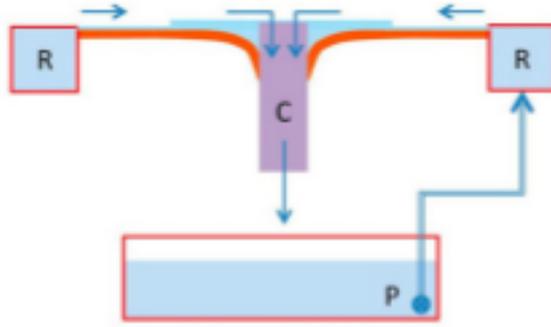


FIGURE 2 – vue en coupe du montage expérimental. Le cylindre central C est réglable en hauteur pour permettre de faire varier le rayon de ressaut (cf supra)

1.1.2 Explosion ou implosion ?

La théorie initiale prédit que les neutrinos transmettent suffisamment d'énergie cinétique aux particules de matière pour leur permettre de fuir l'effondrement, ce qui permettrait l'explosion de l'étoile. Toutefois, en 2001, une meilleure compréhension de la physique des neutrinos a permis une simulation réaliste, avec hypothèse de symétrie sphérique, de l'effondrement d'une étoile de $13 M_{\odot}$. La conclusion de l'étude est que la symétrie sphérique de l'écoulement est incompatible avec une expulsion des couches externes : l'étoile *implose*. Naturellement, les mouvements interstellaires en général ne respectent pas l'hypothèse de symétrie sphérique (les étoiles tournent aussi sur elles-mêmes !), néanmoins, la question d'une potentielle *rupture de symétrie* par instabilité a commencé à être envisagée.

Ces phénomènes sont courants en hydrodynamiques : pour un phénomène aussi simple qu'un écoulement visqueux 2D dans un tuyau aux bords parallèles, la solution stationnaire (avec symétrie axiale) ne persiste expérimentalement que jusqu'à un certain débit, à partir duquel le flot tend à basculer spontanément dans un état asymétrique. De manière générale, les comportements instationnaires en hydrodynamique constatés par chacun, de la météorologie à la convection dans une casserole en passant par les écoulements goutte à goutte, ont été le fer de lance du développement de la théorie du chaos.

Pas de phénomènes irréguliers dominants ici, mais une rupture de symétrie spontanée, appelée SASI (Star Accretion Shock Instability) a été mise en évidence dans les écoulements d'accrétion en 2003. Depuis, de nombreuses simulations numériques sont réalisées pour permettre de mieux appréhender le comportement instable de ces écoulements. Pour mieux comprendre le phénomène, l'équipe de T. Foglizzo a créé un modèle réduit du problème, accessible expérimentalement.

1.1.3 L'expérience SWASI

L'expérience en elle-même consiste en une surface à symétrie axiale, imitant l'attraction gravitationnelle newtonienne créée par un coeur massif ($H_{grav}(r) = -\frac{K}{r^2}$), sur laquelle on fait couler, de l'extérieur vers le centre, de l'eau. Cette expérience est fondée sur l'analogie entre les écoulements compressibles adiabatiques et les écoulements en Shallow Water.

En effet, dans le premier cas, les équations d'Euler s'écrivent sous la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0 \quad (2a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \text{rot } v \times v + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1} + g H_{grav} \right) = 0 \quad (2b)$$



FIGURE 3 – Un exemple typique de ressaut hydraulique : près du point de chute du flot, on a $v > c$, au-delà d'un certain rayon, $v < c$. Les deux zones ont des comportements qualitatifs différents et sont séparées par une nette discontinuité.

Et dans le second cas, le système prend la forme :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \text{div}(H v) = 0 \quad (3a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \text{rot} v \times v + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} + c^2 + g H_{grav} \right) = 0 \quad (3b)$$

$$c^2 = g H \quad (3c)$$

Le système Shallow Water est donc équivalent à un système gazeux avec indice $\gamma = 2$. Ceci ne correspond sans doute pas à la réalité (pour un gaz parfait classique, $\gamma = 4/3$, et pour un gaz ultrarelativiste, $\gamma = 5/3$), mais les similarités sont grandes.

Par ailleurs, on identifiera plus tard la source des instabilités comme étant liée à la propagation d'ondes acoustiques, qui se comportent exactement de la même façon (les vitesses de propagation ont la même expression).

Enfin, les équations en Shallow Water admettent une singularité lorsque $v^2 = g H$, c'est-à-dire lorsque la vitesse des particules dans le flot devient égale à la vitesse de propagation des ondes. Dans l'expérience, dans la partie externe, la hauteur d'eau est très faible, et $v > c$, les ondes ne peuvent alors se propager que *vers l'avant*. Par la suite, $v < c$, et les ondes peuvent également remonter le sens du courant. Toutefois, ces ondes restent bloquées au rayon limite où $v = c$. Dans SWASI, le rayon de ressaut hydraulique est fixé a priori en modifiant la hauteur d'un cylindre à l'intérieur. Ce ressaut reproduit essentiellement le choc qui se propage après l'effondrement du coeur.

Il a été démontré d'une part que, dans le cas où le flot entrant n'a pas de moment cinétique, les instabilités exhibées dans SWASI sont très similaires aux instabilités de SASI. D'autre part, il est vraisemblable que ces phénomènes soient la cause principale de l'expulsion des couches externes de l'étoile, car le système rendu instable peut alors emmagasiner assez d'énergie en provenance des neutrinos pour permettre au front du choc d'avancer.

2 Les équations différentielles ordinaires (EDO)

Dans cette section, on étudie le cas des instabilités dans les équations différentielles ordinaires, où n'apparaissent que des dérivées selon une variable. On dispose dans ce cas du théorème de Cauchy-Lipschitz, qui assure un comportement régulier des solutions de l'équation; ceci permet de justifier la linéarisation de l'équation autour des points d'équilibre, et rend l'étude des instabilités particulièrement aisée.

2.1 Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Théorème 1. Soit E un espace de Banach, I et Ω des ouverts connexes respectivement de \mathbb{R} et de E , et $f : I \times \Omega \rightarrow E$ une application continue, localement lipschitzienne par rapport à sa première variable. Soit $(y_0, t_0) \in \Omega \times I$ une donnée initiale. Alors le problème de Cauchy :

$$y' = f(t, y) \tag{4}$$

$$y(t_0) = y_0 \tag{5}$$

a une unique solution dans $C^1([t_0, T], \Omega)$, pour un T assez petit.

Preuve : On commence par prouver un résultat plus fort, dont on déduira le cas général par troncature :

Théorème 2. Avec les mêmes notations, supposons que f soit globalement lipschitzienne en sa deuxième variable, alors le problème de Cauchy a une unique solution dans $C^1(I, \Omega)$.

On remarque immédiatement qu'il suffit de démontrer le théorème dans le cas où I est borné; si I n'est pas borné, il suffit de le recouvrir par des intervalles ouverts bornés, et de recoller les solutions en utilisant l'unicité.

Pour démontrer ce théorème, on commence par reformuler le problème de Cauchy en :

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds =: \Psi(y)(t) \tag{6}$$

où $\Psi : C^0(J, \Omega) \rightarrow C^1(J, \Omega)$ pour tout $t_0 \in J \subset I$.

Il suffit maintenant de choisir J pour que Ψ soit contractante : si la constante de Lipschitz de f est K_f , alors il suffit $\text{diam}(J) < 1/K_f$. L'application du théorème de Picard assure l'existence et l'unicité sur J . En choisissant $t'_0 \in J$, différent de t_0 , on peut réappliquer le résultat, et recouvrir I par des intervalles ouverts de diamètre inférieur à $1/K_f$. ■

On peut maintenant passer à la preuve du cas général; si f est localement lipschitzienne, soit $J \times A$, voisinage de (t_0, y_0) dans $I \times \Omega$, tel que f soit lipschitzienne en sa deuxième variable sur $J \times A$, de constante K_f , et que f soit localement bornée sur $J \times A$, bornée par M . Sans perte de généralité, on suppose par ailleurs que $\text{diam}(J) < \min(1/K_f, \text{dist}(^cA, y_0)/2M)$. Alors, l'application $\tilde{f} = f\theta(t, y)$, où θ est une fonction de troncature qui vaut 1 si $\text{dist}(y, y_0) < \text{dist}(^cA, y_0)/2$ et si $\text{dist}(t, t_0) < \text{dist}(^cJ, t_0)$, et qui vaut 0 en-dehors de $J \times A$, est globalement lipschitzienne, et on peut lui appliquer le théorème précédent. La solution y , a priori dans $C^1(\tilde{J} \times \Omega)$, vérifie le problème de Cauchy pour f , puisque $|y - y_0| < \text{dist}(^cA, y_0)$ sur \tilde{J} , donc $y \in C^1(J \times A)$, domaine où f et \tilde{f} sont identiques. ■

Il est important de noter qu'une solution globale n'existe pas en général, dans le cas localement lipschitzien, comme le prouve l'examen de l'équation $y' = -y^2$, dont la solution explose en temps fini; néanmoins, on peut définir un temps maximal d'existence : un intervalle $[t_0, T_{\max}[$, au terme duquel la solution sort de tout compact.

2.2 Régularité du flot

Une conséquence intéressante de Cauchy-Lipschitz est le *théorème du flot* :

Théorème 3. Avec les notations du théorème précédent, on appelle *flot* l'application, localement définie, $\Phi : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$, qui à (t_1, y_0) associe $y(t_1)$, où y est l'unique solution associée à $y' = f(y, t)$ et $y(t_0) = y_0$.

Alors Φ est continue et lipschitzienne en ses deux variables.

Preuve : On commence par prouver un résultat très important, appelé *lemme de Grönwall* :

Lemme 1. Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $t_0 \in I$. On se donne trois fonctions $u, f, g \in C^0(I, \mathbb{R}^+)$ telles que :

$$u(t) \leq f(t) + \left| \int_{t_0}^t g(s) u(s) ds \right| \quad (7)$$

sur I Alors u vérifie :

$$u(t) \leq f(t) + \int_{t_0}^t f(s) g(s) e^{\int_s^t g(u) du} ds \quad (8)$$

pour $t \geq t_0$.

Pour démontrer ce premier résultat, on suppose sans perte de généralité que f est de classe C^1 (on peut approcher f dans C^0 par une suite décroissante de fonctions C^1), et on considère le problème de Cauchy :

$$y'(t) = f'(t) + g(t) y(t) \quad (9)$$

$$y(t_0) = f(t_0) \quad (10)$$

dont la solution sur I est notée u_0 . On sait alors que $u' \leq u'_0$ pour $t \geq t_0$, par (7), d'où $u(t) \leq u_0(t)$ pour tout $t \geq t_0$. Par ailleurs, en notant $v(t) = f(t) + \int_{t_0}^t f(s) g(s) e^{\int_s^t g(u) du} ds$, on a :

$$\begin{aligned} v'(t) &= f'(t) + f(t) g(t) + \int_{t_0}^t f(s) g(s) g(t) e^{\int_s^t g(u) du} ds \\ &= f'(t) + g(t) \left[f(t) + \int_{t_0}^t f(s) g(s) e^{\int_s^t g(u) du} ds \right] \\ &= f'(t) + g(t) v(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Ainsi, par le théorème de Cauchy-Lipschitz, $v = u_0$, d'où $u \leq v$, ce qui prouve le résultat. ■

Une conséquence directe, et importante, du lemme de Grönwall est :

Proposition 1. On se place dans le cadre du théorème de Cauchy-Lipschitz global, et on note L la constante de Lipschitz de f . Soit x et \hat{x} deux solutions du problème de Cauchy sur I , de données initiales x_0 et \hat{x}_0 au temps t_0 . Alors on a l'estimation de croissance suivante :

$$\forall t \in I, \|x(t) - \hat{x}(t)\| \leq e^{L|t-t_0|} \|x_0 - \hat{x}_0\| \quad (12)$$

Ce résultat est déjà un bon indice de *stabilité* : deux solutions différentes ne peuvent pas diverger trop vite, on dispose d'un excellent contrôle sur leur écart à tout instant. Ce résultat est aisément généralisable au cas localement lipschitz, mais le contrôle de la divergence est alors évidemment *local*.

La proposition 1 est la première étape de la démonstration du théorème 3; en effet, dans le cas globalement Lipschitz, le flot (qu'on sait déjà continu par rapport à sa variable temporelle) est alors continu (et même lipschitzien) par rapport à sa variable spatiale. Le théorème 3 est alors démontrée dans le cas global.

La preuve du cas local est plus technique car le flot n'est pas défini partout. Toutefois,

Proposition 2. *Soit $t_0 \in I$ fixé, à $x_0 \in \Omega$ on associe J_{x_0} l'intervalle maximal d'existence d'une solution partant de (x_0, t_0) (obtenu par prolongement petit à petit des solutions locales). Alors l'ensemble $D = \{J_x \times \{x\}, x \in \Omega\}$ est un ouvert; autrement dit, le domaine de définition du flot est ouvert.*

On voit facilement que cette proposition suffit à la preuve du théorème 3 : si $x_0 \in \Omega$, si J est un voisinage compact de t_0 dans J_{x_0} et si V voisinage de du graphe de $\Phi(x_0, t), t \in J$ dans $\mathbb{R} \times \Omega$ est choisi pour que f soit lipschitzienne en sa deuxième variable et bornée sur V , alors on peut supposer que V est inclus dans le domaine de définition du flot, et le flot est alors lipschitzien en sa variable spatiale sur V (par Grönwall). La lipschitzianité par rapport à la variable temporelle est, quant à elle, assurée par la bornitude de f .

Il reste à montrer que D est ouvert. On sait que le graphe K de $x(t)$ solution dans J du problème de Cauchy avec $x(t_0) = x_0$, est compact. Pour $\epsilon > 0$ donné, soit A_ϵ le ϵ -voisinage fermé de K dans $I \times \Omega$ muni de la distance $\max(\|\cdot\|_E, |\cdot|)$, et soit $B_\epsilon = \{(t, x) \in I \times \Omega, \|x - \Phi(t_0, x_0, t)\| \leq \epsilon\}$. On a $B_\epsilon \subset A_\epsilon$, et pour ϵ assez petit, $A_\epsilon \subset V$ (car K est compact, donc $\text{dist}(K, {}^c V) \neq 0$). On va montrer que pour r assez petit, pour $x \in B(x_0, r)$, la solution du problème de Cauchy partant de x reste dans B_ϵ dans tout J . Si X est l'ensemble des temps où la trajectoire est dans B_ϵ , X est fermé (par continuité de la trajectoire et par fermeture de B_ϵ), et X est ouvert si r est assez petit, car si $t \in X, t \geq t_0$ (pour les temps négatifs il suffit de transformer t en $-t$ et f en $-f$), alors, par Grönwall (f est globalement lipschitzienne sur V !), comme J est borné, si r est assez petit, $(t, \phi(t_0, x, t)) \in \hat{B}_\epsilon$, et en appliquant Grönwall une deuxième fois à partir de t , on reste dans B_ϵ encore un certain temps. Comme de plus X est non vide en supposant $r \leq \epsilon$, on en déduit que $X = J$, ce qui permet de conclure. ■

Remarque 1. – *Il existe une version plus puissante de ce théorème, qui assure que, si f est de classe C^p , alors le flot est de classe C^p , c'est un bon exemple du comportement "idéal" des équations différentielles ordinaires.*

– *En général (hors du cadre particulier des EDO), on dit que le problème de Cauchy est "bien posé" lorsqu'il vérifie un critère d'existence et d'unicité locales (comme dans le théorème 5), et lorsque le flot est assez régulier. C'est la régularité du flot qui est importante, parce que c'est elle qui détermine la stabilité locale, qui garantit qu'on puisse approximer le système par discrétisation (ce qui est nécessaire dans le cadre des simulations numériques), et parce que c'est elle qui fait défaut dans le cas général pour les EDP (cf supra).*

En conclusion, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure, pour les équations différentielles ordinaires, une certaine forme de stabilité *locale*, puisque les solutions des équations ne peuvent pas diverger entre elles trop vite (par le lemme de Grönwall), ni se comporter de manière trop irrégulière (par le théorème du flot); cette stabilité est assurée par des conditions de régularité locales.

2.3 Stabilité des points d'équilibre dans le cas autonome en dimension finie

On considère une application $f : E \rightarrow E$, qui soit de classe C^1 . On imagine un point y_s , tel que $f(y_s) = 0$. Une application directe du théorème de Cauchy-Lipschitz montre

qu'alors, si y est une solution de $y' = f(y)$, et qu'à un certain instant t_0 , on a $y(t_0) = y_s$, alors $y \equiv y_s$ sur \mathbb{R} , on dit que y_s est un *point d'équilibre*.

On a, si h est un vecteur colonne de dimension p , $f(y_s + h) = Mh + O(\|h\|^2)$, où $M \in M_p(\mathbb{R})$. On se propose de montrer, dans les deux sections qui suivent, qu'à part dans des cas dégénérés, le comportement des solutions de l'équation différentielle au voisinage du flot dépend essentiellement de M . Dans ce paragraphe, on étudie les systèmes linéaires autonomes en dimension finie, pour se donner une intuition du problème.

On suppose que M est non nul; alors, dans un voisinage de y_s , on peut écrire $z' = Mz$, où $z \approx y - y_s$. Il suffit donc d'étudier le comportement de l'équation $z' = Mz$, comportement qui ne dépend que de la classe de similitude de M .

1. Si M est diagonalisable (dans \mathbb{C}), càd $M = P^{-1}DP$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, alors l'équation s'écrit $u' = Du$, avec $u = Pz$, et si $u(0) = (u_1, \dots, u_p)$, alors $u(t) = (u_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, u_p e^{\lambda_p t})$. On constate alors immédiatement que, pour que u reste dans un voisinage de 0, il est nécessaire que $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$ pour tout i , et suffisant que $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ pour tout i .
2. Si M n'est pas diagonalisable, les comportements sont plus complexes mais la condition spectrale sur M reste la même : s'il existe $v \in \mathbb{R}^p$ avec $Mv = \lambda v$, $\lambda > 0$, alors la condition initiale $z(0) = v$ tend à s'éloigner de zéro. Le cas de deux valeurs propres complexes conjuguées est similaire : si u et v sont deux vecteurs réels tels que, restreint dans la base (u, v) , M s'écrit $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, avec $a > 0$, alors au moins une solution sort du voisinage.
3. Par ailleurs, généralement, on peut écrire $z(t) = e^{tM} z(0)$; ainsi, si M ne possède que des valeurs propres négatives, $\text{Re}(\text{Sp}(M)) \in]-\infty, a]$, avec $a < 0$, donc $\|e^{tM}\| < 1$, et toutes les solutions de l'équation se rapprochent de 0.

Le cas où une valeur propre est de partie réelle nulle est dégénérée, soit parce que la donnée du spectre de M ne suffit pas, car $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est stable et $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est instable, soit, dans le cas où la linéarisation n'est qu'une approximation, parce que l'évolution de z est telle qu'il ne s'approche ni ne s'éloigne de 0, auquel cas, aux temps longs, le comportement du système est gouverné par les termes de reste. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est un cas typique.

Ceci mène à la définition d'une autre forme de stabilité : celle-ci est définie par le fait que, si une donnée initiale est proche d'un point d'équilibre, elle reste proche de ce même point par l'avenir. Dans le cas de la dimension finie, on dispose d'un critère satisfaisant (car il est simple à vérifier, et car c'est un critère local) sur f pour déterminer si le système vérifie ce critère. Le spectre de la linéarisée de f autour d'un point d'équilibre est un objet d'étude important de la physique en général.

2.4 Stabilité des points d'équilibre en général

Ces conditions spectrales se généralisent pour les systèmes non-linéaires :

Théorème 4. *Avec les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, dans le cas où f ne dépend pas de sa seconde variable, soit y_s un point d'équilibre. On dit que y_s est stable si pour tout voisinage V de y_s , il existe $U \subset V$ voisinage de y_s tel que, pour tout $y_0 \in U$, la solution de $y' = f(y)$ vérifiant $y(0) = y_0$ reste dans V pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.*

Soit df la différentielle de f au point y_s , alors une condition nécessaire pour que y_s soit stable est $\text{Sp}(df) \in \{x \in \mathbb{C}, \Re(x) \leq 0\}$, et une condition suffisante est $\text{Sp}(df) \in \{x \in \mathbb{C}, \Re(x) < 0\}$

Preuve : on commence par un petit lemme technique d'algèbre linéaire :

Lemme 2. Soit E un \mathbb{R} -ev de dimension finie, u un endomorphisme de E . Alors il existe E_- et F , sev supplémentaires de E , $\alpha > 0$, et un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur E tels que

- E_- et F sont orthogonaux;
- $\forall x \in E_-, \langle u(x), x \rangle \leq -2\alpha \langle x, x \rangle$
- $\forall x \in F, \langle u(x), x \rangle \geq -\alpha \langle x, x \rangle$

Ce lemme est trivial dans le cas où u est diagonalisable ; essayons d'en adopter la preuve au cas général. On commence par déterminer les sous-espaces : si $\chi_u = P_-Q$, où P_- a toutes ses racines de partie réelle strictement négative et Q toutes ses racines de partie réelle négative ou nulle, alors $E_- = \text{Ker}P_-(u)$ et $F = \text{Ker}Q(u)$ sont supplémentaires. Soit maintenant μ est la partie réelle négative de racine la plus proche de zéro. Trigonalisons u dans une base de \mathbb{C}^n . Les éléments surdiagonaux sont aussi petits que l'on veut, car si (e_1, \dots, e_n) est une base de trigonalisation, $(e_1, C^{-1}e_2, \dots, C^{-n+1}e_n)$ l'est aussi, et tous les éléments surdiagonaux ont été réduits au moins d'un facteur C . Supposons donc que tous les éléments surdiagonaux sont plus petits (en module) que ϵ . Pour $x \in E_-$, on a alors, avec (\cdot, \cdot) le produit scalaire canonique dans la base de trigonalisation,

$$\forall x \in E_-, \Re(u(x), x) \leq (\mu + n\epsilon)\Re(x, x)$$

Posons ainsi $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E_-} = \Re(\cdot, \cdot)$, et choisissons $\alpha < -\frac{\mu}{2}$. On a ainsi :

$$\forall x \in E_-, \langle u(x), x \rangle_{E_-} \leq -2\alpha \langle x, x \rangle_{E_-}$$

En appliquant ce qu'on vient de construire à $-u - \theta Id$, où $\theta > 0$, on construit $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ qui vérifie :

$$\forall x \in F, \langle -u(x) - \theta x, x \rangle_F \leq -2\gamma \langle x, x \rangle_F$$

et ce pour tout $\gamma < \theta/2$. Il suffit alors de choisir $\theta - 2\gamma \leq \alpha$, et de poser :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \Pi_{E_-}(\cdot), \Pi_{E_-}(\cdot) \rangle_{E_-} + \langle \Pi_F(\cdot), \Pi_F(\cdot) \rangle_F$$

où Π_{E_-} et Π_F sont les projecteurs adaptés à E_- et F .

Muni de ce lemme, on va commencer par démontrer la condition suffisante, on va donc supposer que $Sp(df) \in \{\Re x < 0\}$. Le produit scalaire adapté à df , provenant du lemme précédent vérifie donc, pour tout $x \in E$, $\langle df(x), x \rangle \leq -2\alpha \langle x, x \rangle$.

On va montrer que la solution reste confinée à l'intérieur de toute boule associée à ce produit scalaire, centrée autour du point d'équilibre (qui est nul sans perte de généralité). Si $x_0 \in B$ et $x(t)$ est solution du problème de Cauchy partant de x_0 , soit T_+ le temps d'existence maximal d'une solution. Il s'agit alors de montrer que $T_+ = +\infty$, et que la solution reste dans B . On sait d'ores et déjà que $T_+ > 0$, et que la solution reste dans la boule pendant un certain intervalle de temps (par continuité). Si $X = \{t \in]0, T_+[, x(t) \text{ est défini et } \forall t' < t, x(t') \in B\}$, X est donc non vide. Posons alors $\phi(t) = \langle x(t), x(t) \rangle$, alors ϕ vérifie $\phi'(t) \leq -2\alpha\phi(t)$. Ainsi, X est ouvert : si $\tau \in X$, alors pour $t < \tau$, $\phi(t) \leq \phi(0)e^{-2\alpha t}$, donc, en passant à la limite, $|x(\tau)| \leq e^{-\alpha\tau}|x_0|$, en particulier $x(\tau) \in B$, et $x(t)$ reste dans B sur un voisinage de τ , ce qui montre que X est un ouvert de $]0, T_+[$.

Par ailleurs, si τ_n est une suite croissante de X , qui converge vers $\tau \in]0, T_+[$, l'estimation sur ϕ montre que $\tau \neq T_+$ (dans le cas contraire, la solution sortirait du compact avant τ , car une solution confinée à un compact a un temps d'existence infini, car f est alors globalement lipschitzienne), donc $x(\tau)$ est défini, et en passant à la limite, $|x(\tau)| \leq e^{-\alpha\tau}|x_0|$ donc $\tau \in X$.

X est donc ouvert et fermé dans le connexe $]0, T_+[$, donc $X =]0, T_+[$. On déduit de cela que la solution reste dans le compact B pendant tout son temps d'existence, ce qui est absurde, à moins que celui-ci soit infini. Ceci prouve la première partie du théorème.

Pour montrer la seconde partie du théorème, on commence par appliquer la décomposition trouvée plus haut à $-df$, pour obtenir que E_- est non vide, avec, pour tout $x \in E_-$, $\langle df(x), x \rangle \geq 2\alpha \langle x, x \rangle$.

On pose alors $V(x) = |\Pi_{E_-}(x)| - |\Pi_F(x)|$, et $\Omega = \{V(x) > 0\}$. Ω est non vide et contient $E_- \setminus \{0\}$. Comme de plus $f(x) = df(x) + o(x)$, si B est une boule centrée en zéro telle que $|f(x) - df(x)| < \alpha/4$, on a $dV(x)(f(x)) > 0$ sur $B \cap \Omega$.

Supposons maintenant par l'absurde que x_0 est stable. Par définition, si U est un voisinage de x_0 , il existe $x_0 \in U' \subset U$, tel que la trajectoire issue de tout point de U' reste dans U . L'intersection $\Omega \cap U'$ est alors non vide car $x_0 \in \partial\Omega$, soit a dans cette intersection, qu'on va considérer comme la donnée initiale d'une solution $x(t)$. On va considérer $X = \{\tau > 0, \forall t \in [0, \tau], x(t) \in \Omega\}$. X est non vide et ouvert dans $[0, +\infty[$ par continuité de $x(t)$. Si maintenant $\phi(t) = V(x(t))$, on a toujours, si $\tau \in X, \forall t \in [0, \tau], \phi'(t) > 0$, donc en particulier $\phi(\tau) > \phi(0) > 0$. Ainsi, si, plus généralement, $\tau_n \in X$ croissante converge vers $\tau \in]0, +\infty[$, $x(\tau) \in \bar{\Omega}$, mais aussi, par passage à la limite, $\phi(\tau) \geq \phi(0) > 0$, donc $x(\tau) \in \Omega$, donc X est fermé. Par connexité, X est exactement l'ensemble de définition maximal de $x(t)$. Ainsi, la solution reste confinée à Ω , mais aussi à U , par hypothèse de stabilité, donc reste dans le compact $\bar{U} \cap \tilde{\Omega}$, avec $\tilde{\Omega} = \{V(x) \geq V(a)\}$, ce qui implique que le temps d'existence est infini (sur le compact, f est globalement lipschitzienne). En tant que compact, la fonction $dV(x)(f(x))$ admet un minimum, non nul (puisque $\bar{U} \cap \tilde{\Omega} \subset \Omega$). Ainsi, $\phi'(t) \geq \epsilon > 0$ sur \mathbb{R} , ce qui est incompatible avec le confinement dans une boule. ■

L'outil important utilisé dans cette démonstration est le *potentiel*, élément essentiel de la théorie de stabilité de Lyapunov. En fait, on peut reformuler et généraliser le théorème précédent d'une manière qui fait mieux ressortir cet aspect :

Théorème 5. *Si $x' = f(x)$, avec f C^1 , est un système différentiel en dimension d , dont x_0 est un point d'équilibre, alors :*

1. *S'il existe $V \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, et B une boule ouverte centrée en x_0 tels que :*
 - x_0 est un minimum strict de V sur B ;
 - $\forall x \in B, dV(x)(f(x)) \leq -\alpha(V(x) - V(0))$*Alors x_0 est stable.*
2. *S'il existe $V \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, B une boule ouverte centrée en x_0 , et Ω un ouvert de \mathbb{R}^d tels que :*
 - $V > 0$ sur Ω ;
 - $V = 0$ sur $\partial\Omega$
 - $x_0 \in \partial\Omega$
 - $\forall x \in \Omega \cap B, dV(x)(f(x)) > 0$*Alors x_0 est instable (toute donnée initiale dans $B \cap \Omega$ diverge)*

Ces théorèmes ont un sens physique assez clair : selon que, pour un certain potentiel, le système $x' = f(x)$ soit attractif ou répulsif, on aura de la stabilité ou non.

Le seul point faible de cette théorie est qu'elle est valable *en dimension finie*. En dimension infinie, des problèmes topologiques évidents apparaissent. En particulier, on s'est servi de la compacité des boules pour assurer un temps d'existence infini aux solutions confinées ; cet argument n'est plus valide dans le cadre de la dimension infinie et il faut supposer *a priori* un temps d'existence infini, par globale-Lipschitzianité de f , le plus souvent. On peut alors adapter la preuve du théorème de stabilité ; le théorème d'instabilité requiert encore une condition plus forte que $dV(x)(f(x)) > 0$. On peut par exemple énoncer le théorème suivant :

Théorème 6. *Si $x' = f(x)$, avec f C^1 , est un système différentiel sur un Banach E , dont x_0 est un point d'équilibre :*

1. *S'il existe $V \in C^1(E, \mathbb{R})$, et B une boule ouverte centrée en x_0 tels que :*
 - x_0 est un minimum strict de V sur B ;
 - $\forall x \in B, dV(x)(f(x)) \leq -\alpha(V(x) - V(x_0))$

Alors x_0 est stable.

2. *S'il existe $V \in C^1(E, \mathbb{R})$, B une boule ouverte centrée en x_0 , et Ω un ouvert de E tels que :*

- $V > 0$ sur Ω ;

- $V = 0$ sur $\partial\Omega$

- $x_0 \in \partial\Omega$

- $\forall x \in \Omega \cap B$, $dV(x)(f(x)) > \alpha\|x - x_0\|$

Alors x_0 est instable (toute donnée initiale dans $B \cap \Omega$ diverge)

Toutefois, en dimension infinie, le lien avec la différentielle n'est pas si clair, ne serait-ce que parce que le spectre d'un opérateur n'est plus une donnée claire, des travaux actuels ont lieu dans cette optique.

3 Equilibre instable dans SWASI

Dans cette section, on illustre par l'exemple de SWASI des techniques habituelles d'étude "physique" d'un système différentiel : recherche des états stationnaires et examen de leur stabilité par linéarisation de l'équation.

3.1 Le point d'équilibre

On cherche à trouver une solution stationnaire de 3. Les équations se réécrivent :

$$\operatorname{div}(H v) = 0 \quad (13a)$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} v \times v + \overrightarrow{\operatorname{grad}} \left(\frac{v^2}{2} + c^2 + g H_{grav} \right) = 0 \quad (13b)$$

On fait l'hypothèse d'une solution qui est *invariante par rotation* : ni H ni \vec{v} ne dépendent de θ . Cette hypothèse est fondée sur l'invariance du système par rotation.

La composante selon u_θ de 13b nous donne alors $\operatorname{rot} v = 0$, soit $rv_\theta = C$, constante, qu'on pose égale à $L/2\pi$, en assimilant L à un moment cinétique par élément de masse. (Physiquement, le flot est injecté avec un certain moment cinétique, qui se retrouve dans cette équation.)

L'autre invariant du système est donné par 13a : on a $rv_r H = C$, constante, qu'on pose égale à $-Q/2\pi$, où Q est un débit volumique (c'est simplement le débit d'entrée).

Il suffit alors de reporter l'expression de v_θ et de H dans 13b pour obtenir une équation différentielle portant sur v_r . On obtient :

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{\frac{L^2}{16\pi^2 r^3} - \frac{gQ}{2\pi r^2 v_r} - g \frac{\partial H_{grav}}{\partial r}}{v_r + \frac{gQ}{2\pi r^2 v_r^2}} \quad (14)$$

Comme prédit, cette équation admet une singularité lorsque $v_r = c$. Pour des raisons de simplicité, lors des simulations numériques, on se contente de calculer le comportement du système en aval du ressaut, dans la zone où le flot est subsonique.

Les équations aux limites utilisées sont :

$$H_1 v_1 = H_s v_s \quad (15a)$$

$$\frac{1}{2} v_1^2 + g H_1 = \frac{1}{2} v_{sh}^2 + g H_{sh} \quad (15b)$$

où l'indice 1 est donné aux variables en amont du choc, et l'indice sh est donné aux variables en aval.

Dans le domaine où $v < c$, l'équation 14 tombe sous la coupe du théorème de Cauchy-Lipschitz qui assure que la solution sera régulière, ce qui permet d'intégrer l'équation numériquement - une solution analytique à ce problème sort du cadre de cet exposé.

Cette équation est intégrée par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, qui assure une erreur cumulée en $O(h^4)$, où h est le pas d'intégration. On intègre du rayon de choc r_{sh} au rayon interne r_0 , en découpant l'intervalle d'intégration en 400 points.

3.2 Linéarisation autour du point d'équilibre

Il faut maintenant linéariser les équations autour du point d'équilibre. On va donc supposer qu'à la solution constante $(v_r(r), v_\theta(r), H(r))$, on ajoute des petites variations. Plutôt que d'exprimer le problème en fonction de ses variables de départ, on choisit des

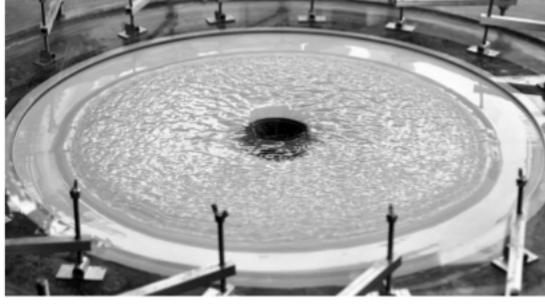


FIGURE 4 – Une photo du dispositif expérimental dans le cas où le point d'équilibre à symétrie axiale est stable.

variables dont le contenu physique est plus pertinent, pour que l'expression du système différentiel soit simplifiée : on pose :

$$\delta f = v_r \delta v_r + \frac{L}{2\pi r} \delta v_\theta + g \delta H \quad (16a)$$

$$\delta h = \frac{\delta v_r}{v_r} + \frac{\delta H}{H} \quad (16b)$$

δf représente donc la variation infinitésimale d'énergie.

Le système d'équations utilisé, provenant de 3, est invariant par rotation ou par translation dans le temps. Dans la limite d'une équation linéarisée, on peut procéder par *analyse de Fourier* : si $f(r, \theta, t)$ est solution, alors $f(r, \theta + \theta_c, t)$ est solution pour tout θ_c , donc par linéarisation, $F_m(r, \theta, t) = \int_0^{2\pi} f(r, \theta + \theta_i, t) e^{im\theta_i} d\theta_i$ est également solution du système linéarisé, et vérifie $F_m(r, \theta, t) = F_m(r, 0, t) e^{-im\theta}$. Par ailleurs, sous des conditions de borne L^2 sur les solutions, on peut reconstruire facilement la solution initiale à partir de la donnée des F_m . Ainsi, le comportement du système est guidé par le comportement des solutions dont la dépendance en θ est sinusoïdale.

On peut appliquer la même transformée de Fourier par rapport à t . On se retrouve donc à résoudre un problème dont seule la dépendance en r est non-triviale : les variations s'écrivent, par exemple : $\delta H(r, \theta, t) = \text{Re}(\delta H(r) e^{i(m\theta - \omega t)})$, où m est un entier et où ω est complexe.

Le système linéarisé s'écrit alors, en notant $Fr = \frac{v}{c}$:

$$\frac{\partial \delta f}{\partial r} = \frac{L}{2\pi r^2 v_r} (i\omega r \delta v_\theta - im \delta f) + \frac{i\omega v_r}{1 - Fr^2} \left(\delta h - \frac{\delta f}{c^2} + \frac{L}{2\pi r^2 c^2} r \delta v_\theta \right) \quad (17a)$$

$$\frac{\partial \delta h}{\partial r} = \frac{i\omega - \frac{imL}{r^2}}{v_r(1 - Fr^2)} \left(\frac{\delta f}{c^2} - Fr^2 \delta h - \frac{L}{2\pi r^2 c^2} r \delta v_\theta \right) - \frac{im}{r^2 v_r} r \delta v_\theta \quad (17b)$$

$$\frac{\partial r \delta v_\theta}{\partial r} = \frac{1}{v_r} (i\omega r \delta v_\theta - im \delta f) + \frac{im v_r}{1 - Fr^2} \left(\delta h - \frac{\delta f}{c^2} + \frac{L}{2\pi r^2 c^2} r \delta v_\theta \right) \quad (17c)$$

Lorsque les équations sont mises sous cette forme, on voit apparaître un invariant,

$$\delta K = i\omega r \delta v_\theta - im \delta f \quad (18)$$

En effet, cette variable vérifie :

$$\frac{d \delta K}{dr} = \frac{i}{v_r} \left(\omega - \frac{imL}{2\pi r^2} \right) \delta K \quad (19)$$

Equation qui s'intègre facilement. Numériquement, cette identité a servi à tester la validité de l'algorithme d'intégration utilisé.

On peut donc intégrer les équations 17 en se servant des conditions aux limites au niveau du ressaut. Dans le cas non stationnaire, les équations 15 se réécrivent en :

$$H_1(v_1 - v_s) \cdot \mathbf{n} = H_{sh}(v_{sh} - v_s) \cdot \mathbf{n} \quad (20a)$$

$$v_1 \cdot \mathbf{t} = v_{sh} \cdot \mathbf{t} \quad (20b)$$

$$\frac{1}{2}((v_1 - v_s) \cdot \mathbf{n})^2 + gH_1 = \frac{1}{2}((v_{sh} - v_s) \cdot \mathbf{n})^2 + gH_{sh} \quad (20c)$$

$$\mathbf{n} = \left(1, -\frac{1}{r_s} \frac{\partial r_s}{\partial \theta} \right) \quad (20d)$$

$$\mathbf{t} = \left(\frac{1}{r_s} \frac{\partial r_s}{\partial \theta}, 1 \right) \quad (20e)$$

où v_s est la vitesse du choc, r_s est le rayon du choc, et \mathbf{n} et \mathbf{t} sont les vecteurs normal et tangent à la surface du choc.

En considérant des petites perturbations de ces équations, et avec $r_s = \Delta\zeta$, on obtient :

$$i\omega H_1 \Delta\zeta - imH_1 \Delta\zeta \frac{L}{2\pi r_{sh}} + \Delta\zeta \frac{d(H_1 v_{r,1})}{dr} = H_{sh} v_{r,sh} \delta h_{sh} + i\omega H_{sh} \Delta\zeta \frac{L}{2\pi r_{sh}} - imH_{sh} \Delta\zeta \frac{L}{2\pi r_{sh}} + \Delta\zeta \frac{d(H_{sh} v_{r,sh})}{dr}$$

$$i\omega \Delta\zeta v_1 - im \Delta\zeta v_1 \frac{L}{2\pi r_{sh}} + \Delta\zeta \frac{d}{dr} \left(\left(\frac{v_r^2}{2} + gH \right)_1 \right) = \delta f_{sh} + i\omega \Delta\zeta v_{sh} - im \Delta\zeta v_{sh} \frac{L}{2\pi r_{sh}} + \Delta\zeta \frac{d}{dr} \left(\left(\frac{v_r^2}{2} + gH \right)_{sh} \right)$$

Et finalement, en utilisant 13b, on obtient :

$$\delta f_{jp} \propto i\omega v_{jp} + g \frac{\partial H_{grav}}{\partial r} - \frac{v_1 v_{jp}}{r_{jp}} \quad (21a)$$

$$\delta h_{jp} \propto \frac{i\omega}{v_{jp}} \left(1 - \frac{H_1}{H_{jp}} \right) \quad (21b)$$

$$r \delta v_{\theta,jp} \propto im v_1 \quad (21c)$$

Où les variables indicées 1 et jp représentent respectivement les quantités juste en amont et juste en aval du ressaut, et où les facteurs de proportionnalité sont les mêmes.

Après le rayon inférieur, le fluide est en chute libre, on a donc :

$$\delta f_0 = c_0^2 \delta h_0 \quad (22a)$$

$$c_0 = \left(\frac{Qg}{2\pi r_{int}} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (22b)$$

Le système doit donc satisfaire des conditions à ses *deux* limites. Evidemment, ces conditions ne sont pas satisfaites, pour des solutions non nulles, pour la grande majorité des couples (m, ω) . Il s'agit donc de trouver les *modes propres* du système, autrement dit, les couples (m, ω) , telles qu'une solution non nulle de ce problème existe.

Pour se faire, on peut se fixer a priori un ω complexe, et intégrer 17 de l'extérieur vers l'intérieur, en se servant de 21 comme point de départ. Evidemment, 22 n'est pas vérifié, mais on peut, à ω , associer l'erreur $\epsilon(\omega) = \delta f_0 - c_0^2 \delta h_0$. Il s'agit alors de minimiser cette erreur. Un algorithme de descente du gradient de Newton est utilisé : on calcule $\nabla \epsilon$ en

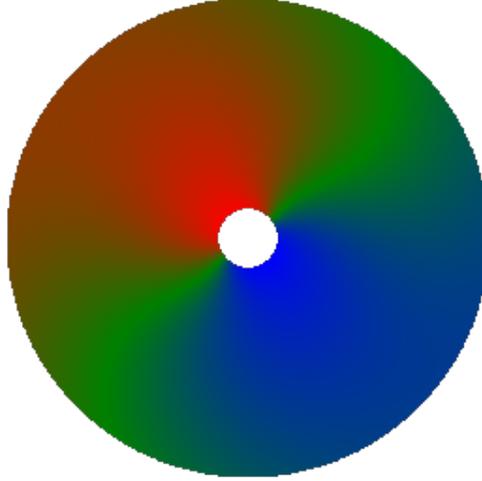


FIGURE 5 – Mesure numérique de la perturbation instable majeure, pour $m=1$, sur la hauteur du flot. Le flot est perturbé négativement en bleu et positivement en rouge. L'ensemble tourne dans le sens des aiguilles d'une montre à une vitesse d'environ 5s/tour.

un point et on suit la plus grande pente jusqu'à annuler la linéarisée de ϵ , fournissant la valeur suivante de ω dans l'approximation. La pertinence de ce schéma est mesurée par la variation des minima trouvés en fonction du point de départ, qui peut être poussée jusqu'à 1 pour 10000.

En parcourant une large bande de valeurs de départ pour ω , on trouve, à m fixé, toute une série de valeurs propres complexes.

3.3 Stabilité du point d'équilibre

La stabilité du point d'équilibre se mesure, *a priori*, par la donnée du spectre de la linéarisée du système différentiel. Les valeurs propres déterminées numériquement dans le paragraphe précédent sont exactement la donnée de ce spectre. Chaque mode sinusoïdal complexe est instable si $Im(\omega) > 0$, et stable si $Im(\omega) \leq 0$ ². Il suffit donc, pour tester la stabilité de l'équilibre, d'observer si certaines valeurs propres sont de partie imaginaire positive. Il se trouve que c'est le cas, et que sur une très large bande de variation des paramètres, dans un cadre vraisemblable par rapport au problème originel, l'une des instabilités est dominante, il s'agit d'un mode correspondant à $m = \pm 1$: physiquement, si le système est mis au départ dans un état proche de l'état d'équilibre, il va se mettre spontanément à tourner dans un sens, ou dans l'autre.

Ce mode est *spiral*, au sens où, concrètement, la perturbation prend la forme d'une spirale, à deux bras (la perturbation d'un côté est l'opposé de la perturbation de l'autre côté), tournant sur elle-même.

Lorsque r_{sh} augmente, les harmoniques de ce mode fondamental deviennent, elles aussi, instables, mais leur croissance ne dépasse jamais celle du mode fondamental.

Il va de soi que dans les cas où le moment cinétique à l'injection L est non nul, le mode spiral tournant dans le même sens devient encore plus instable, et le mode spiral tournant dans l'autre sens se stabilise. Un autre phénomène intéressant, non traité dans le cadre de ce projet car relevant de la physique non-linéaire, est que, à $L = 0$, ces deux modes spiraux sont incompatibles : si, dans la donnée initiale, les deux perturbations instables

² Ici, les modes avec $Im(\omega) = 0$ sont stables car, dans le traitement numérique, ont été négligés les termes visqueux, de par leur petitesse dans l'expérience SWASI, et de par leur absence de pertinence dans la comparaison avec SASI. Ces termes de viscosité amortissent légèrement toute perturbation, donc rendent stable ces modes

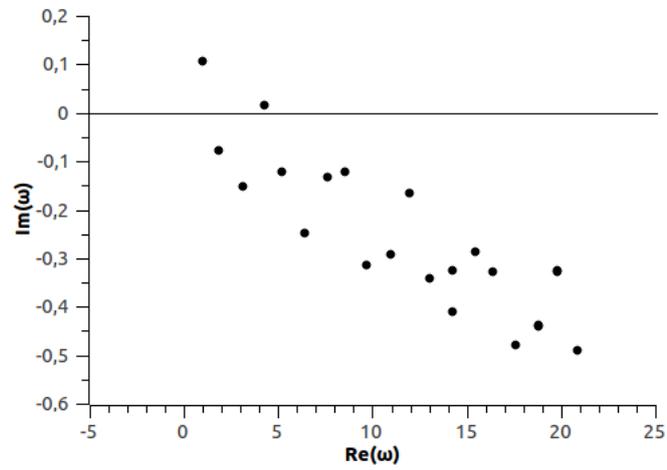


FIGURE 6 – Modes propres de partie réelle $0 < \Re(\omega) < 20$ pour $r_{sh} = 0.32m$, $r_0 = 0.04m$, $L = 0$, $Fr_{sh} = 6$.

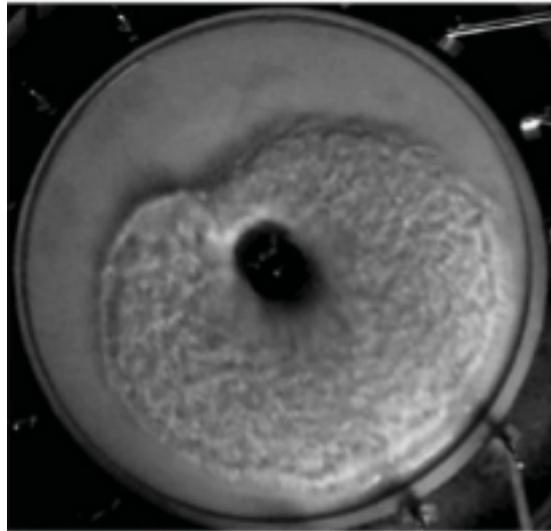


FIGURE 7 – Une photo du dispositif expérimental dans le cas où le point d'équilibre à symétrie axiale est instable.

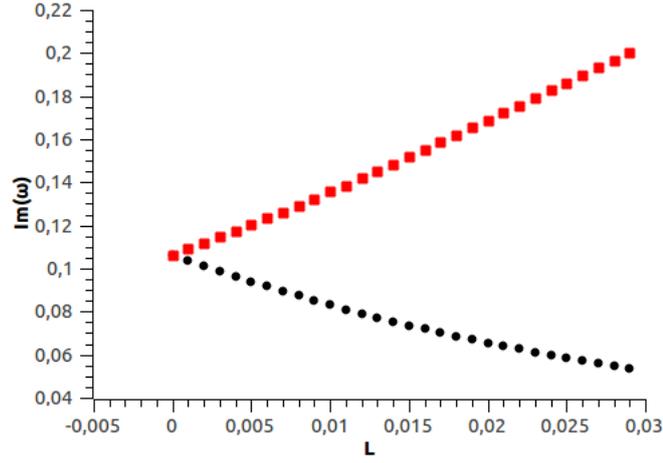


FIGURE 8 – Variation de $Im(\omega)$ en fonction de L , pour le mode $m = +1$ (rouge) et $m = -1$ (noir) Etude numérique menée à $Fr_1 = 6$, $r_* = 0,04m$, $r_{sh} = 0,32m$.

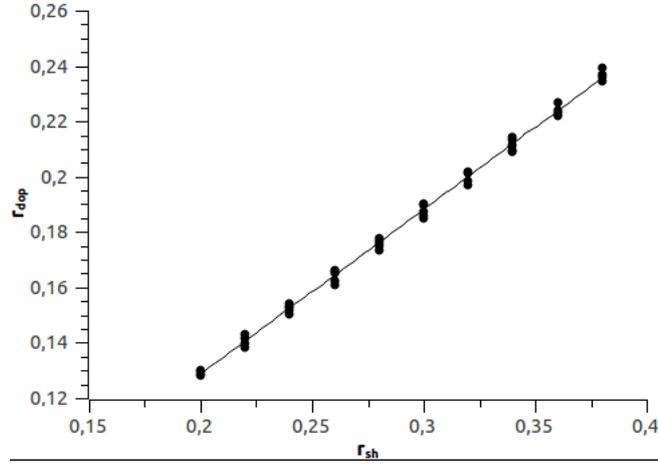


FIGURE 9 – Variation de $Re(\omega)$ en fonction de L , pour L proche de zéro, ramenée dimensionnellement à une distance r_{dop} , en fonction de r_{sh} . Etude numérique menée à $Fr_{sh} = 12$, $r_* = 0,04m$, et régression linéaire.

$m = 1$ et $m = -1$ sont superposées, l'une d'entre elles va se développer au profit de l'autre et la superposition va se dissiper.

Comment savoir, mathématiquement parlant, qu'il s'agit bien du mode dominant ? Le théorème 8 nous donne une borne supérieure sur les parties imaginaires des modes en fonction des coefficients de l'équation, qui sont réguliers (en particulier, r n'atteint pas 0). Il suffit donc de limiter les parties imaginaires des modes cherchés à cette borne. Par ailleurs, des solutions oscillant trop rapidement et à croissance rapide n'ont pas de réalité physique, à cause de la viscosité (négligée dans ces équations, mais présente, même dans les étoiles, lorsque l'oscillation est assez rapide).

On peut étudier plus précisément l'évolution de cette instabilité en fonction du moment cinétique, c'est l'une des motivations essentielles (car non encore réalisée ni numériquement ni expérimentalement) du projet. Dans 17, des termes en $\omega - \frac{mL}{2\pi r^2}$ apparaissent, mettant donc en jeu des fréquences modifiées par effet Doppler. L'évolution de ω en fonction de L peut donc être interprétée en observant la pente à l'origine $\frac{dRe(\omega)}{dL}$ et en calculant le rayon associé r_{dop} . On trouve que, sur une large gamme de paramètres, r_{dop} varie *linéairement* avec r_{sh} :

$$r_{dop} \approx \alpha r_{sh} + (1 - \alpha)r_0 \quad (23)$$

où $\alpha \approx 0.5$. α croît légèrement avec r_0 , et croît avec M .

L'étude de l'évolution des instabilités en fonction du moment cinétique avait déjà été menée dans le cadre d'une étoile en effondrement, avec des résultats similaires. Ceci apporte une pierre à la thèse selon laquelle les caractéristiques de SASI sont, en essence, capturées dans SWASI. Il va de soi que ces instabilités sont liées au fait que l'étoile explose. L'inflation de l'instabilité avec le moment cinétique pourrait expliquer les fréquences de rotation étonnamment élevées des étoiles à neutrons, qui tournent souvent plusieurs ordres de grandeur plus vite que leur progéniteur. La rupture de symétrie dans l'écoulement, associée à des potentiels effets non-linéaires de rétroaction positive sur le moment cinétique local, pourrait entraîner le coeur dans une rotation très rapide (dans l'expérience SWASI, pour mettre ceci en évidence, le cylindre central a pu être laissé libre en rotation pour mesurer cet effet), en plus de repousser - par force centrifuge - suffisamment les couches en effondrement pour permettre aux neutrinos de transmettre leur énergie cinétique et de provoquer l'explosion.

4 Stabilité dans les équations aux dérivées partielles

Le cadre des équations aux dérivées partielles est beaucoup plus complexe que celui des équations ordinaires. Dans cette section, on étudie les équations du type $\frac{\delta u}{\delta t} = F(u, t)$, mais cette fois, F fait intervenir les dérivées de u par rapport à ses autres variables ; autrement dit, F n'envoie pas C^0 dans C^0 ! Sans hypothèse de régularité, le traitement des EDP est donc beaucoup plus complexe.

Dans tout cet exposé, on traite le cas des équations quasilineaires, qui ne font pas intervenir de produit des dérivées partielles entre elles : le problème prend une forme similaire à 24.

4.1 Développements en série entière

L'idée d'un développement formel en série entière est sans doute la première qui vient à l'esprit. On traite donc un problème portant sur les $u : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^N$ qui s'écrit :

$$\partial_t u = F(t, x, u) + \sum_{i=1}^d A_i(t, x, u) \partial_{x_i} u \quad (24a)$$

$$u(0, x) = 0 \quad (24b)$$

Ici, on a $A_i(t, x, u) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$.

Théorème 7. *Supposons que, dans le problème 24, F et les A_i soient analytiques par rapport à x , t et u , dans un voisinage de $(0, 0)$. Alors le problème possède une unique solution analytique dans un voisinage de 0.*

Preuve : On commence par trouver l'unique série formelle en x et t qui correspond au problème ci-dessus (les coefficients du développement s'obtiennent en identifiant les deux côtés de l'équation, de manière unique). Pour prouver que cette série converge sur un voisinage de l'origine, la preuve originelle, due à Cauchy, utilise le fait que F et les A_i sont majorés en norme par des fonctions analytiques. Ainsi, les coefficients de la série formelle sont majorés en norme par les coefficients d'une autre série entière, dont on connaît la convergence sur un voisinage de 0, par le théorème de Cauchy-Lipschitz. P. Lax a proposé une autre preuve, qui ne repose pas sur Cauchy-Lipschitz mais qui utilise une majoration explicite des coefficients du développement.

Ce théorème est, en réalité, extrêmement faible. En effet, non seulement l'unicité des solutions n'est vraie que dans un cadre très limité (des solutions non-analytiques peuvent exister !), mais l'existence même de solutions n'est pas assurée lorsqu'on sort du cadre où tout est analytique. Un parfait exemple est dû à Hadamard :

$$\partial_t u + \partial_x v = 0 \quad (25a)$$

$$\partial_t v - \partial_x u = 0 \quad (25b)$$

$$u_{t=0} = u_0 \quad (25c)$$

$$v_{t=0} = v_0 \quad (25d)$$

où u_0 et v_0 sont données a priori. On peut écrire que $\partial_t^2 u + \partial_x^2 u = 0$, donc si u_0 est analytique dans un voisinage de x_0 , alors toute solution C^0 est analytique dans un voisinage de x_0 , en particulier, v_0 est analytique au voisinage de x_0 également. Ainsi, tout couple de données de départ (u_0, v_0) n'admet pas de solution au problème de Cauchy. Le théorème de Cauchy-Kowalevski ne peut donc pas s'étendre au cas non-analytique.

Le comportement "à part" des cas analytiques rend difficile l'étude des EDP. En effet, on aimerait souvent raisonner par troncature des modes de Fourier puis par approximation (en remplaçant par exemple la donnée initiale u_0 par $\tilde{u}_0 \mathcal{F}^{-1}(1_{|\xi| < \lambda} \mathcal{F}(u))$), mais alors \tilde{u}_0 est analytique, et le système se comporte "trop gentiment".

4.2 Cas des systèmes symétriques

Le théorème précédent utilise des outils algébriques, et ne s'applique donc que dans des cas particuliers. Que se passe-t-il lorsque la donnée initiale - ou les paramètres de l'équation elle-même - sont irréguliers ?

Commençons par remarquer une particularité du système des équations d'Euler en eau peu profonde : déterminons les A_i et F dans ce cas, en utilisant comme variables v_r , v_θ , et $c = \sqrt{gH}$ (auquel cas les termes sont tous de même dimension). Dans ce cas, les équations deviennent :

$$\frac{2c \partial c}{g \partial t} + \frac{v_r c^2}{gr} + \frac{c^2 \partial v_r}{r \partial r} + \frac{2v_r c \partial c}{g \partial r} + \frac{c^2 \partial v_\theta}{gr \partial \theta} + \frac{2v_\theta c \partial c}{rg \partial \theta} = 0 \quad (26a)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} - \frac{v_\theta^2}{r} + \frac{v_\theta \partial v_r}{r \partial \theta} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + 2c \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad (26b)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \frac{v_\theta v_r}{r} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \frac{v_\theta \partial v_\theta}{r \partial \theta} + \frac{2c \partial H}{r \partial \theta} = 0 \quad (26c)$$

On a donc :

$$A_r = \begin{pmatrix} -v_r & -\frac{c}{2r} & 0 \\ -\frac{2c}{r} & -v_r & 0 \\ 0 & 0 & -v_r \end{pmatrix} \quad A_\theta = \begin{pmatrix} -\frac{v_\theta}{r} & 0 & -\frac{c}{2r} \\ 0 & -\frac{v_\theta}{r} & 0 \\ -\frac{2c}{r} & 0 & -\frac{v_\theta}{r} \end{pmatrix} \quad (27)$$

En considérant l'équation portant sur $(c/2, v_r, v_\theta)$, on obtient donc que les matrices A_i de 24 sont *symétriques*. Il se trouve qu'un théorème traite justement ce cas particulier :

Théorème 8. *On considère le problème de Cauchy quasi-linéaire 24. Alors, si les A_j sont symétriques, et C^k par rapport à leurs variables (avec $k \geq 1$), si f est C^k , alors pour $k \geq s > 1 + d/2$, le problème de Cauchy est bien posé : si $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$, alors il existe une unique solution sur $C^0([0, T], H^s(\mathbb{R}^d))$, et le flot est H^s -lipschitzien.*

Schéma de la preuve : On commence par prouver le résultat quand les A_j ne dépendent pas de u : le système se réécrit :

$$\partial_t u + \sum_{j=1}^d A_j(t, x) \partial_{x_j} u = f(t, x) \quad (28a)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad (28b)$$

On suppose aussi que $A_j \in C^0([0, T], L^\infty)$, avec de plus $\nabla A_j \in L^\infty([0, T], H^{s-1})$, et $f \in C^0([0, T], H^s)$. (Ces bornes servent à établir des estimations L^2 et H^s a priori sur $u(t)$). Ensuite, on approche le système par *régularisation* : Avec J_ϵ un multiplicateur de Fourier, défini par $J_\epsilon u = \mathcal{F}^{-1}((1 + \epsilon|\xi|^2)^{-1/2} \mathcal{F}(u))$, alors $J_\epsilon : H^s \rightarrow H^{s+1}$, avec pour tout $u \in H^s$, $J_\epsilon u \rightarrow u$ quand $\epsilon \rightarrow 0$. On montre alors, d'une part, que $A_j J_\epsilon \in \mathcal{L}(H^s)$, et d'autre part, que $[A_j, J_\epsilon] \rightarrow 0$ dans $\mathcal{L}(H^s)$.

Le système régularisé $\partial_t u + A(t) J_\epsilon u = f$, admet donc une unique solution sur un court instant (car $f(t) - A(t) J_\epsilon u$ va de $[0, T] \times H^s$ dans H^s et est globalement lipschitzien en u , on peut donc appliquer le théorème de Picard). Il ne reste plus qu'à montrer que les solutions u_ϵ sont relativement compactes dans $C^0([0, T], H_w^s)$, où H_w^s est muni de la topologie faible. Il existe donc une solution *faible* de l'équation. Pour montrer qu'il s'agit bien d'une solution forte, on sait déjà que $J_\epsilon f \rightarrow f$ et $J_\epsilon u_0 \rightarrow u_0$, et il reste à prouver que $A J_\epsilon u_\epsilon \rightarrow Au$. Mais $A J_\epsilon u_\epsilon - Au = A J_\epsilon (u_\epsilon - u) + A (J_\epsilon - Id)u$, et les deux termes tendent vers 0 au sens des distributions (puisque $u_\epsilon \rightharpoonup u$).

On dispose maintenant du théorème dans le cas d'indépendance par rapport à u . L'idée de Lax est alors d'introduire une suite récursive u_n de solutions d'équations approchées :

$$\partial_t u_{n+1} + A(t, x, u_n(t, x))u_{n+1} = f(u_n) \quad (29a)$$

$$u_{n+1}(0, x) = u_0(x) \quad (29b)$$

Qui converge vers une solution forte, comme souhaité. ■

Ce théorème assure donc un comportement similaire à celui des équations différentielles ordinaires. En particulier, la *régularité du flot* est très importante et justifie l'étude spectrale des points d'équilibre.

4.3 Cas non hyperboliques

Il faut bien prendre garde à ne pas généraliser outre mesure le résultat précédent. L'exemple de Hadamard, où la matrice A_x est antisymétrique, le montre bien. En réalité, la condition de symétrie est quasiment nécessaire : le spectre des A_i joue un rôle très important dans l'existence de solutions, mais aussi dans la régularité du flot :

Théorème 9. *Dans le problème 24, si les A_i , F et une donnée initiale h_1 (donc la solution associée u_1) sont analytiques, et si une combinaison linéaire réelle des A_i possède une valeur propre non réelle (on parle de système non hyperbolique), alors le flot est très irrégulier : pour tout entier m , l'application qui va d'un voisinage de h_1 dans H^m vers un voisinage de u_1 dans L^2 , qui à une donnée initiale associe une solution éventuelle, n'est pas hölderienne, même sur des instants très courts.*

L'idée de la preuve est assez simple : si λ est une valeur propre, de partie imaginaire maximale, de $\sum \alpha_i A_i$, et r un vecteur propre associé, la donnée initiale $h_\epsilon = h_1 + \epsilon^M \operatorname{Re}(e^{i \sum \alpha_j x_j / \epsilon} r)$, analytique et très proche de h_1 , explose. On se retrouve donc à chercher des solutions régulières (analytiques) associées à h_ϵ , la régularité nous permettant d'invoquer des arguments similaires à la preuve de Cauchy-Lipschitz pour montrer l'existence d'une solution associée à h_ϵ .

Cependant, les ingrédients techniques internes sont non-triviaux. Si on se contente de Cauchy-Kowalevski, et qu'on imagine $u(t, x)$ comme $\epsilon v(\frac{t}{\epsilon}, \frac{x}{\epsilon})$ pour isoler les parties de fréquence très élevée, l'équation sur v est alors

$$\partial_t v = A(\epsilon v) \partial_x v + f(v)$$

Qui n'est qu'une perturbation de :

$$\partial_t w = A(0) \partial_x w + f(w)$$

Cette dernière est très simple à résoudre, par analyse de Fourier, et si la donnée de départ est bien choisie, w explose bel et bien, ce qui fait que v aussi (par continuité des coefficients de la série entière par rapport aux paramètres), et on trouve alors que u explose en $e^{\frac{t}{\epsilon}}$, ce qui est ce qu'on souhaite. Cependant, le problème du temps d'existence se pose, car si le temps d'existence de w est d'ordre 1, le temps d'existence de u sera d'ordre ϵ . Il faut donc démontrer un cas particulier, plus fort, de Cauchy-Kowalevski, aux temps longs.

En conclusion, le théorème 8 est donc quasiment optimal puisque la plupart des systèmes hyperboliques pourront se réécrire de manière symétrique.

Physiquement parlant, tous les systèmes différentiels faisant intervenir la dimension temporelle sont hyperboliques, puisque les problèmes de Cauchy sont au coeur de l'étude des systèmes physiques. L'hypothèse selon laquelle l'information ne peut pas se propager

à reculer dans le temps est liée à l'hyperbolicité, puisque, par exemple, dans l'étude qualitative faite plus haut des systèmes subsoniques et supersoniques, l'hyperbolicité était liée au fait que $c < v$, autrement dit, que les perturbations ne pouvaient pas remonter le courant. Cependant, dans l'étude des phénomènes *stationnaires*, les systèmes elliptiques sont monnaie courante. Il est donc d'un intérêt évident d'étudier profondément l'existence, l'unicité et la régularité des solutions dans ce cas. De plus, de nombreux problèmes sont *localement* non-hyperboliques, dans une certaine gamme de fréquences ou de paramètres, par exemple (le problème de Hadamard est lié à l'évolution d'un fluide de Van der Waals, et la partie elliptique correspond physiquement à l'interface entre les deux phases). Par exemple, dans le dernier théorème démontré, l'ajout d'un terme de viscosité (en $-\partial_{x^2}u$) gomme les explosions aux fréquences très élevées, mais dans une certaine gamme, des micro-irrégularités vont pouvoir apparaître avant de saturer. Physiquement, cela mène à une discontinuité spatiale (comme dans le système SWASI), ou bien, à grande échelle, à un changement de phase.

La régularité "imposée" des systèmes elliptiques (dans l'exemple de Hadamard, toute solution C^1 est nécessairement analytique) amène à un paradoxe apparent : bien que, mathématiquement parlant, les systèmes hyperboliques soient plus réguliers, il est bien plus facile de résoudre numériquement des systèmes elliptiques avec une grande exactitude (la propagation des perturbations dans tous les sens limite la propagation des erreurs). Il est en fait très facile de résoudre des systèmes elliptiques, et ajoutant artificiellement une dimension pour transformer le système en un système parabolique, qu'on fait évoluer temporellement jusqu'à l'équilibre : l'équation de Laplace $\Delta u = 0$ devient par exemple $\Delta u = \partial_t u$. Les systèmes hyperboliques (donc la plupart des systèmes réels contenant une composante temporelle !) ne peuvent pas être résolus de cette manière. En fait, le théorème de 8, en énonçant l'existence de solutions irrégulières, prive les numériciens de la régularité.

4.4 Exposants de Lyapunov et EDP symétriques autonomes

Pour conclure le lien entre physique et mathématique, un examen de ce que devient la théorie de Landau dans le cas des EDP autonomes s'impose. Le théorème 8 affirme que, dans le cas d'un système symétrique et autonome, où les $A_j(x, u)$, et $f(x, u)$ sont lipschitziens, globalement en x , localement en u , alors toute solution confinée à un voisinage assez petit d'un point d'équilibre a un temps d'existence infinie (les systèmes régularisés ont un temps d'existence infini par Cauchy-Lipschitz, et cette régularisation converge vers une solution sur $C^0(K, H^s)$ pour tout $K \subset \mathbb{R}$ compact. On peut alors énoncer une généralisation supplémentaire des théorèmes de stabilité :

Théorème 10. *Si $\partial_t u = A(x, u, \partial_x)u + f(x, u)$ est un système d'EDP quasilineaires symétrique, avec f et A C^1 , globalement lipschitziens selon x , dont $u_0 \in H^s$ est une solution stationnaire, alors :*

1. *S'il existe $V \in C^1(H^s, \mathbb{R})$, et B une boule ouverte de H^s centrée en u_0 avec $dV(u) \in \mathcal{L}(H^{s-1}, \mathbb{R})$ pour tout $u \in B$, et tels que :

 - u_0 est un minimum strict de V sur B ;
 - $\forall u \in B$, $dV(u)(A(x, u, \partial_x)u + f(x, u)) \leq -\alpha(V(u) - V(u_0))$
 Alors u_0 est stable.*
2. *S'il existe $V \in C^1(H^s, \mathbb{R})$, et B une boule ouverte de H^s centrée en u_0 avec $dV(u) \in \mathcal{L}(H^{s-1}, \mathbb{R})$ pour tout $u \in B$, et Ω un ouvert de E tels que :

 - $V > 0$ sur Ω ;
 - $V = 0$ sur $\partial\Omega$
 - $u_0 \in \partial\Omega$
 - $\forall u \in \Omega \cap B$, $dV(u)(A(x, u, \partial_x)u + f(x, u)) > \alpha(V(u) - V_{u_0})$
 Alors u_0 est instable (toute donnée initiale dans $B \cap \Omega$ diverge)*

Il ne reste plus qu'à trouver un V convenable pour exhiber la divergence du système SWASI (qui vérifie toutes les hypothèses de régularité !). Mais puisqu'il existe un vecteur

propre $\bar{u} \in H_s$ de T , la différentielle de $A(x, u, \partial_x)u + f(x, u)$ en u_0 , avec comme valeur propre λ , tel que $\Re(\lambda) > 0$, alors avec F un hyperplan de H_s , ne contenant pas \bar{u} , et stable par T (qui existe car T est symétrique), on peut poser $V(u) = |u \cdot \bar{u}| - \|\Pi_F(u)\|_s$, et poser $\Omega = \{V > 0\}$, avec $\mathbb{R}\bar{u} \in \Omega$. Alors, avec B assez petit pour assurer une lipschitzianité globale des coefficients, on peut appliquer le théorème précédent.

5 Conclusion

Au terme de cette étude, il apparaît possible de donner un cadre mathématique rigoureux à la détermination de potentielles instabilités et ruptures de symétrie dans les systèmes hydrodynamiques d'intérêt physique. Si, de par son caractère hyperbolique, le système SWASI n'admet pas de divergences trop rapides par rapport à un état d'équilibre donné, il est néanmoins formellement possible d'étudier le spectre de la différentielle et d'en tirer des conclusions sur la stabilité à échelle globale. Deux points restent encore flous. D'une part, si, rigoureusement parlant, la détection d'une instabilité mène, à moyen terme, à une divergence, du moins jusqu'à ce que les effets non-linéaires saturent le système, le cas des systèmes prétendument stables reste flou : quand bien même toutes les solutions se décomposant en modes de Fourier seraient stables, des solutions non décomposables seraient éventuellement possibles ; d'autre part, les solutions envisagées ont (par le biais d'une décomposition en modes de Fourier) été supposées a priori d'une certaine forme : la dépendance en θ et en t était sinusoïdale. Cette décomposition n'est valable que dans un cadre linéaire, et ne traduit pas le cas général. Le calcul pseudo-différentiel permet de passer outre ces restrictions, et de généraliser les transformées de Fourier au cas non-linéaires, tout en permettant des points de vue "mixtes", où une même variable est vue sous un angle spatial et fréquentiel ; un développement précis de cette théorie complexe sort du cadre de cet exposé.

L'étude du système en lui-même a permis de conforter l'idée d'un parallèle fort entre le système étudié et le système réel. L'interprétation de cette instabilité reste à être déterminée, mais il ne fait aucun doute que son essence est la même que dans le cas où $L=0$, à savoir, un cycle de propagation d'ondes acoustiques du rayon interne vers le rayon externe, et d'advection (propagation avec le courant) d'ondes du rayon externe vers le rayon interne. Pour le déterminer avec précision, il faudrait comparer les taux de croissance trouvés aux taux prédits par une telle propagation.

A Codes source des programmes utilisés

A.1 Code source du programme permettant de déterminer le spectre en fonction du mode

```
1 /* Projet SWASI
2
3 main.c
4 Deleporte
5 */
6
7 /* définition des constantes */
8 // constantes expérimentales
9 #define _L 0.0
10 #define _Q 0.001
11 #define _r0 0.04
12 #define _rsh 0.32
13 #define _Phi 0.003136
14 #define _g 9.81
15 #define _Ml 6.0
16 #define _criterion 1000
17 #define _Pi 6.2831853071796
18 #define _m 1.0/6.2831853071796
19
20 // constantes numériques
21 #define _N 401
22 // #define _errormax
23
24 // intervalle sur omega
25 #define _wrmin -20.0
26 #define _wrmax 1.0
27 #define _wimin -6.0
28 #define _wimax 2.0
29 #define _wrint 0.5
30 #define _wiint 0.5
31
32 #include <stdio.h>
33 #include <stdlib.h>
34 #include <math.h>
35
36 void calcul(float* p, float r, float vr, float H, float wr,
37            float wi, float* temp)
38 {
39     float Fr = vr*vr/(_g*H); // attention c'est Fr au carré
40     float fr = temp[0];
41     float fi = temp[1];
42     float hr = temp[2];
43     float hi = temp[3];
44     float rvthr = temp[4];
45     float rvthi = temp[5];
46
47     // on commence par les variables auxiliaires
48     float vrr = Fr/((1-Fr)*vr)*(_g*H*hr-fr+_L/(r*r*_Pi)*rvthr);
49     float vri = Fr/((1-Fr)*vr)*(_g*H*hi-fi+_L/(r*r*_Pi)*rvthi);
```

```

49  float Hr =
      H*Fr/(Fr-1)*(hr-fr/(vr*vr)+_L/(r*r*vr*vr*_Pi)*rvthr);
50  float Hi =
      H*Fr/(Fr-1)*(hi-fi/(vr*vr)+_L/(r*r*vr*vr*_Pi)*rvthi);
51
52  //puis on calcule le reste
53  p[0] = -m*_L/(r*r*vr)*fi + wr*(vri +
      _L/(r*r*vr*_Pi)*rvthi) + wi*(vrr +
      _L/(r*r*vr*_Pi)*rvthr);
54  p[1] = _m*_L/(r*r*vr)*fr - wr*(vrr + _L/(r*r*vr*_Pi)*rvthi)
      + wi*(vri + _L/(r*r*vr*_Pi)*rvthi);
55  p[2] = _Pi*_m/(r*r*vr)*rvthi - _Pi*r/_Q*(wi*Hr + (wr +
      _m*_L/(r*r))*Hi);
56  p[3] = -_Pi*_m/(r*r*vr)*rvthr + _Pi*r/_Q*((wr +
      _m*_L/(r*r))*Hr - wi*Hi);
57  p[4] = -_Pi*_m*vri + 1.0/vr*( _Pi*_m*fi + wr*rvthi +
      wi*rvthr);
58  p[5] = _Pi*_m*vrr - 1.0/vr*( _Pi*_m*fr + wr*rvthr -
      wi*rvthi);
59
60 }
61
62 float stationnaire(float* vr, float* H, float* vth) //marche
63 {
64     //définition des constantes
65     float r, h=(_r0-_rsh)/(_N-1), p1, p2, p3, p4, p, Hsh, temp,
        pt1, pt2, pt3, pt4, pt;
66     int i;
67     float tadvac=0;
68
69     //initialisation
70     Hsh=pow(_Q*_Q*pow(sqrt(1.0+8.0*_M1*_M1)-1.0,
        3)/(_g*pow(2.0, 3.0)*_M1*_M1*_rsh*_rsh*_Pi*_Pi),
        1.0/3.0);
71     vth[_N-1]=_L/(_rsh*_Pi);
72     H[_N-1]=Hsh;
73     vr[_N-1]=-_Q/(Hsh*_rsh*_Pi);
74
75
76     //intégration du choc au point sonique
77     for(i=_N-1; i>=1; i--)
78     {
79         r=(i*_rsh+(_N-1-i)*_r0)/(_N-1);
80         //calcul de vth
81         vth[i-1]=_L/((r+h)*_Pi);
82         //calcul de vr et de H par Runge_Kutta 4
83         p1=( _L*_L/(4*r*r*r*_Pi*_Pi) - _g*_Q/(r*r*vr[i]*_Pi)-
            _g*_Phi/(r*r))/(vr[i]+_g*_Q/(r*vr[i]*vr[i]*_Pi));
84         temp=vr[i]+p1*h/2;
85         pt1=-1/vr[i] + 1/(sqrt(_g*H[i])+vr[i]);
86         p2=( _L*_L/(4*(r+h/2)*(r+h/2)*(r+h/2)*_Pi*_Pi)-
            _g*_Q/((r+h/2)*(r+h/2)*temp*_Pi)-
            _g*_Phi/((r+h/2)*(r+h/2)))/(temp+_g*_Q/((r+h/2)*temp*temp*_Pi))

```

```

87     pt2=-1/temp + 1/(sqrt(-_g*_Q/((r+h/2)*_Pi*temp))+temp);
88     temp=vr [ i]+p2*h/2;
89     p3=(_L*_L/(4*(r+h/2)*(r+h/2)*(r+h/2)*_Pi*_Pi)
        -_g*_Q/((r+h/2)*(r+h/2)*temp*_Pi)-
        _g*_Phi/((r+h/2)*(r+h/2)))/(temp+_g*_Q/((r+h/2)*temp*temp*_Pi));
90     pt3=-1/temp + 1/(sqrt(-_g*_Q/((r+h/2)*_Pi*temp))+temp);
91     temp=vr [ i]+p3*h;
92     p4=(_L*_L/(4*(r+h)*(r+h)*(r+h)*_Pi*_Pi)-
        _g*_Q/((r+h)*(r+h)*temp*_Pi)-
        _g*_Phi/((r+h)*(r+h)))/(temp+_g*_Q/((r+h)*temp*temp*_Pi));
93     pt4=-1/temp + 1/(sqrt(-_g*_Q/((r+h)*_Pi*temp))+temp);
94     p=(p1+2.0*p2+2.0*p3+p4)/6;
95     pt=(pt1+2.0*pt2+2.0*pt3+pt4)/6;
96     vr [ i-1]=vr [ i]+p*h;
97     H[ i-1]=-_Q/((r+h)*vr [ i-1]*_Pi);
98     tadvac -= h*pt;
99 }
100
101     return tadvac;
102 }
103
104 float resoudre(float wr, float wi, float* vr, float* H, float*
    vth, int boolprint, FILE* log)
105 {
106
107     //test sur les bornes
108     if(wr<_wrmin - 5 || wr > _wrmax + 5 || wi < _wimin - 5 ||
        wi > _wimax + 5)
109     {
110         return INFINITY;
111     }
112     //déclaration des constantes
113     float fr[_N], fi[_N], hr[_N], hi[_N], rvthr[_N], rvthi[_N],
        temp[6], r, d=(_r0-_rsh)/(_N-1), vrm, Hm, Hsh, v1, vsh;
114     float p0[6], p1[6], p2[6], p3[6];
115     int i, j;
116
117     //conditions initiales (à vérifier)
118     Hsh=pow(_Q*_Q*pow(sqrt(1.0+8.0*_M1*_M1)-1.0,
        3.0)/(_g*pow(2.0, 3.0)*_M1*_M1*_rsh*_rsh*_Pi*_Pi),
        1.0/3.0);
119     vsh=-_Q/(Hsh*_rsh*_Pi);
120     v1=vsh*4*_M1*_M1/(sqrt(1.0+8.0*_M1*_M1)+1);
121
122     fr [_N-1]=(vsh*wi+_g*_Phi/(_rsh*_rsh)-_L*_L/
        (4.0*_rsh*_rsh*_rsh*_Pi*_Pi)-v1*vsh/_rsh);
123     fi [_N-1]=(-vsh*wr);
124     hr [_N-1]=-wi/vsh;
125     hi [_N-1]=wr/vsh;
126     rvthr [_N-1]=0;
127     rvthi [_N-1]=_Pi*_m*v1;
128
129     if(boolprint)

```

```

130 {
131     fprintf(log,
           "\n\n===== \nperturbations
           à %f + %f i\n===== \n\n",
           wr, wi);
132 }
133
134 //détermination de vr et de H et de vth (intégration RK4 du
           choc vers le point sonique)
135 for (i=_N-1; i>=1; i--)
136 {
137     //intermédiaires de calcul
138     r=(i*_rsh+(_N-1-i)*_r0)/(_N-1);
139     vrm=(vr[i]+vr[i-1])/2;
140     Hm=(H[i]+H[i-1])/2;
141
142     //moteur Runge-Kutta : OK
143     //première pente comme Euler
144
145     //on va à mi-chemin
146     temp[0]=fr[i];
147     temp[1]=fi[i];
148     temp[2]=hr[i];
149     temp[3]=hi[i];
150     temp[4]=rvthr[i];
151     temp[5]=rvthi[i];
152     calcul(p0, r, vr[i], H[i], wr, wi, temp);
153     for (j=0; j<6; j++)
154     {
155         temp[j] += d/2*p0[j];
156     }
157
158     //on reprend la pente à cet endroit
159     calcul(p1, r-d/2, vrm, Hm, wr, wi, temp);
160     //on recommence du début et on suit cette pente jusqu'à
           mi-chemin
161     temp[0]=fr[i];
162     temp[1]=fi[i];
163     temp[2]=hr[i];
164     temp[3]=hi[i];
165     temp[4]=rvthr[i];
166     temp[5]=rvthi[i];
167     for (j=0; j<6; j++)
168     {
169         temp[j] += d/2*p1[j];
170     }
171
172     //on reprend la pente à cet endroit
173     calcul(p2, r-d/2, vrm, Hm, wr, wi, temp);
174     //on recommence du début et on va jusqu'au bout
175     temp[0]=fr[i];
176     temp[1]=fi[i];
177     temp[2]=hr[i];

```

```

178     temp[3]= hi [ i ];
179     temp[4]= rvthr [ i ];
180     temp[5]= rvthi [ i ];
181     for (j=0; j < 6; j++)
182     {
183         temp [ j ] += d*p2 [ j ];
184     }
185
186
187     //on prend la pente à cet endroit
188     calcul(p3, r-d, vr [ i - 1 ], H [ i - 1 ], wr, wi, temp);
189
190     //et on intègre avec une bonne pondération :)
191     temp[0]= fr [ i ];
192     temp[1]= fi [ i ];
193     temp[2]= hr [ i ];
194     temp[3]= hi [ i ];
195     temp[4]= rvthr [ i ];
196     temp[5]= rvthi [ i ];
197     for (j=0; j < 6; j++)
198     {
199         temp [ j ] += d*(p0 [ j ]+2.0*p1 [ j ]+2.0*p2 [ j ]+p3 [ j ]) / 6;
200     }
201
202     //et on a gagné
203     fr [ i - 1 ]=temp [ 0 ];
204     fi [ i - 1 ]=temp [ 1 ];
205     hr [ i - 1 ]=temp [ 2 ];
206     hi [ i - 1 ]=temp [ 3 ];
207     rvthr [ i - 1 ]=temp [ 4 ];
208     rvthi [ i - 1 ]=temp [ 5 ];
209
210     if (boolprint == 1)
211     {
212         fprintf (log, "%f : %f : %f : %f : %f : %f : %f\n",
                r, fr [ i ], fi [ i ], hr [ i ], hi [ i ], rvthr [ i ],
                rvthi [ i ]);
213     }
214     if (isnan (fr [ i - 1 ]) || isnan (fi [ i - 1 ]) || isnan (hr [ i - 1 ])
        || isnan (hi [ i - 1 ]) || isnan (rvthr [ i - 1 ]) ||
        isnan (rvthi [ i - 1 ]))
215     {
216         return INFINITY;
217     }
218
219
220 }
221 //calcul de l'erreur
222 //printf ("%e\n", pow ((fr [ 0 ]-pow (_Q*_g/(_Pi*_r0),
        0.66)*hr [ 0 ]), 2) + pow ((fi [ 0 ]-pow (_Q*_g/(_Pi*_r0),
        0.66)*hi [ 0 ]), 2));
223 return pow ((fr [ 0 ]-pow (_Q*_g/(_Pi*_r0), 2.0/3.0)*hr [ 0 ]),
        2.0) + pow ((fi [ 0 ]-pow (_Q*_g/(_Pi*_r0), 2.0/3.0)*hi [ 0 ]),

```

```

        2);
224 }
225
226 int main()
227 {
228     //initialisation des constantes
229     float r, error, error1, error2, a, pas, slope1, slope2,
        tadv;
230     int i, control;
231     float vr[_N], H[_N], vth[_N], wreal, wim, wr, wi;
232     FILE* log=NULL;
233
234     log=fopen("Swasitext.txt", "w+");
235     if(log==NULL)
236     {
237         printf("Erreur d'ouverture du fichier\n");
238         return 1;
239     }
240
241
242     //écriture des constantes dans Swasitext pour se rappeler
243     fprintf(log,
        "L=%f\nQ=%f\nr0=%f\nrsh=%f\nPhi=%f\nM1=%f\n\n\n", _L,
        _Q, _r0, _rsh, _Phi, _M1);
244
245
246     //écriture du régime stationnaire dans Swasitext
247     tadv = stationnaire(vr, H, vth);
248     fprintf(log, "%f\n", tadv);
249     fprintf(log, "===== \n Régime
        stationnaire \n ===== \n \n \n
        : vr : vth : H\n");
250     for(i=_N-1; i>0; i--)
251     {
252         r=(i*_rsh+(_N-1-i)*_r0)/(_N-1);
253         fprintf(log, "%f : %f : %f : %f\n", r, vr[i], vth[i],
            H[i]);
254     }
255
256     //shooting sur omega
257     for(wr=_wrmin; wr<_wrmax; wr += _wrint)
258     {
259         for(wi=_wimin; wi<_wimax; wi += _wiint)
260         {
261             printf("\nparti de % f + %f i... \n", wr, wi);
262             control = 0;
263             error=0;
264             pas=1.0;
265             wreal=wr;
266             wim=wi;
267             do
268             {
269                 error = resoudre(wreal, wim, vr, H, vth, 0, log);

```

```

270     //printf("%f + i %f :%f \n", wreal, wim, error);
271
272     error1 = resoudre(wreal+pas, wim, vr, H, vth, 0, log);
273     error2 = resoudre(wreal, wim+pas, vr, H, vth, 0, log);
274     slope1=(error1-error)/pas;
275     slope2=(error2-error)/pas;
276     a = slope1*slope1 + slope2*slope2;
277     if(a > 0.01)
278     {
279         //recherche linéaire le long de la pente
280
281         wreal -= error*slope1/a;
282         wim -= error*slope2/a;
283
284     }
285     //fprintf(log,"%f : %f : %f\n", error, wreal, wim);
286     control++;
287     pas /= 1.5;
288     //printf("%f : %f : %d\n", error, a, control);
289     }while(error > 0.0001 && a > 0.01 && control < 100);
290     if(control < 100 && isnan(wreal) == 0 && isnan(wim) ==
291         0)
292     {
293         if(error < _criterion)
294         {
295             printf("trouvé !\n%f + %f i avec erreur
296                 %f\n\n", wreal*tadv, wim*tadv, error);
297             fprintf(log, "trouvé !\n%f + %f i avec erreur
298                 %f\n\n", wreal, wim, error);
299             resoudre(wreal, wim+pas, vr, H, vth, 1, log);
300         }
301         else
302         {
303             printf("bof...\n %f + %f i avec erreur %f\n\n",
304                 wreal, wim, error);
305         }
306     }
307     else
308     {
309         wreal = wr;
310         wim = wi;
311     }
312 }
313
314 printf("fini\n");
315
316 return 0;
317

```

A.2 Code source modifié permettant de suivre l'évolution d'un mode propre donné en fonction du moment cinétique

```

1 int main()
2 {
3     //initialisation des constantes
4     float error, error1, error2, a, pas, L=0, slope1, slope2,
        _rsh, tadv;
5     int control;
6     float vr[_N], H[_N], vth[_N], wreal, wim;
7     FILE* log=NULL;
8
9     log=fopen("Swasitext.txt", "w+");
10    if(log==NULL)
11    {
12        printf("Erreur d'ouverture du fichier\n");
13        return 1;
14    }
15
16    L=0;
17
18    wreal=_wrdep;
19    wim=_widep;
20
21    //shooting sur omega, et suivi sur L et sur _r0
22    for(_rsh=_rshb; _rsh < _rshe; _rsh += _rshint)
23    {
24
25
26
27    for(L=_Lb; L>_Le; L+=_Lint)
28    {
29        tadv = stationnaire(vr, H, vth, L, _rsh);
30        control = 0;
31        error=0;
32        pas=1.0;
33        do
34        {
35            error = resoudre(wreal, wim, vr, H, vth, L, _rsh);
36
37            error1 = resoudre(wreal+pas, wim, vr, H, vth, L, _rsh);
38            error2 = resoudre(wreal, wim+pas, vr, H, vth, L, _rsh);
39            slope1=(error1-error)/pas;
40            slope2=(error2-error)/pas;
41            a = slope1*slope1 + slope2*slope2;
42            if(a > 1)
43            {
44                wreal -= error*slope1/a;
45                wim -= error*slope2/a;
46            }
47            control++;

```

```

48     pas /= 1.5;
49     }while(error > 0.0001 && a > 0.01 && control < 100);
50     if(control < 100 && isnan(wreal) == 0 && isnan(wim) ==
        0)
51     {
52         printf("trouvÃ© !\n%f : %f + %f i avec erreur
                %f\n\n", L, wreal, wim, error);
53         fprintf(log, "%f ; %f : %f + %f i : %f + %f i\n",
                _rsh, L, wreal, wim, wreal*tadv, wim*tadv);
54     }
55     else
56     {
57         wreal = _wrdep;
58         wim = _widep;
59     }
60
61 }
62 }
63 printf(" fini\n");
64
65 return 0;
66
67 }

```

follow.c

A.3 Code source du programme permettant d'afficher un mode propre calculé

```

1 #include <stdlib.h>
2 #include <stdio.h>
3 #include <SDL/SDL.h>
4 #include <math.h>
5
6 #define LARGEUR_FENETRE      512
7 #define HAUTEUR_FENETRE     400
8 #define _N 400
9
10
11 void setPixel(SDL_Surface *surface, int x, int y, Uint32 pixel)
12 {
13     int bpp = surface->format->BytesPerPixel;
14
15     Uint8 *p = (Uint8 *)surface->pixels + y * surface->pitch +
        x * bpp;
16
17     switch(bpp) {
18     case 1:
19         *p = pixel;
20         break;
21
22     case 2:
23         *(Uint16 *)p = pixel;
24         break;
25

```

```

26     case 3:
27         if (SDL_BYTEORDER == SDL_BIG_ENDIAN) {
28             p[0] = (pixel >> 16) & 0xff;
29             p[1] = (pixel >> 8) & 0xff;
30             p[2] = pixel & 0xff;
31         } else {
32             p[0] = pixel & 0xff;
33             p[1] = (pixel >> 8) & 0xff;
34             p[2] = (pixel >> 16) & 0xff;
35         }
36         break;
37
38     case 4:
39         *(Uint32 *)p = pixel;
40         break;
41     }
42 }
43
44 int main(int argc, char *argv[])
45 {
46     SDL_Surface *ecran = NULL;
47     SDL_Event event;
48     int continuer = 1, i=1, j, x, y;
49     float r[400], varr[400], vari[400], theta, var;
50     char temp[8];
51     char temp2;
52     Uint32 color;
53     FILE* in=NULL;
54
55
56     /* on charge le contenu du fichier */
57     in = fopen("Swasi.csv", "r");
58
59     for (i=0; i<_N; i++)
60     {
61         fread(temp, 8, 1, in);
62         r[i] = atof(temp);
63         printf("%f\n", r[i]);
64         temp2=0;
65         while(temp2 != ':')
66         {
67             temp2=fgetc(in);
68         }
69         fread(temp, 8, 1, in);
70         varr[i] = atof(temp);
71         temp2=0;
72         while(temp2 != ':')
73         {
74             temp2=fgetc(in);
75         }
76         fread(temp, 8, 1, in);
77         vari[i] = atof(temp);
78         temp2=0;

```

```

79     while(temp2 != '\n')
80     {
81         temp2=fgetc (in);
82     }
83 }
84
85 /* on initialise la vidÃ©o*/
86 SDL_Init(SDL_INIT_VIDEO);
87 ecran = SDL_SetVideoMode(LARGEUR_FENETRE, HAUTEUR_FENETRE,
88     32, SDL_SWSURFACE | SDL_DOUBLEBUF);
89 SDL_WM_SetCaption("InstabilitÃ© : mode spiral", NULL);
90 SDL_LockSurface(ecran);
91
92 for (i=0; i<_N; i++)
93 {
94     for (j=0; j<800; j++)
95     {
96         //calcul de x et y Ã partir de r et theta
97         theta = 6.2831*j/800;
98         x=r [i]*cos(theta)*400 + LARGEUR_FENETRE/2;
99         y=r [i]*sin(theta)*400 + HAUTEUR_FENETRE/2;
100
101         //calcul de la valeur au point
102         var=(varr [i]*cos(theta) +
103             vari [i]*sin(theta))*255.0/0.5;
104         color=SDL_MapRGB(ecran->format ,
105             abs(255.0/(1+exp(var/50))-128)+
106             255.0/(1+exp(var/50))-128,
107             -abs(255.0/(1+exp(var/50))-128) + 128,
108             abs(255.0/(1+exp(var/50))-128) -
109             255.0/(1+exp(var/50)) + 128);
110
111         //on blitte
112         setPixel(ecran , x, y, color);
113     }
114 }
115
116 //on rafraichit et on affiche
117 SDL_UnlockSurface(ecran);
118 SDL_Flip(ecran);
119
120 while (continuer)
121 {
122     SDL_PollEvent(&event);
123     switch(event.type)
124     {
125         case SDL_QUIT:
126             continuer = 0;
127             break;
128     }
129 }

```

```
125     }  
126  
127     SDL_FreeSurface( ecran );  
128     SDL_Quit();  
129 }
```

show.cpp

B Références

- Landau, Lifschitz, *Fluid Mechanics*;
- Hoffman, *Computational Fluid Dynamics*;
- Blondin, Mezzacappa, DeMarino, *Stability of Standing Accretion Shocks, with an eye toward core-collapse supernovae*, in *The Astrophysical Journal*, 2002;
- Yamasaki, Foglizzo, *Effect of rotation on the stability of a stalled cylindrical shock and its consequences for core-collapse supernovae*, in *The Astrophysical Journal*, 2008;
- Texier, *Cours de M2, université Paris Diderot*;
- Foglizzo, Masset, Guilet, Durand, *Shallow Water Analogue of the Standing Accretion Shock Instability : Experimental Demonstration and a Two-Dimensional Model*, in *Physical Review Letters*, 2012;
- Métivier, *Remarks on the Well-Posedness of the Nonlinear Cauchy Problem*