Densité des entiers friables

Cyril Demarche et Alexandre Viel
exposé proposé par Régis de la Bretèche

23 juin 2004

Table des matières

Introduction

L'objectif de cet exposé est de présenter une démonstration d'une estimation asymptotique du nombre des entiers $n \leq x$ qui sont y-friables, i.e. dont tous les facteurs premiers sont inférieurs à y. On montrera ce résultat par la méthode des équations fonctionnelles développée par Hildebrand. Les estimations de la densité des entiers friables sont très utiles dans de multiples problèmes de théorie des nombres, ce qui explique que ce sujet ait été l'objet de nombreux articles. En effet, on peut décomposer tout entier n de façon unique de la manière suivante : $n = a.b$, avec a ayant tous ses facteurs premiers inférieurs à y, et b ayant tous ses facteurs premiers strictement supérieurs à y. Ainsi, on peut connaître certaines propriétés asymptotiques des entiers en étudiant leur "partie friable" a, et en maîtrisant la partie b, par le théorème des nombres premiers par exemple.

Pour démontrer ces résultats, on va d'abord énoncer et démontrer le théorème des nombres premiers, en présentant quelques outils importants de la théorie analytique des nombres, puis on présentera la preuve de Hildebrand sur la densité des entiers friables.

Dans tout l'exposé, la lettre p désigne un nombre premier, et pour tout nombre complexe s, on notera σ (resp. τ) la partie réelle (resp. imaginaire) de s, i.e. : $s = \sigma + i\tau$.

1 Théorème des nombres premiers

1.1 La fonction ζ de Riemann

1.1.1 Définition et prolongement

Définition 1.1. *Pour tout $s \in \mathbb{C}, \Re e(s) > 1$, on note*

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Théorème 1.1. *La fonction ζ admet un unique prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$, dont le seul pôle est 1, d'ordre 1 et de résidu 1.*
En outre, ce prolongement vérifie l'équation fonctionnelle suivante : pour tout $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$,

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(1-s)$$

Preuve. On remarque d'abord, en intégrant par parties, que pour $\Re e(s) > 1$,

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{\infty} \frac{t - [t]}{t^{s+1}} dt$$

Cela permet de définir un prolongement analytique de ζ sur $\{z \in \mathbb{C} : \Re e(z) > 0, z \neq 1\}$.
On définit ensuite

$$\Gamma(s) := \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$$

pour $s \in \mathbb{C}, \Re e(s) > 0$.
Alors, on remarque que $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, ce qui permet de définir un prolongement analytique de Γ à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$, de la façon suivante :

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+n)}{s(s+1)\dots(s+n-1)}$$

avec $\Re e(s+n) > 0$.
Soit alors $s \in \mathbb{C}, \Re e(s) > 0$ et $n \geq 1$,

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} e^{-x} dx = \pi^{\frac{s}{2}} n^s \int_0^{\infty} y^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 y} dy$$

en posant $y = \frac{x}{\pi n^2}$.
Si $\Re e(s) > 1$, on somme l'égalité précédente, et on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pi^{\frac{-s}{2}} n^{-s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} y^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 y} dy$$

Donc par convergence monotone,

$$\pi^{\frac{-s}{2}} \zeta(s) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{\infty} y^{\frac{s}{2}-1} h(y) dy$$

avec $h(y) := \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 y}$.
Posons maintenant, pour $u > 0$, $f_u(x) := e^{-\pi u x^2}$. Alors la formule sommatoire de Poisson s'écrit

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_u(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_u(n)$$

avec

$$\hat{f}_u(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f_u(y) e^{-2i\pi x y} dy = \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-\frac{\pi x^2}{u}}$$

On en déduit donc

$$\forall y > 0, h\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{\sqrt{y}-1}{2} + \sqrt{y} h(y)$$

Donc

$$\int_0^1 y^{\frac{s}{2}-1} h(y) dy = \int_1^{\infty} x^{-\frac{s}{2}-1} h\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_1^{\infty} x^{-\frac{s}{2}-1} \frac{\sqrt{x}-1}{2} dx + \int_1^{\infty} x^{-\frac{s+1}{2}} h(x) dx$$

en posant $x = \frac{1}{y}$.
Finalement, on a montré que

$$\int_0^1 y^{\frac{s}{2}-1} h(y) dy = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty} x^{-\frac{s+1}{2}} h(x) dx$$

et par conséquent

$$\pi^{\frac{-s}{2}} \zeta(s) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty} h(x) \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s+1}{2}}\right) dx$$

Donc en remarquant que $h(x) = O(e^{-\pi x})$, la fonction

$$\Phi(s) := \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty} h(x) \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s+1}{2}}\right) dx$$

est analytique sur $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$, et invariante par $s \longmapsto 1-s$.
Cela définit donc un prolongement analytique de ζ sur $\mathbb{C}\setminus\{1\}$, par la formule suivante

$$\zeta(1-s) \pi^{\frac{s-1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) = \zeta(s) \pi^{\frac{-s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$$

avec $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$.
Or

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} \pi^{s-\frac{1}{2}} \zeta(1-s)$$

Et on dispose de la formule de duplication de Legendre

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} 2^{1-2s} \Gamma(2s)$$

Donc
$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})\Gamma(\frac{1+s}{2})}{\Gamma(s)}\pi^{s-1}2^{s-1}\zeta(1-s)$$
Or, par la formule des compléments,
$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$
Donc
$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s-1}2^{s-1}\Gamma(1-s)\sin(\pi s)}{\sin(\pi\frac{s+1}{2})}\zeta(1-s)$$
D'où, pour tout $s \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$,
$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s)$$
Finalement, le prolongement de ζ ainsi construit est méromorphe sur $\mathbb{C}$, et son seul pôle est 1, d'ordre 1 et de résidu 1. $\square$

1.1.2 Quelques propriétés

Notation Désormais, Z désigne l'ensemble des zéros non triviaux de ζ, i.e. l'ensemble des zéros de ζ qui ne sont pas de la forme $-2n, n \in \mathbb{N}^*$.

On va maintenant relier la fonction ζ à certaines propriétés des nombres premiers. Pour cela, on a besoin de la fonction de Von Mangoldt.

Définition 1.2. *On définit la fonction arithmétique de Von Mangoldt, notée Λ :*

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Lambda(n) := \log p$ si n est une puissance du nombre premier p, $\Lambda(n) := 0$ sinon.

Remarque. On constate immédiatemment que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \log n = \sum_{d|n}\Lambda(d)$$

On a alors la proposition "cruciale" suivante, qui relie ζ à Λ.

Proposition 1.1. *Pour tout $s \in \mathbb{C}$, si $\Re e(s) > 1$, alors*
$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

Preuve. Par convergence uniforme sur tout compact des séries considérées, on peut dériver terme à terme. Alors, par la remarque précédente,
$$\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^s} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\sum_{d|n}\Lambda(d)$$
Donc
$$\zeta'(s) = -\sum_{d=1}^{\infty}\Lambda(d)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(dk)^s} = -\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}\right)\left(\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\Lambda(d)}{d^s}\right) = -\zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}$$
D'où le résultat. $\square$

Pour poursuivre la preuve, on montre d'abord un résultat classique d'analyse complexe.

Lemme 1.1. (Lemme de la partie réelle) *Soit F une fonction holomorphe sur un voisinage du disque de centre 0 et de rayon R, telle que $F(0) = 0$. Si $A := \max_{|s|=R}\Re e(F(s))$, alors*
$$\sup_{n\geq 1}\left(\frac{R^n}{n!}\left|F^{(n)}(0)\right|\right) \leq 2A$$

et

$$\forall 0 < r < R, \ \max_{|s|=r} |F(s)| \leq \frac{2Ar}{R-r}$$

Preuve du lemme. On écrit $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n$, valable pour $|s| \leq R$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = |a_n| e^{i\theta_n}$. Alors $\Re e\left(F(Re^{i\theta})\right) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| R^n \cos(n\theta + \theta_n)$, série uniformément convergente pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
Or F est holomorphe au voisinage du disque de centre 0 et de rayon R, et $F(0) = 0$, donc $\int_0^{2\pi} \Re e F(Re^{i\theta}) d\theta = 0$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\pi |a_n| R^n = \int_0^{2\pi} (1 + \cos(n\theta + \theta_n)) \Re e F(Re^{i\theta}) d\theta \leq 2\pi A$$

D'où le résultat. Le second point est une conséquence immédiate du premier. □

Définition 1.3. *On définit la fonction ξ, entière sur $\mathbb{C}$, par*

$$\xi(s) := s(s-1)\pi^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

Théorème 1.2. (Formule du produit de Hadamard) *Il existe des constantes réelles a, b telles que*

$$\begin{aligned} \xi(s) &= e^{as} \prod_{\rho \in \mathrm{Z}} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}}, \quad \forall s \in \mathbb{C} \\ \zeta(s) &= \frac{e^{bs}}{2(s-1)} \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)^{-1} \prod_{\rho \in \mathrm{Z}} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}}, \quad \forall s \neq 1 \end{aligned}$$

Remarque. On peut montrer que la constante b vaut $b = \log 2\pi - 1 - \frac{\gamma}{2}$.

Preuve. D'abord, on admet le résultat suivant (voir [4]), qui provient essentiellement de la formule de Jensen sur les zéros d'une fonction holomorphe : si $N(R) := \# \{\rho \in Z : 0 \leq \Im m(\rho) \leq R\}$, alors pour $R \geq 2$

$$N(R+1) - N(R) = O(\log R) \tag{1}$$

Grâce à ce résultat, on constate que

$$\sum_{\Im m \rho \leq R} \frac{1}{|\rho|^2} \leq 2 \int_0^R \frac{1}{t^2} dN(t) = O\left(\sum_{0 \leq k \leq R} \frac{1}{k^2} \log(2k)\right) = O(1)$$

ce qui assure la convergence du produit infini dans l'énoncé. On peut donc bien définir

$$P(s) := \prod_{\rho \in Z} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}}$$

P est une fonction entière ayant les mêmes zéros que ξ, et $P(0) = \xi(0) = 1$. Donc on peut définir une fonction holomorphe $F(s) := \log\left(\frac{\xi(s)}{P(s)}\right)$ telle que $F(0) = 0$.
Montrons alors qu'il existe une suite (R_n) de réels positifs tendant vers $+\infty$ telle que :

$$\max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \Re e(F(R_n e^{i\theta})) = O_{n \to \infty}(R_n \log^2(R_n))$$

On va choisir R_n de sorte que $\forall n, \min_{\rho \in Z}(|R_n - |\rho||) \geq \frac{1}{C \log R_n}$, où C est une constante strictement positive indépendante de n.

Pour C suffisamment grand, le résultat de répartition globale des zéros (voir (1)) assure que

$$\#\{\rho \in Z : n \leq |\rho| \leq n+2\} \leq [C \log n]$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Et par le "principe des tiroirs", il existe $0 \leq k_n \leq [C \log n]$ tel que l'intervalle réel $\left[n + \frac{2k_n}{[C \log n]}, n + \frac{2k_n+2}{[C \log n]}\right]$ ne contient aucun $|\rho|$. On pose alors $R_n := n + \frac{2k_n+1}{[C \log n]}$, et par construction, cette suite vérifie les propriétés énoncées précédemment, à savoir que :
pour tout $n \geq 2$, $R_n \in [n, n+2]$ et $\min_{\rho \in Z}(|R_n - |\rho||) \geq \frac{1}{C \log R_n}$.
Alors, si $|s| = R_n$,

$$\log |P(s)| = \sum_{\rho} \log \left| \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}} \right| \geq \sum_{|\rho| \leq \frac{R_n}{2}} \frac{R_n}{|\rho|} + \sum_{\frac{R_n}{2} < |\rho| \leq 2R_n} (2 + \log(2CR_n \log R_n)) + \sum_{|\rho| > 2R_n} \frac{R_n^2}{|\rho|^2}$$

grâce aux inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \log |(1-z)e^z| &\geq -|z| \text{ si } |z| \geq 2 \\ \log |(1-z)e^z| &\geq -2 + \log|1-z| \text{ si } \frac{1}{2} \leq |z| < 2 \\ \log |(1-z)e^z| &\geq -|z|^2 \text{ si } |z| < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Alors, grâce au résultat de répartition des zéros (1), on obtient

$$\log |P(s)| = O(R_n (\log R_n)^2)$$

En outre, $\log |\xi(s)| = O(R_n(\log R_n))$, donc

$$\log \left| \frac{\xi(s)}{P(s)} \right| = O(R_n (\log R_n)^2)$$

Ce qui assure que

$$\max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \Re e(F(R_n e^{i\theta})) = O_{n \to \infty}(R_n \log^2(R_n))$$

Donc par le lemme de la partie réelle (lemme 1.1.), on en déduit que

$$\text{pour tout } n, \max_{|s| \leq \frac{R_n}{2}} \left| \frac{F(s)}{s} \right| \leq C' \log^2 R_n$$

Or la fonction $s \mapsto \frac{F(s)}{s}$ est entière, donc le théorème de Liouville assure qu'elle est constante. Donc F est une fonction linéaire, d'où le résultat. $\square$

1.1.3 Zéros de la fonction ζ

La formule de Hadamard (théorème 1.2.) permet d'exprimer ζ en fonction de ses zéros. Il paraît donc naturel de s'intéresser à la répartition des zéros de la fonction ζ.

Lemme 1.2. *Il existe une constante $c > 0$ telle que ζ ne possède aucun zéro dans la région du plan complexe définie par $\sigma \geq 1 - \frac{c}{\log(2+|\tau|)}$.*

Preuve du lemme. On va utiliser le sous-lemme suivant :
Lemme 1.3. (de la Vallée Poussin) *Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive.*
Si $F(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ converge absolument pour $\Re e(s) > \sigma_0$, alors

$$\textit{pour tout } \sigma > \sigma_0, \quad 3F(\sigma) + 4\Re e(F(\sigma + i\tau)) + \Re e(F(\sigma + 2i\tau)) \geq 0$$

Preuve du lemme. Il suffit de poser $f(\theta) := 3 + 4\cos\theta + \cos(2\theta)$, pour $\theta \in \mathbb{R}$. En effet, on remarque alors que

$$3F(\sigma) + 4\Re e(F(\sigma + i\tau)) + \Re e(F(\sigma + 2i\tau)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\sigma} f(\tau \log n)$$

et $f(\theta) = 2(1 + \cos\theta)^2 \geq 0$.
D'où le résultat. □
On va maintenant pouvoir montrer le lemme 1.2. sur les zéros.
Par la formule du produit de Hadamard (théorème 1.2.), on sait que

$$\zeta(s) = \frac{e^{bs}}{2(s-1)} \Gamma\left(\frac{1}{2}s + 1\right)^{-1} \prod_{\rho \in Z} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}}$$

Donc on a :

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -b + \frac{1}{s-1} + \frac{\Gamma'(\frac{1}{2}s + 1)}{2\Gamma(\frac{1}{2}s + 1)} - \sum_{\rho \in Z} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{s - \rho}\right)$$

Or

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(n+x)} - \gamma - \frac{1}{x}$$

Donc pour $\sigma > 1$

$$\Re e\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \leq -b + \Re e\left(\frac{1}{s-1}\right) + \gamma + \Re e\left(\frac{1}{\frac{s}{2}+1}\right) - \sum_{\rho \in Z} \Re e\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{s-\rho}\right)$$

Or, si $\rho \in Z$ et $\sigma \geq 1$, alors $\Re e(\rho)$ et $\Re e(s - \rho)$ sont positifs (car les zéros non triviaux de ζ sont de partie réelle comprise entre 0 et 1), donc finalement

$$-\Re e\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) = O\left(\log|\tau|\right) \text{ pour } |\tau| \geq 2$$

Soit alors $\rho = \alpha + i\beta$ un zéro de ζ. On a alors, en tenant compte de la contribution de ρ,

$$-\Re e\left(\frac{\zeta'(\sigma + i\beta)}{\zeta(\sigma + i\beta)}\right) \leq O\left(\log|\beta|\right) - \frac{1}{\sigma - \alpha}$$

Alors, par le lemme de de la Vallée Poussin (lemme 1.3.), on obtient

$$\frac{3}{\sigma - 1} + O(1) + O\left(\log|\beta|\right) - \frac{4}{\sigma - \alpha} \geq 0$$

Donc il existe $c_1 > 0$ telle que

$$\frac{3}{\sigma - 1} - \frac{4}{\sigma - \alpha} \geq -c_1 \log|\beta|$$

Il suffit alors de prendre $\sigma := 1 + \frac{1}{2c_1 \log|\beta|}$ et $c := \frac{c_1}{14}$, pour obtenir

$$1 - \alpha \geq \frac{c}{\log|\beta|}$$

ce qui est bien le résultat souhaité. □

Lemme 1.4. *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $|\tau| \geq 3, \sigma \geq 1 - \frac{c}{\log|\tau|}$,*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \mathrm{O}(\log|\tau|)$$

Preuve du lemme. On peut supposer $\tau > 0$. Par le lemme de répartition des zéros (lemme 1.2.), il existe $0 < c < \frac{1}{16}$ telle que, si $\rho = \beta + i\gamma$ est un zéro non trivial de ζ, alors $\beta < 1 - \frac{8}{\log(|\gamma|+2)}$.
Montrons que $\min_{\rho \in Z} \Re e\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{s-\rho}\right) \geq 0$, pour $\tau \geq 4, \sigma \geq 1 - \frac{4c}{\log\tau}$.

– Si $|s-\rho| > \frac{1}{2}|\rho|$,
on pose $\theta := 2\frac{|s-\rho|}{|\rho|} \geq 1$. Et on remarque que

$$\Re e\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{s-\rho}\right) = \frac{1}{|s-\rho|^2}\left(\frac{\beta\theta^2}{4}+\sigma-\beta\right) \geq \frac{1}{|s-\rho|^2}\left(\sigma-\frac{3}{4}\right) > 0$$

– Si $|s-\rho| \leq \frac{1}{2}|\rho|$,
alors $|\tau-\gamma| \leq \frac{1}{2}(|\gamma|+1)$, donc $|\gamma| \leq 2\tau+2$.
On en déduit que $\beta < 1-\frac{8c}{\log(2\tau+4)} \leq 1-\frac{4c}{\log\tau} \leq \sigma$, d'où le résultat souhaité.

Or

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -b+\frac{1}{s-1}+\frac{\Gamma'(\frac{1}{2}s+1)}{2\Gamma(\frac{1}{2}s+1)}-\sum_{\rho\in Z}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{s-\rho}\right)$$

et

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n(n+x)}-\gamma-\frac{1}{x}$$

Donc

$$\Re e\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \leq -b+\Re e\left(\frac{1}{s-1}\right)+\gamma+\Re e\left(\frac{1}{\frac{s}{2}+1}\right)-\sum_{\rho\in Z}\Re e\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{s-\rho}\right)$$

Donc avec le résultat que l'on vient de démontrer,

$$-\Re e\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \leq K\log|\tau|$$

uniformément sur l'ensemble considéré.
On se place désormais dans le cas $|\tau| \geq 5, \sigma \geq 1-\frac{c}{\log|\tau|}$, et on pose $s_0 := 1+\frac{c}{\log\tau}+i\tau$.
On remarque que si $|\omega| \leq \frac{4c}{\log\tau}$, alors $s_0+\omega = \sigma'+i\tau'$, avec $\tau' \geq 4$ et $\sigma' \geq 1-\frac{4c}{\log\tau'}$.
Donc en appliquant ce qui précède, la fonction $G(\omega) := \frac{\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)}-\frac{\zeta'(s_0+\omega)}{\zeta(s_0+\omega)}$ vérifie sur $|\omega| \leq \frac{4c}{\log\tau}$ les hypothèses du lemme de la partie réelle (lemme 1.1.). On en déduit donc que

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leq 4K\log\tau+3\left|\frac{\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)}\right|$$

Enfin,

$$\left|\frac{\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{1+\frac{c}{\log\tau}}} = \frac{\log\tau}{c}+O(1) = O(\log\tau)$$

ce qui termine la démonstration. □

1.2 Formule de Perron

Le dernier outil technique dont on aura besoin est la formule de Perron.

Théorème 1.3. (Formule de Perron) *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On pose $F(s) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, et on suppose que la série est absolument convergente pour $\Re(s) > \sigma_0$.*
Notons $A^*(x) := \sum_{n<x} a_n + \frac{1}{2}a_x$, avec $a_x = 0$ si $x \notin \mathbb{N}$.
Alors, pour $\kappa > \max(0,\sigma_0)$, en orientant $\kappa+i\mathbb{R}$ du bas vers le haut,

$$A^*(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa+i\mathbb{R}} F(s)x^s s^{-1}ds$$

Preuve. On prouve d'abord le lemme technique suivant :
Lemme 1.5. *On pose $h(x) := 1$ si $x > 1$, $h(1) := \frac{1}{2}$, $h(x) := 0$ si $0 < x < 1$.*

Alors, pour tous $\kappa, T, T' > 0$,

$$\begin{aligned} \left| h(x) - \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa - iT'}^{\kappa+iT} x^s s^{-1} ds \right| &\leq \frac{x^\kappa}{2\pi |\log x|} \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right) \quad \textit{si } x \neq 1 \\ \left| h(1) - \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa - iT}^{\kappa+iT} s^{-1} ds \right| &\leq \frac{\kappa}{T + \kappa} \end{aligned}$$

Preuve du lemme.

– si $x > 1$:
  pour k assez grand, le rectangle orienté R_k de sommets $\kappa - iT', \kappa + iT, \kappa - k + iT, \kappa - k - iT'$ contient 0.
  Alors, par théorème des résidus,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{R_k} x^s s^{-1} ds = 1 = h(x)$$

  On écrit R_k comme somme des quatre segments orientés $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$, avec $\gamma_1 := [\kappa - iT', \kappa + iT]$, orienté de $\kappa - iT'$ vers $\kappa + iT$, $\gamma_2 := [\kappa + iT, \kappa - k + iT]$, orienté de $\kappa + iT$ vers $\kappa - k + iT$,
  $\gamma_3 := [\kappa - k + iT, \kappa - k - iT']$, orienté de $\kappa - k + iT$ vers $\kappa - k - iT'$ et $\gamma_4 := [\kappa - k - iT', \kappa - iT']$, orienté de $\kappa - k - iT'$ vers $\kappa - iT'$.
  Alors

$$\left| \int_{\gamma_2} x^s s^{-1} ds \right| \leq \frac{x^\kappa}{T |\log x|}, \quad \left| \int_{\gamma_4} x^s s^{-1} ds \right| \leq \frac{x^\kappa}{T' |\log x|}, \quad \left| \int_{\gamma_3} x^s s^{-1} ds \right| \leq \frac{x^{\kappa-k}}{k - \kappa} (T + T')$$

  Or

$$\left| h(x) - \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa - iT'}^{\kappa+iT} x^s s^{-1} ds \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_2} x^s s^{-1} ds + \int_{\gamma_3} x^s s^{-1} ds + \int_{\gamma_4} x^s s^{-1} ds \right|$$

  Donc

$$\left| h(x) - \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa - iT'}^{\kappa+iT} x^s s^{-1} ds \right| \leq \frac{x^\kappa}{2\pi |\log x|} \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right) + \frac{1}{2\pi} \frac{x^{\kappa-k}}{k - \kappa} (T + T')$$

  et on fait tendre k vers l'infini pour avoir le résultat.

– le cas $0 < x < 1$ est symétrique.

– si $x = 1$:
  On a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa - iT}^{\kappa+iT} s^{-1} ds = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{T}{\kappa} \right)$$

  et

$$\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{T}{\kappa} \right) = \int_{\frac{T}{\kappa}}^{\infty} \frac{dt}{1 + t^2} \leq \frac{2}{1 + \frac{T}{\kappa}}$$

  d'où le résultat.

□

Preuve de la formule de Perron.
$\kappa > \sigma_0$, donc $F(s)$ est absolument convergente pour $\Re e(s) = \kappa$. Donc par Fubini,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa - iT'}^{\kappa+iT} F(s) x^s s^{-1} ds = \frac{1}{2i\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{\kappa - iT'}^{\kappa+iT} \left(\frac{x}{n} \right)^s s^{-1} ds$$

Alors, via la première partie du lemme 1.5., si $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa - iT'}^{\kappa+iT} F(s) x^s s^{-1} ds - A^*(x) \right| \leq \frac{x^\kappa}{2\pi} \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\kappa} \left| \log \left(\frac{x}{n} \right) \right|^{-1}$$

Alors il suffit de faire tendre T et T' vers l'infini pour obtenir le résultat.

Dans le cas $x \in \mathbb{N}$, il suffit de remplacer le terme "$\log\left(\frac{x}{x}\right)^{-1}$" par $\frac{\kappa|a_x|}{T+\kappa}$. $\square$

Corollaire 1.1. (Formules de Perron effectives) *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On pose $F(s) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, et on suppose que la série est absolument convergente pour $\Re e(s) > \sigma_0$. Notons $A(x) := \sum_{n\leq x} a_n$.*

1. *si $\kappa > \max(0, \sigma_0)$, $T \geq 1$, $x \geq 1$, alors*

$$A(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} F(s)x^s s^{-1}ds + \mathrm{O}\left(x^\kappa \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\kappa\left(1+T\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right)}\right) \tag{2}$$

2. *on suppose qu'il existe $\alpha \geq 0$ tel que*
   - *$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\sigma} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{(\sigma-\sigma_0)^\alpha}\right)$ pour $\sigma > \sigma_0$.*
   - *il existe B fonction croissante telle que $\forall n, |a_n| \leq B(n)$.*

   Alors pour tout $x \geq 1$, $T \geq 2$, $\sigma \leq \sigma_0$, $\kappa := \sigma_0 - \sigma + \frac{1}{\log x}$,

$$\sum_{n\leq x} a_n n^{-s} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} F(s+\omega)x^\omega \omega^{-1}d\omega + \mathrm{O}\left(x^{\sigma_0-\sigma}\frac{\log x^\alpha}{T} + \frac{B(2x)}{x^\sigma}\left(1 + x\frac{\log T}{T}\right)\right) \tag{3}$$

Preuve.

1. Montrons d'abord que pour $\kappa > 0$ fixé, uniformément en $y > 0, T > 0$,

$$\left|h(y) - \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} y^s s^{-1}ds\right| = O\left(\frac{y^\kappa}{1+T|\log y|}\right) \tag{4}$$

   - si $T|\log y| > 1$, ce résultat provient directement du lemme précédent (lemme 1.5.).
   - sinon :

$$\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} y^s s^{-1}ds = y^\kappa \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} s^{-1}ds + y^\kappa \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} (y^{i\tau}-1)s^{-1}ds$$

   en écrivant $\tau := \Im m(s)$.
   Or

$$\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} (y^{i\tau}-1)s^{-1}ds = O\left(\int_0^T |\tau\log y|\left|s^{-1}\right|d\tau\right) = O\left(T|\log y|\right) = O(1)$$

   et par le lemme 1.5.,

$$\left|h(x) - \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT'}^{\kappa+iT} x^s s^{-1}ds\right| = O\left(x^\kappa\right)$$

   d'où le résultat souhaité (4).

   On applique alors le résultat (4) pour $y := \frac{x}{n}$, et on somme sur $n \geq 1$, après multiplication par a_n. On obtient

$$\left|A(x) - \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} F(s)x^s s^{-1}ds\right| = O\left(x^\kappa \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\kappa\left(1+T\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right)}\right)$$

   ce qui est exactement le résultat voulu.

2. On applique le résultat que l'on vient de montrer à la série $\tilde{F}(u) := \sum_n \frac{a_n}{n^s} n^{-u}$, pour s fixé. Alors

$$\tilde{A}(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \tilde{F}(u)x^u u^{-1}du + O\left(x^\kappa \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\kappa+s}\left(1+T\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right)}\right)$$

– si $n \notin \left[\frac{x}{2}, 2x\right]$, alors
$$\frac{|a_n|}{n^{\kappa+s}\left(1+T\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right)} = O\left(\frac{|a_n|}{Tn^{\kappa}}\right)$$
donc
$$x^{\kappa}\sum_{n\notin\left[\frac{x}{2},2x\right]}\frac{|a_n|}{n^{\kappa+s}\left(1+T\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right)} = O\left(\frac{x^{\sigma_0-\sigma}(\log x)^{\alpha}}{T}\right)$$

– si $\frac{x}{2} \leq n \leq 2x$, alors on note N l'entier le plus proche de x, et $n = N + h$.
Alors $\frac{|h|}{x} = O\left(\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right)$, donc
$$x^{-\sigma}\sum_{\frac{x}{2}\leq n\leq 2x}\frac{|a_n|}{n^{\kappa+s}\left(1+T\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right)} = O\left(\frac{B(2x)}{x^{\sigma}}\sum_{0\leq h\leq x+1}\frac{1}{1+\frac{Th}{x}}\right)$$
Enfin, on a les majorations suivantes :
$$\frac{1}{1+\frac{Th}{x}} \leq 1 \text{ si } h \leq \frac{x}{T}, \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+\frac{Th}{x}} \leq \frac{x}{Th} \text{ sinon.}$$
Donc
$$x^{-\sigma}\sum_{\frac{x}{2}\leq n\leq 2x}\frac{|a_n|}{n^{\kappa+s}\left(1+T\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right)} = O\left(\frac{B(2x)}{x^{\sigma}}\left(1+x\frac{\log T}{T}\right)\right)$$
Finalement, en regroupant les deux majorations concernant les deux parties de la somme, on obtient bien que
$$\sum_{n\leq x}a_n n^{-s} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}F(s+\omega)x^{\omega}\omega^{-1}d\omega + O\left(x^{\sigma_0-\sigma}\frac{\log x^{\alpha}}{T} + \frac{B(2x)}{x^{\sigma}}\left(1+x\frac{\log T}{T}\right)\right)$$

□

1.3 Enoncé et preuve du théorème

Avec les résultats précédents, on est désormais capable de démontrer le théorème des nombres premiers.

Définition 1.4. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on définit $\Psi(x) := \sum_{n\leq x}\Lambda(n)$ et $\pi(x) := \#\{p \leq x\}$*

Historiquement, La Vallée-Poussin et Hadamard ont montré en 1896 que $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$. On va préciser ce résultat.

Définition 1.5. *On appelle logarithme intégrale, et on note* li*, la fonction définie pour $x > 1$, par*
$$\mathrm{li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

Théorème 1.4. (Théorème des nombres premiers) *Il existe une constante $c > 0$ telle que*
$$\Psi(x) = x + \mathrm{O}\left(xe^{-c\sqrt{\log x}}\right) \tag{5}$$
$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + \mathrm{O}\left(xe^{-c\sqrt{\log x}}\right) \tag{6}$$

Preuve. Montrons le résultat (5).
On applique d'abord la seconde formule de Perron effective (corollaire 1.1. (3)), avec $a_n := \Lambda(n)$, $F(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ (sachant que $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}$ pour $\Re e(s) > 1$), en remarquant que $|\Lambda(n)| \leq \log n$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}} = O\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)$ (ce qui revient à prendre $\alpha = 1$ dans la formule de Perron).

Par conséquent, pour $x \geq 2$ et $T \geq 2$, en posant $\kappa := 1 + \frac{1}{\log x}$,

$$\Psi(x) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa - iT}^{\kappa + iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} x^s s^{-1} ds + O\left(\log x \left(1 + \frac{x \log T}{T}\right)\right)$$

Alors, par le lemme 1.2. sur la répartition des zéros, il existe $c_0 > 0$ telle que $s = 1$ est la seule singularité de $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} s^{-1}$ dans le rectangle $|\tau| \leq T, \quad 1 - \frac{c_0}{\log T} \leq \sigma \leq \kappa$.
Le théorème des résidus assure donc

$$-\frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa - iT}^{\kappa + iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} x^s s^{-1} ds = x - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_0} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} x^s s^{-1} ds$$

où γ_0 est le "reste du rectangle précédent", à savoir la ligne brisée $\kappa - iT, 1 - \frac{c_0}{\log T} - iT, 1 - \frac{c_0}{\log T} + iT, \kappa + iT$.
On notera désormais γ_1, γ_2 et γ_3 les trois segments "orientés" formant γ_0.
Or, par le résultat de majoration (lemme 1.4.) montré plus haut, on sait que sur γ_0, $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\log T)$. Donc, pour $j = 1$ ou 3,

$$\int_{\gamma_j} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} x^s s^{-1} ds = O\left(\frac{x \log T}{T}\right)$$

et

$$\int_{\gamma_2} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} x^s s^{-1} ds = O\left(x e^{-c_0 \frac{\log x}{\log T}} \log^2 T\right)$$

Il suffit alors de prendre $T = e^{\sqrt{c_0 \log x}}$ pour obtenir

$$\int_{\gamma_0} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} x^s s^{-1} ds = O\left(x e^{-c\sqrt{\log x}}\right)$$

pour tout $0 < c < \sqrt{c_0}$, ce qui permet de conclure la preuve du point (5).
Pour le point (6), il suffit de faire une sommation d'Abel, i.e. une intégration par parties : en effet, si $S(x) := \sum_{p \leq x} \log p$, on remarque que $S(x) = O(x)$ et $\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} S(x^{\frac{1}{n}})$, donc on en déduit que $S(x) = \Psi(x) + O(\sqrt{x})$, et par le résultat précédent (5), $S(x) = x + \eta(x)$, avec $\eta(x) = O\left(x e^{-c\sqrt{\log x}}\right)$. Or $\pi(x) = \int_2^x \frac{dS(t)}{\log t}$, donc $\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + \int_2^x \frac{d\eta(t)}{\log t}$, donc en intégrant par parties :

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + \frac{\eta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\eta(t)}{\log^2 t} dt + C'$$

où C' est une constante indépendante de x. Alors, avec la majoration de η, on conclut que
$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O\left(x e^{-c\sqrt{\log x}}\right)$. □

Dans la suite de l'exposé, on admettra le résultat plus précis suivant (voir les travaux de Vinogradov et Korobov sur la région sans zéros, en 1958) :

Théorème 1.5. *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $c_\epsilon > 0$ telle que*

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= x + \mathrm{O}_\epsilon\left(x \exp\left(-c_\epsilon (\log x)^{\frac{3}{5} - \epsilon}\right)\right) \\ \pi(x) &= \mathrm{li}(x) + \mathrm{O}_\epsilon\left(x \exp\left(-c_\epsilon (\log x)^{\frac{3}{5} - \epsilon}\right)\right) \end{aligned}$$

2 Entiers friables

2.1 Introduction

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on notera $P_+(n)$ le plus grand facteur premier de n.

Définition 2.1. *Pour $x, y \in \mathbb{R}^+$, on note $\Psi(x,y)$ le nombre d'entiers naturels inférieurs à x, dont tous les facteurs premiers sont inférieurs à y, i.e. $\Psi(x,y) := \#\{n \in \mathbb{N}^* : n \le x, P_+(n) \le y\}$.*

L'objectif de cette partie est de parvenir à une estimation asymptotique assez précise de $\Psi(x,y)$, à l'aide d'une fonction régulière connue. Pour cela, on aura besoin plusieurs fois de l'équation fonctionnelle suivante, que l'on appellera égalité fondamentale.

Proposition 2.1. (Egalité fondamentale) *Pour tout $x, y \ge 1$,*

$$\Psi(x,y)\log x = \int_1^x \frac{\Psi(t,y)}{t}dt + \sum_{\substack{p^m \le x \\ p \le y}} \Psi\left(\frac{x}{p^m}, y\right)\log p$$

Preuve. Posons $S(x,y) := \sum_{n\le x, P_+(n)\le y} \log n$. Calculons cette quantité de deux manières différentes. On a d'abord

$$S(x,y) = \sum_{\substack{n\le x \\ P_+(n)\le y}} \left(\sum_{p^m|n} \log p\right) = \sum_{p^m\le x} \log p \left(\sum_{\substack{n\le x \\ P_+(n)\le y \\ p^m|n}} 1\right)$$

D'où

$$S(x,y) = \sum_{p^m\le x} \Psi\left(\frac{x}{p^m}, y\right)\log p$$

D'autre part, si $d\Psi(t,y)$ désigne la mesure de Stieljes associée à la fonction $\Psi(.,y)$, on a :

$$S(x,y) = \int_1^x \log(t)d\Psi(t,y) = \log(x)\Psi(x,y) - \int_1^x \frac{\Psi(t,y)}{t}dt$$

en intégrant par parties.
Finalement, en comparant les deux expressions de $S(x,y)$, on obtient le résultat. □

On introduit aussi la fonction de Dickman, qui interviendra dans les principaux résultats.

Définition 2.2. *La fonction de Dickman est la solution continue sur $\mathbb{R}^+$ du système suivant*

$$\begin{array}{rcll} \rho(u) & = & 1 & \textit{si } 0 \le u \le 1 \\ -u\rho'(u) & = & \rho(u-1) & \textit{si } u > 1 \end{array}$$

Remarque. Il y a plus de cinquante ans, Dickman a montré que pour tout $u > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\Psi(x, x^{1/u})}{x} = \rho(u)$$

C'est ce résultat que l'on cherche à préciser.

2.2 Lemmes techniques

Lemme 2.1. *La fonction ρ satisfait*

$$\rho(u) = 1 - \log u \ \textit{pour } 1 \le u \le 2 \tag{7}$$

$$u\rho(u) = \int_{u-1}^u \rho(t)dt \ \textit{pour } u \ge 1 \tag{8}$$

$$0 < \rho(u) \le 1 \ \textit{pour } u \ge 0 \tag{9}$$

$$\rho(u) \text{ est strictement décroissante pour } u \geq 1 \tag{10}$$

$$-\rho'(u)/\rho(u) \leq \log(u \log^2 u) \text{ pour } u \geq e^4 \tag{11}$$

$$\rho(u-t)/\rho(u) = O((u \log^2(u+1))^t) \text{ pour } u \geq 1 \text{ et } 0 \leq t \leq u \tag{12}$$

Preuve du lemme. Par la définition de ρ pour $0 \leq u \leq 1$ on a, pour $1 \leq u \leq 2$,

$$\rho(u) = \rho(1) + \int_1^u \rho'(t)dt = \rho(1) - \int_1^u \frac{\rho(t-1)}{t}dt = 1 - \int_1^u \frac{1}{t}dt = 1 - \log u$$

ce qui prouve (7).
La relation (8) vient du fait que les deux membres ont la même dérivée $\rho(u) - \rho(u-1)$ et que l'égalité est vraie pour u=1.
Les propriétés (9) et (10) sont des conséquences de (8) et de ce que $\rho(u) = 1$ pour $0 \leq u \leq 1$.
Prouvons (11) : Soit f la dérivée logarithmique de $1/\rho(u)$:

$$f(u) = -\frac{\rho'(u)}{\rho(u)} = \frac{\rho(u-1)}{u\rho(u)} \text{ pour } u \geq 1$$

Par (9), $f(u) > 0$ pour $u > 1$, et par (8) on a

$$u = \int_{u-1}^u \frac{\rho(t)}{\rho(u)}dt = \int_{u-1}^u \exp\left(\int_t^u f(s)ds\right)dt \text{ pour } u \geq 2$$

Montrons que f est strictement croissante : pour $1 < u \leq 2$, par (7) on a

$$f(u) = \frac{\rho(u-1)}{u\rho(u)} = \frac{1}{u(1-\log u)}$$

qui est strictement croissant pour $1 < u \leq 2$.
Si $u > 2$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(u)} &= \frac{u\rho(u)}{\rho(u-1)} = u\exp\left(-\int_{u-1}^u f(s)ds\right) = \left(\int_{u-1}^u \exp\left(\int_t^u f(s)ds\right)dt\right)\exp\left(-\int_{u-1}^u f(s)ds\right) \\ &= \int_{u-1}^u \exp\left(-\int_{u-1}^t f(s)ds\right)dt = \int_0^1 \exp\left(-\int_{u-1}^{u-1+t} f(s)ds\right)dt \end{aligned}$$

En dérivant des deux cotés on a

$$\frac{f'(u)}{f^2(u)} = \int_0^1 \exp\left(-\int_{u-1}^{u-1+t} f(s)ds\right)(f(u-1+t) - f(u-1))dt$$

Comme f est continue et est strictement croissante pour $1 < u \leq 2$, il s'ensuit que $f'(u) > 0$ pour $2 < u \leq 2+\delta$ avec $\delta > 0$.
Donc f est strictement croissante pour $1 < u \leq 2 + \delta$. Par induction, on conclut que f est strictement croissante pour $u > 1$.
On a donc maintenant, pour $u \geq 2$,

$$u = \int_{u-1}^u \exp\left(\int_t^u f(s)ds\right)dt \geq \int_{u-1}^u \exp((u-t)f(u-1))dt = \frac{e^{f(u-1)} - 1}{f(u-1)}$$

La fonction $\phi(x) = (e^x - 1)/x$ étant croissante pour $x > 0$ et puisque $\phi(\log((u-1)\log^2(u-1))) \geq u$ pour $u \geq e^4$, on a

$$f(u-1) \leq \log((u-1)\log^2(u-1)) \text{ dès que } u - 1 \geq e^4$$

ce qui prouve (11). Enfin, pour $u \geq e^4$ et $0 \leq t \leq u - e^4$, on a

$$\frac{\rho(u-t)}{\rho(u)} = \exp\left(\int_{u-t}^u f(s)ds\right) \leq \exp\left(\int_{u-t}^u \log(s\log^2 s)ds\right) \leq \exp\left(\int_{u-t}^u \log(u\log^2 u)ds\right) = (u\log^2 u)^t$$

Donc comme pour $0 \leq u \leq e^4$, $\rho(u)$ est encadré par deux constantes strictement positives, $\rho(u-t)/\rho(u)$ est dominé par $(u \log^2(u+1))^t$, ce qui achève la preuve. $\square$

Lemme 2.2. *Pour $y \geq 1.5$ et $1 \leq u \leq \sqrt{y}$,*

$$\int_0^u \rho(u-t) y^{-t} dt = \mathrm{O}\left(\frac{\rho(u)}{\log y}\right)$$

Preuve du lemme. Par l'assertion (12) du lemme 2.1. et comme $1 \leq u \leq \sqrt{y}$, on a

$$\frac{1}{\rho(u)} \int_0^u \rho(u-t) y^{-t} dt = O\left(\int_0^u \left(\frac{u \log^2(u+1)}{y}\right)^t dt\right)$$

$$\int_0^u \left(\frac{u \log^2(u+1)}{y}\right)^t dt \leq \int_0^{\sqrt{y}} \left(\frac{\log^2(\sqrt{y}+1)}{\sqrt{y}}\right)^t dt$$

On définit

$$A_y := \frac{\log^2(\sqrt{y}+1)}{\sqrt{y}}$$

On a alors

$$\int_0^{\sqrt{y}} A_y^t dt = \frac{A_y^{\sqrt{y}} - 1}{\log A_y}$$

$$\log A_y \sim -\frac{1}{2} \log y$$

$$\sqrt{y} \log A_y \to -\infty$$

Donc on a bien

$$\int_0^{\sqrt{y}} A_y^t dt = O\left(\frac{1}{\log y}\right)$$

ce qui prouve le lemme. $\square$

Lemme 2.3. *Pour $y \geq 1.5$ et $1 \leq u \leq y^{1/4}$,*

$$\sum_{p \leq y < p^m \leq y^u} \frac{\log p}{p^m} \rho\left(u - \frac{\log p^m}{\log y}\right) = \mathrm{O}\left(\rho(u)\right)$$

Preuve du lemme. On peut prendre $y_0 \geq 1.5$ et supposer $y \geq y_0$ car pour y et u bornés c'est clair. Par l'assertion (12) du lemme 2.1., on a

$$\frac{1}{\rho(u)\log y} \sum_{p \leq y < p^m \leq y^u} \frac{\log p}{p^m} \rho\left(u - \frac{\log p^m}{\log y}\right) = O\left(\sum_{p \leq y < p^m \leq y^u} \frac{\log p}{p^m \log y} \frac{\rho\left(u - \frac{\log p^m}{\log y}\right)}{\rho(u)}\right)$$

$$= O\left(\sum_{p \leq y < p^m \leq y^u} \frac{1}{p^m} \frac{\rho\left(u - \frac{\log p^m}{\log y}\right)}{\rho(u)}\right) = O\left(\sum_{p \leq y < p^m \leq y^u} \frac{1}{p^m} (u \log^2(u+1))^{\frac{\log p^m}{\log y}}\right)$$

$$= O\left(\sum_{p \leq y < p^m \leq y^u} \frac{1}{p^{m(1-\alpha)}}\right) = O\left(\sum_{p \leq y < p^m} \frac{1}{p^{m(1-\alpha)}}\right)$$

où

$$\alpha = \frac{\log(u \log^2(u+1))}{\log y} \leq \frac{1}{4} + \frac{\log(\log^2(y^{1/4}+1))}{\log y}$$

Donc pour y_0 suffisamment grand, on a $\alpha \leq 1/3$, et

$$\sum_{p \leq y < p^m} \frac{1}{p^{m(1-\alpha)}} \leq \sum_{p \leq y < p^m} \frac{1}{p^{2m/3}} \leq \sum_{\substack{p \leq \sqrt{y} \\ m \geq 3}} \frac{1}{y^{m/3}} + \sum_{\substack{\sqrt{y} < p \leq y \\ m \geq 2}} \frac{1}{p^{2m/3}}$$

donc

$$\sum_{p \leq y < p^m} \frac{1}{p^{m(1-\alpha)}} = O\left(\sum_{p \leq \sqrt{y}} \frac{1}{y} + \sum_{\sqrt{y} < p} \frac{1}{p^{4/3}}\right) = O\left(y^{-1/2} + y^{-1/3}\right) = O\left(\frac{1}{\log y}\right)$$

ce qui prouve le lemme. □

Lemme 2.4. *Pour tout $\epsilon > 0$ on a uniformément pour $y \geq 1.5$, $u \geq 1$ et $0 \leq \theta \leq 1$*

$$\sum_{p^m \leq y^\theta} \frac{\log p}{p^m} \rho\left(u - \frac{\log p^m}{\log y}\right) = (\log y) \int_{u-\theta}^{u} \rho(t) dt + \mathrm{O}_\epsilon\left(\rho(u)(1 + u \log^2(u+1) \exp(-(\log y)^{3/5-\epsilon}))\right)$$

Remarque. l'exposant 3/5 du terme d'erreur vient directement du théorème des nombres premiers.

Preuve du lemme. Soit S le membre gauche de la formule ci-dessus.
Pour tout $\epsilon > 0, y > 0$, on note $L_\epsilon(y) := \exp\left(-(\log x)^{\frac{3}{5}-\epsilon}\right)$. On définit

$$m(t) := \frac{1}{y^t} \sum_{p^m \leq y^t} \log p = 1 + O_\epsilon(L_\epsilon(y))$$

par le théorème des nombres premiers (théorème 1.5.) .

$$S = \int_0^\theta (y^{-t} \rho(u-t)) \underbrace{\left(\sum (\log p) \delta_{p^m = y^t}\right)}_{\frac{d}{dt}(m(t)y^t)} = m(\theta)\rho(u-\theta) - \int_0^\theta m(t) y^t \frac{d}{dt}(y^{-t}\rho(u-t))dt$$

par intégration par parties (ou sommation d'Abel). En remplacant l'estimation de m dans S, on a $S = M + R$, avec

$$\begin{aligned} M &= \rho(u-\theta) - \int_0^\theta y^t \frac{d}{dt}(y^{-t}\rho(u-t))dt = \rho(u-\theta) + \int_0^\theta (\rho'(u-t) + (\log y)\rho(u-t))dt \\ &= \rho(u) + (\log y) \int_{u-\theta}^{u} \rho(t) dt \end{aligned}$$

et

$$R = O_\epsilon\left(\rho(u-\theta) L_\epsilon(y^\theta) + \int_0^\theta |\rho'(u-t) + (\log y)\rho(u-t)| L_\epsilon(y^t) dt\right)$$

Il suffit donc de montrer que R est dominé par le terme d'erreur de l'énoncé du lemme 2.4..
Soit $U = \log(u \log^2(u+1))$ et $V = \log y$. Il faut montrer

$$R = O_\epsilon\left(\rho(u)(1 + \exp(U - V^{3/5-\epsilon}))\right)$$

En utilisant les points (11) et (12) du lemme 2.1., on a

$$\begin{aligned} \rho(u-\theta) &= O(\rho(u)\exp(\theta U)) \\ \rho(u-t) &= O(\rho(u)\exp(tU)) \\ \rho'(u-t) &= O(U\rho(u)\exp(tU)) \end{aligned}$$

Donc

$$R = O_\epsilon\left(\rho(u)\exp(\theta U - (\theta V)^{3/5-\epsilon}) + \rho(u)(U+V)\int_0^\theta \exp(tU - (tV)^{3/5-\epsilon})dt\right)$$

Le premier terme est de l'ordre voulu. De plus, si $U \leq \frac{1}{2}V^{3/5-\epsilon}$, et en supposant ϵ borné, on a

$$\begin{aligned}\rho(u)(U+V)\int_0^1 \exp(tU-(tV)^{3/5-\epsilon})dt &\leq \rho(u)(U+V)\int_0^1 \exp\left(-\frac{1}{2}(tV)^{3/5-\epsilon}\right)dt\\ &\leq \rho(u)\frac{U+V}{V}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}t^{3/5-\epsilon}\right)dt = O\left(\rho(u)\right)\end{aligned}$$

qui est aussi de l'ordre voulu.
Dans le cas $U > \frac{1}{2}V^{3/5-\epsilon}$, on a

$$\int_0^1 \exp(tU-(tV)^{3/5-\epsilon})dt \leq \int_{1/2}^1 \exp\left(tU - \left(\frac{1}{2}V\right)^{3/5-\epsilon}\right)dt + \int_0^{1/2}\exp(tU)dt$$

$$= \frac{1}{U}\left(\int_{U/2}^U \exp\left(t-\left(\frac{1}{2}V\right)^{3/5-\epsilon}\right)dt + \int_0^{U/2} e^t dt\right) = O\left(\frac{1}{U}\left(\exp\left(U-\left(\frac{1}{2}V\right)^{3/5-\epsilon}\right)+e^{U/2}\right)\right)$$
$$\leq O\left(\frac{1}{U}\left(\exp\left(U-\left(\frac{1}{2}V\right)^{3/5-\epsilon}\right)+\exp\left(U-\left(\frac{1}{4}V\right)^{3/5-\epsilon}\right)\right)\right) = O_\epsilon\left(\frac{1}{U+V}\exp(U-V^{3/5-2\epsilon})\right)$$

ce qui termine la preuve. □

2.3 Premier résultat

Ce premier théorème donne une estimation de $\Psi(x,y)$ en fonction de $\rho(u)$, où u désigne $\frac{\log x}{\log y}$.

Théorème 2.1. *Pour tout $\epsilon > 0$, on a l'estimation suivante*

$$\Psi(x, x^{\frac{1}{u}}) = x\rho(u)\left(1 + \mathrm{O}_\epsilon\left(\frac{u\log(u+1)}{\log x}\right)\right)$$

uniformément pour $x \geq 3, 1 \leq u \leq \frac{\log x}{(\log\log x)^{\frac{5}{3}+\epsilon}}$.

Remarque. L'exposant $\frac{5}{3}$ vient en fait du terme d'erreur dans le théorème des nombres premiers. On peut la remplacer par toute constante $c > 1$ telle que le théorème des nombres premiers est vérifié avec un terme d'erreur en $O\left(\exp\left(-(\log x)^{\frac{1}{c}}\right)\right)$.

Preuve. On définit les quantités suivantes

$$\Delta(y,u) := \frac{\Psi(y^u, y)}{y^u\rho(u)} - 1$$

i.e.

$$\Psi(y^u, y) = y^u\rho(u)\left(1 + \Delta(y,u)\right)$$

Et pour $u \geq \frac{1}{2}$, on pose

$$\Delta^*(y,u) := \sup_{\frac{1}{2}\leq u'\leq u}|\Delta(y,u')|$$

qui est le terme que l'on cherche à maitriser, et

$$\Delta^{**}(y,u) := \sup_{0\leq u'\leq u}|\Delta(y,u')|$$

Montrons que $\Delta^*(y,u) = O_\epsilon\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right)$, uniformément pour $y \geq \frac{3}{2}$, $\frac{1}{2} \leq u \leq M_\epsilon(y)$, où $M_\epsilon(y)$ désigne $\exp\left((\log y)^{\frac{3}{5}-\epsilon}\right)$, ce qui implique immédiatement le théorème (en prenant $y = x^{\frac{1}{u}}$).
Pour montrer ce résultat, on se limite d'abord au cas $\frac{1}{2} \leq u \leq 2$, puis on étend par récurrence cette première estimation au domaine souhaité grâce à l'égalité fondamentale (proposition 2.1.), qui permet de se ramener à u petit.

– si $0 \leq u \leq 1$:
alors $\Psi(y^u, y) = [y^u]$, car $y^u \leq y$. En outre, $\rho(u) = 1$ donc $\Delta(y,u) = \frac{[y^u]}{y^u} - 1$.
Donc $|\Delta(y,u)| \leq y^{-u}$, donc il existe $C_\epsilon > 0$ tel que

$$\forall \frac{1}{2} \leq u \leq 1, \quad \forall y \geq 1, \qquad |\Delta(y,u)| \leq \frac{1}{\sqrt{y}} \leq C_\epsilon \frac{\log(u+1)}{\log(y)}$$

Donc on a montré le résultat pour $y \geq \frac{3}{2}$, $\frac{1}{2} \leq u \leq 1$.

– si $1 < u \leq 2$:
alors, par le lemme 2.1., on a $\rho(u) = 1 - \log u$.
Et $\Psi(y^u, y) = \#\{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq y^u\} - \#\{k \in \mathbb{N} : y < k \leq y^u, \exists p > y, p|k\}$, i.e. :

$$\Psi(y^u, y) = [y^u] - \sum_{y<p\leq y^u} \left[\frac{y^u}{p}\right] = [y^u]\left(1 - \sum_{y<p\leq y^u} \frac{\left[\frac{y^u}{p}\right]}{[y^u]}\right)$$

On pose alors $\alpha_p(y,u) := \left[\frac{y^u}{p}\right]/[y^u]$, et $S_{y,u} := \sum_{y<p\leq y^u} \alpha_p(y,u)$.
On remarque que $\frac{1}{p} - \frac{1}{y^u} \leq \alpha_p(y,u) \leq \frac{1}{p}\frac{1}{1-\frac{1}{y^u}}$, donc, en posant $U(x,y) := \sum_{x<p\leq y} \frac{1}{p}$, on obtient $U(y, y^u) - y^{-u}(\pi(y^u) - \pi(y)) \leq S_{y,u} \leq \frac{1}{1-1/y^u} U(y, y^u)$.
Or, en intégrant par parties, on obtient

$$U(x,y) = \frac{\pi(y)}{y} - \frac{\pi(x)}{x} + \int_x^y \frac{\pi(t)}{t^2}dt$$

et le théorème des nombres premiers (théorème 1.4) assure que

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(x \exp(-c\sqrt{\log x}))$$

où c est une constante positive. On en déduit que $U(y, y^u) = \log u + O(\frac{1}{\log y})$, et $y^{-u}(\pi(y^u) - \pi(y)) = O(\frac{1}{\log y})$.
Par conséquent, via l'encadrement précédent, on obtient

$$\Psi(y^u, y) = y^u\left(1 - \log u + O\left(\frac{1}{\log y}\right)\right) = y^u\rho(u)\left(1 + O\left(\frac{1}{\log y}\right)\right)$$

On a donc montré le résultat sur $y \geq \frac{3}{2}$, $\frac{1}{2} \leq u \leq 2$.

– Cas général : $u \geq 2$:
Afin de se ramener aux cas précédents, on utilise l'identité fondamentale (proposition 2.1.) sur la fonction Ψ : pour $x, y \geq 1$,

$$\Psi(x,y)\log x = \int_1^x \frac{\Psi(t,y)}{t}dt + \sum_{\substack{p^m \leq x \\ p \leq y}} \Psi\left(\frac{x}{p^m}, y\right)\log p$$

On fixe $y \geq \frac{3}{2}$ et $u \geq \frac{3}{2}$.
On a alors :

$$\Psi(y^u, y)\log(y^u) = \int_1^{y^u} \frac{\Psi(t,y)}{t}dt + \sum_{\substack{p^m \leq y^u \\ p \leq y}} \Psi\left(\frac{y^u}{p^m}, y\right)\log p$$

On divise par $\rho(u)y^u\log(y^u)$:

$$1+\Delta(y,u)=\frac{1}{\rho(u)y^u\log(y^u)}\int_1^{y^u}\rho\left(\frac{\log t}{\log y}\right)\left(1+\Delta\left(y,\frac{\log t}{\log y}\right)\right)dt$$
$$+\frac{1}{\rho(u)\log(y^u)}\sum_{\substack{p^m\leq y^u\\ p\leq y}}\frac{\log p}{p^m}\rho\left(u-\frac{\log p^m}{\log y}\right)\left(1+\Delta\left(y,u-\frac{\log p^m}{\log y}\right)\right)$$

Or, par le lemme 2.1.(8), si $\alpha(u):=\frac{1}{u\rho(u)}\int_{u-\frac{1}{2}}^{u}\rho(t)dt$, alors $1-\alpha(u)=\frac{1}{u\rho(u)}\int_{u-1}^{u-\frac{1}{2}}\rho(t)dt$.
Et $\forall t\in[1,y^u]$, $\left|\Delta\left(y,\frac{\log t}{\log y}\right)\right|\leq\Delta^{**}(y,u)$, et $\forall p^m\leq y^u$, $\left|\Delta\left(y,u-\frac{\log p^m}{\log y}\right)\right|\leq\Delta^{**}(y,u)$.
Donc on obtient

$$\begin{aligned}|\Delta(y,u)| &\leq (1+\Delta^{**}(y,u))\left(\frac{1}{\rho(u)y^u\log(y^u)}\int_1^{y^u}\rho\left(\frac{\log t}{\log y}\right)dt+\frac{1}{\rho(u)\log(y^u)}\sum_{\substack{y<p^m\leq y^u\\ p\leq y}}\frac{\log p}{p^m}\rho\left(u-\frac{\log p^m}{\log y}\right)\right)\\ &+\left|\frac{1}{\rho(u)\log(y^u)}\sum_{p^m\leq y}\frac{\log p}{p^m}\rho\left(u-\frac{\log p^m}{\log y}\right)\left(1+\Delta\left(y,u-\frac{\log p^m}{\log y}\right)\right)-1\right|\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}|\Delta(y,u)| &\leq (1+\Delta^{**}(y,u))\left(R_1(y,u)+R_2(y,u)\right)\\ &+\left|\frac{1}{\rho(u)\log(y^u)}\sum_{p^m\leq\sqrt{y}}\frac{\log p}{p^m}\rho\left(u-\frac{\log p^m}{\log y}\right)-\alpha(u)\right|\\ &+\left|\frac{1}{\rho(u)\log(y^u)}\sum_{\sqrt{y}<p^m\leq y}\frac{\log p}{p^m}\rho\left(u-\frac{\log p^m}{\log y}\right)-(1-\alpha(u))\right|\\ &+\Delta^*(y,u)\frac{1}{\rho(u)\log(y^u)}\sum_{p^m\leq\sqrt{y}}\frac{\log p}{p^m}\rho\left(u-\frac{\log p^m}{\log y}\right)\\ &+\Delta^*\left(y,u-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\rho(u)\log(y^u)}\sum_{\sqrt{y}<p^m\leq y}\frac{\log p}{p^m}\rho\left(u-\frac{\log p^m}{\log y}\right)\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}R_1(y,u) &:= \frac{1}{\rho(u)y^u\log(y^u)}\int_1^{y^u}\rho\left(\frac{\log t}{\log y}\right)dt\\ R_2(y,u) &:= \frac{1}{\rho(u)\log(y^u)}\sum_{\substack{y\leq p^m\leq y^u\\ p\leq y}}\frac{\log p}{p^m}\rho\left(u-\frac{\log p^m}{\log y}\right)\end{aligned}$$

Si on pose également

$$\begin{aligned}R_3(y,u) &:= \left|\frac{1}{\rho(u)\log(y^u)}\sum_{p^m\leq\sqrt{y}}\frac{\log p}{p^m}\rho\left(u-\frac{\log p^m}{\log y}\right)-\alpha(u)\right|\\ R_4(y,u) &:= \left|\frac{1}{\rho(u)\log(y^u)}\sum_{\sqrt{y}<p^m\leq y}\frac{\log p}{p^m}\rho\left(u-\frac{\log p^m}{\log y}\right)-(1-\alpha(u))\right|\end{aligned}$$

Il reste alors

$$\begin{aligned}
|\Delta(y,u)| &\le (1+\Delta^{**}(y,u))\,(R_1(y,u)+R_2(y,u))+R_3(y,u)+R_4(y,u)\\
&+ \Delta^*(y,u)\frac{1}{\rho(u)\log(y^u)}\sum_{p^m\le\sqrt{y}}\frac{\log p}{p^m}\rho\left(u-\frac{\log p^m}{\log y}\right)\\
&+ \Delta^*\left(y,u-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\rho(u)\log(y^u)}\sum_{\sqrt{y}<p^m\le y}\frac{\log p}{p^m}\rho\left(u-\frac{\log p^m}{\log y}\right)
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
|\Delta(y,u)| &\le (1+\Delta^{**}(y,u))\,(R_1(y,u)+R_2(y,u)+R_3(y,u)+R_4(y,u))\\
&+ \Delta^*(y,u)\alpha(u)+\Delta^*\left(y,u-\frac{1}{2}\right)(1-\alpha(u))
\end{aligned}$$

Or $R_1(y,u)=\frac{1}{u\rho(u)}\int_0^u\rho(u-s)y^{-s}ds$ après changement de variables, et le lemme 2.2. donne donc $R_1(y,u)=O\left(\frac{1}{u\log y}\right)$, uniformément pour $y\ge\frac{3}{2}, 1\le u\le\sqrt{y}$.
De même, par le lemme 2.3., on a $R_2(y,u)=O(\frac{1}{u\log y})$ uniformément pour $y\ge\frac{3}{2},\quad 1\le u\le y^{\frac{1}{4}}$.
Or on remarque que pour y suffisamment grand, $u\le M_\epsilon(y)$ entraîne $u\le y^{\frac{1}{4}}$, donc on a bien $R_i(y,u)=O\left(\frac{1}{u\log y}\right)$, uniformément pour $y\ge\frac{3}{2}, u\le M_\epsilon(y)$, pour $i=1,2$. En outre, en utilisant le lemme 2.4. avec $\theta=\frac{1}{2}$ et quitte à remplacer ϵ par $\frac{\epsilon}{2}$, on obtient

$$\frac{1}{\rho(u)\log(y^u)}\sum_{p^m\le\sqrt{y}}\frac{\log p}{p^m}\rho\left(u-\frac{\log p^m}{\log y}\right)=\alpha(u)+O\left(\frac{1}{u\log y}\right)$$

i.e. $R_3(y,u)=O(\frac{1}{u\log y})$, uniformément pour $y\ge\frac{3}{2},\quad 1\le u\le M_\epsilon(y)$.
De la même façon (avec $\theta=1$), $R_4(y,u)=O(\frac{1}{u\log y})$, uniformément pour $y\ge\frac{3}{2},\quad 1\le u\le M_\epsilon(y)$.
Enfin, $\Delta^{**}(y,u)\le 1+\Delta^*(y,u)$ si $u\ge\frac{1}{2}$, donc finalement :

$$(1+\Delta^{**}(y,u))\,(R_1(y,u)+R_2(y,u)+R_3(y,u)+R_4(y,u))=O\left(\frac{1+\Delta^*(y,u)}{u\log y}\right)$$

uniformément sur l'ensemble souhaité.
Et on constate que la quantité $\left(\frac{1}{2}-\alpha(u)\right)\left(\Delta^*(y,u)-\Delta^*\left(y,u-\frac{1}{2}\right)\right)$ est positive car $\alpha(u)\le\frac{1}{2u\rho(u)}\int_{u-1}^u\rho(t)dt=\frac{1}{2}$, et à y fixé, la fonction $\Delta^*(y,.)$ est croissante. On en déduit

$$\frac{1}{2}\left(\Delta^*(y,u)+\Delta^*\left(y,u-\frac{1}{2}\right)\right)\ge\alpha(u)\Delta^*(y,u)+(1-\alpha(u))\Delta^*\left(y,u-\frac{1}{2}\right)$$

Donc

$$|\Delta(y,u)|\le\frac{1}{2}\left(\Delta^*(y,u)+\Delta^*\left(y,u-\frac{1}{2}\right)\right)+O\left(\frac{1+\Delta^*(y,u)}{u\log y}\right)$$

uniformément pour $y\ge\frac{3}{2},\quad\frac{1}{2}\le u\le M_\epsilon(y)$.
On prend désormais $u\ge 2$ et $u-\frac{1}{2}\le u'\le u$.
$\Delta^*(y,.)$ est croissante, donc

$$|\Delta(y,u')|\le\frac{1}{2}\left(\Delta^*(y,u')+\Delta^*\left(y,u'-\frac{1}{2}\right)\right)+O\left(\frac{1+\Delta^*(y,u')}{u'\log y}\right)$$

implique

$$|\Delta(y,u')|\le\frac{1}{2}\left(\Delta^*(y,u)+\Delta^*\left(y,u-\frac{1}{2}\right)\right)+O\left(\frac{1+\Delta^*(y,u)}{u\log y}\right)$$

et cette inégalité est claire si $\frac{1}{2} \leq u' \leq u - \frac{1}{2}$. Donc

$$\Delta^*(y,u) \leq \frac{1}{2}\left(\Delta^*(y,u) + \Delta^*\left(y, u - \frac{1}{2}\right)\right) + O\left(\frac{1+\Delta^*(y,u)}{u\log y}\right)$$

et donc on obtient le résultat suivant, qui permet bien de raisonner par récurrence :

$$\Delta^*(y,u) \leq \Delta^*\left(y, u - \frac{1}{2}\right) + O\left(\frac{1+\Delta^*(y,u)}{u\log y}\right)$$

uniformément pour $y \geq \frac{3}{2}, 2 \leq u \leq M_\epsilon(y)$. Une récurrence immédiate assure que

$$\Delta^*(y,u) \leq \Delta^*(y,u_0) + O\left(\frac{\log u}{\log y}(1+\Delta^*(y,u))\right)$$

pour un $u_0 \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$.
On s'est donc bien ramené au cas u petit.
Les deux premières étapes de la preuve donnent $\Delta^*(y,u_0) = O(\frac{1}{\log y})$, indépendamment de u, et donc

$$\Delta^*(y,u) = O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}(1+\Delta^*(y,u))\right)$$

uniformément sur l'ensemble souhaité, i.e.

$$\Delta^*(y,u) = O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right)$$

□

2.4 Deuxième résultat

Ce deuxième résultat donne quant à lui une estimation de $\log\left(\frac{\Psi\left(x, x^{\frac{1}{u}}\right)}{x}\right)$, sur un domaine plus vaste que dans le premier.

Théorème 2.2. *Pour tout $\epsilon > 0$, on a l'estimation suivante*

$$\log\left(\frac{\Psi\left(x, x^{\frac{1}{u}}\right)}{x}\right) \geq \log(\rho(u)) + \mathrm{O}_\epsilon\left(u\exp\left(-(\log u)^{\frac{3}{5}-\epsilon}\right)\right)$$

uniformément pour $x \geq 1, u \geq 1$.

Conséquence uniformément pour $1 \leq u \leq (1-\epsilon)\frac{\log x}{\log\log x}$,

$$\log\left(\frac{\Psi\left(x, x^{\frac{1}{u}}\right)}{x}\right) = \log(\rho(u))\left(1 + O_\epsilon\left(\exp\left(-(\log u)^{\frac{3}{5}-\epsilon}\right)\right)\right)$$

Preuve. La preuve est analogue à celle du théorème précédent : l'idée consiste toujours à se ramener au cas u petit à l'aide de l'égalité fondamentale (proposition 2.1.).
On définit pour $y \geq \frac{3}{2}, u \geq 0$, $c(y,u) := \frac{\Psi(y^u,y)}{y^u\rho(u)}$, et $c^*(y,u) := \inf_{0\leq u'\leq u}|c(y,u')|$. Il suffit alors de montrer que

$$c^*(y,u) \geq \exp\left(O_\epsilon\left(uL_\epsilon(u)\right)\right)$$

uniformément pour $x \geq 1, u \geq 1$.

Via l'identité fondamentale (proposition 2.1.), on écrit

$$\begin{aligned} c(y,u) &= \frac{1}{\rho(u) y^u \log(y^u)} \int_1^{y^u} \rho\left(\frac{\log t}{\log y}\right) c\left(y, \frac{\log t}{\log y}\right) dt \\ &+ \frac{1}{\rho(u)\log(y^u)} \sum_{\substack{p^m \leq y^u \\ p \leq y}} \frac{\log p}{p^m} \rho\left(u - \frac{\log p^m}{\log y}\right) c\left(y, u - \frac{\log p^m}{\log y}\right) \end{aligned}$$

D'où

$$c(y,u) \geq \frac{1}{\rho(u)\log(y^u)} \sum_{p^m \leq y} \frac{\log p}{p^m} \rho\left(u - \frac{\log p^m}{\log y}\right) c\left(y, u - \frac{\log p^m}{\log y}\right)$$

et donc, avec les notations de la preuve précédente,

$$c(y,u) \geq (\alpha(u) - R_3(y,u)) c^*(y,u) + (1 - \alpha(u) - R_4(y,u)) c^*\left(y, u - \frac{1}{2}\right)$$

En outre, $\left(c^*\left(y, u - \frac{1}{2}\right) - c^*(y,u)\right)\left(\frac{1}{2} - \alpha(u)\right) \geq 0$, donc

$$\alpha(u) c^*(y,u) + (1 - \alpha(u)) c^*\left(y, u - \frac{1}{2}\right) \geq \frac{1}{2}\left(c^*\left(y, u - \frac{1}{2}\right) + c^*(y,u)\right)$$

D'où

$$c(y,u) \geq \frac{1}{2}\left(c^*\left(y, u - \frac{1}{2}\right) + c^*(y,u)\right) - R_3(y,u) c^*(y,u) - R_4(y,u) c^*\left(y, u - \frac{1}{2}\right)$$

Or, par le lemme 2.4., pour $i = 3, 4$,

$$R_i(y,u) = O_\epsilon\left(\frac{1}{u \log y} + \frac{u \log^2(u+1)}{u \log y} L_\epsilon(y)\right)$$

et donc

$$R_i(y,u) = O_\epsilon(R(\epsilon, y, u))$$

avec

$$R(\epsilon, y, u) := \frac{1}{u \log y} + log^2(u) L_\epsilon(y)$$

On obtient donc

$$c(y,u) \geq \frac{1}{2}\left(c^*\left(y, u - \frac{1}{2}\right) + c^*(y,u)\right)(1 + O_\epsilon(R(\epsilon, y, u)))$$

On prend désormais $u \geq \frac{3}{2}$ et $u - \frac{1}{2} \leq u' \leq u$.
Alors

$$c(y,u') \geq \frac{1}{2}\left(c^*\left(y, u - \frac{1}{2}\right) + c^*(y,u)\right)(1 + O_\epsilon(R(\epsilon, y, u)))$$

et ce résultat est clair si $0 \leq u' \leq u - \frac{1}{2}$. On en déduit donc

$$c^*(y,u) \geq \frac{1}{2}\left(c^*\left(y, u - \frac{1}{2}\right) + c^*(y,u)\right)(1 + O_\epsilon(R(\epsilon, y, u)))$$

i.e.

$$c^*(y,u) \geq c^*\left(y, u - \frac{1}{2}\right)(1 + O_\epsilon(R(\epsilon, y, u)))$$

uniformément pour $y, u \geq \frac{3}{2}$. C'est ce résultat qui permet de démontrer le théorème par réurrence, en se ramenant à de petites valeurs de u.

On prend maintenant $0 < \epsilon \leq \frac{1}{2}$, $\frac{3}{2} \leq u \leq y^2$, avec $y \geq y_0$, où y_0 est suffisamment grand pour que $\forall y \geq y_0$, $\forall \frac{3}{2} \leq u \leq y$, $O_\epsilon(R(\epsilon, y, u))) \leq \frac{1}{2}$. Alors par récurrence et grâce au résultat précédent, on montre que

$$c^*(y,u) \geq c^*(y,u_0) \exp\left(O_\epsilon\left(\sum_{0\leq n\leq 2u-1} R\left(\epsilon, y, u - \frac{n}{2}\right)\right)\right)$$

avec $1 \leq u_0 \leq \frac{3}{2}$. Donc

$$c^*(y,u) \geq c^*(y,u_0) \exp\left(O_\epsilon\left(\frac{\log u}{\log y} + u\log^2(u)\exp\left(-\left(\frac{1}{2}\log u\right)^{\frac{3}{5}-\epsilon}\right)\right)\right)$$

D'où

$$c^*(y,u) \geq c^*(y,u_0) \exp\left(O_\epsilon\left(u\exp\left(-\left(\frac{1}{2}\log u\right)^{\frac{3}{5}-2\epsilon}\right)\right)\right)$$

ce qui est bien le résultat souhaité pour $y \geq y_0, 1 \leq u \leq y^2$, puisque $c(y,u') = 1 + O\left(\frac{1}{\rho(u')\log y}\right)$ pour $1 \leq u' \leq 2$.
Dans le cas $u > y^2$ ou $\frac{3}{2} \leq y < y_0$, on a $y^u\rho(u) = O(1)$, puisque $\rho(u) \leq \frac{1}{[u]!}$ par le lemme 2.1.(8). Donc le résultat reste valable. □

2.5 Troisième résultat

Ce troisième théorème donne un résultat plus original sur la fonction Ψ, en estimant son accroissement.

Théorème 2.3. *Pour tout $\epsilon > 0$, on a l'estimation suivante*

$$\Psi\left(x + \frac{x}{z}, y\right) - \Psi(x,y) = \frac{x}{z}\rho\left(\frac{\log x}{\log y}\right)\left(1 + \mathrm{O}_\epsilon\left(\frac{\log\left(1 + \frac{\log x}{\log y}\right)}{\log y}\right)\right)$$

uniformément pour $x \geq 3$, $\log x \geq \log y \geq (\log\log x)^{\frac{5}{3}+\epsilon}$, $1 \leq z \leq y^{\frac{5}{12}}$.

Reformulation uniformément pour $x \geq 3$, $\log x \geq \log y \geq (\log\log x)^{\frac{5}{3}+\epsilon}$, $\frac{x}{y^{5/12}} \leq h \leq x$, si u désigne $\frac{\log x}{\log y}$, alors

$$\Psi(x+h,y) - \Psi(x,y) = h\rho(u)\left(1 + O_\epsilon\left(\frac{\log(1+u)}{\log y}\right)\right)$$

Remarque. La condition $z \leq y^{\frac{5}{12}}$ semble difficile à élargir, puisqu'elle repose sur la forme la plus précise du théorème des nombres premiers de Hoheisel, que l'on admettra dans cette preuve.

Preuve. La méthode est la même que précédemment. On définit pour $y \geq 1$, $u \geq \frac{1}{2}$, $0 < h \leq \frac{1}{2}$,

$$\Delta_h(y,u) := \frac{\Psi(y^u,y) - \Psi(y^u(1-h),y)}{hy^u\rho(u)} - 1$$

et

$$\Delta_h^*(y,u) := \sup_{\frac{1}{2}\leq u'\leq u} |\Delta_h(y,u')|$$

Il suffit alors de montrer que

$$\Delta_h^*(y,u) = O_\epsilon\left(\frac{\log(1+u)}{\log y}\right)$$

pour $y \geq \frac{3}{2}$, $\frac{1}{2} \leq u \leq M_\epsilon(y)$, $y^{\frac{-5}{12}} \leq h \leq \frac{1}{2}$, où $M_\epsilon(y)$ désigne $\exp\left((\log y)^{\frac{3}{5}-\epsilon}\right)$. En effet, pour en déduire le théorème, il suffit de poser $x := y^u(1-h)$ et $z := \frac{1}{h} - 1$.

– si $\frac{1}{2} \leq u \leq 1$:
alors

$$\Psi(y^u, y) - \Psi(y^u(1-h), y) = \#\{n \in \mathbb{N} : y^u(1-h) < n \leq y^u\} = hy^u + O(1)$$

On a donc bien le résultat souhaité dès que h et y vérifient les conditions

$$y \geq \frac{3}{2}, \quad \frac{1}{2} \leq u \leq M_\epsilon(y), \quad y^{\frac{-5}{12}} \leq h \leq \frac{1}{2}$$

puisque l'on a bien $\Delta_h^*(y, u) = O(1)$.

– si $1 \leq u \leq 2$:
dans ce cas, $\Psi(y^u, y) - \Psi(y^u(1-h), y) = \sum_{y^u(1-h) < n \leq y^u} 1 - \sum_{y^u(1-h) < pm \leq y^u, y < p \leq y^u} 1$.
D'où

$$\Psi(y^u, y) - \Psi(y^u(1-h), y) = hy^u + O(1) - \sum_{m \leq y^u} \left(\sum_{y \vee \frac{y^u(1-h)}{m} < p \leq \frac{y^u}{m}} 1 \right)$$

où $a \vee b$ désigne $\max(a, b)$, i.e

$$\Psi(y^u, y) - \Psi(y^u(1-h), y) = hy^u + O(1) - \sum_{m \leq y^{u-1}} \left(\pi\left(\frac{y^u}{m}\right) - \pi\left(y \vee \frac{y^u(1-h)}{m}\right) \right)$$

$$\begin{aligned} \Psi(y^u, y) - \Psi(y^u(1-h), y) &= hy^u + O(1) - \sum_{m \leq y^{u-1}(1-h)} \left(\pi\left(\frac{y^u}{m}\right) - \pi\left(\frac{y^u(1-h)}{m}\right) \right) \\ &- \sum_{y^{u-1}(1-h) < m \leq y^{u-1}} \left(\pi\left(\frac{y^u}{m}\right) - \pi(y) \right) \end{aligned}$$

Alors, avec le théorème des nombres premiers de Hoheisel, que l'on admet ici (on peut le démontrer par des méthodes de crible), on a le résultat suivant :

$$\pi(x + y) - \pi(x) = \frac{y}{\log x}\left(1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right)$$

pour $x^{\frac{7}{12}} \leq y \leq x$.
D'où, par choix de h et y,

$$\Psi(y^u, y) - \Psi(y^u(1-h), y) = hy^u + O(1)$$

$$- \sum_{m \leq y^{u-1}(1-h)} \frac{\frac{hy^u}{m}}{(1-h)\log\left(\frac{y^u}{m}(1-h)\right)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\log\left(\frac{y^u}{m}(1-h)\right)}\right) + O\left(\sum_{y^{u-1}(1-h) < m \leq y^{u-1}} \frac{hy^u}{m} \log\left(\frac{y^u}{m}\right)\right)\right)$$

donc

$$\begin{aligned} \Psi(y^u, y) - \Psi(y^u(1-h), y) &= hy^u + O(1) - \sum_{m \leq y^{u-1}} \frac{hy^u}{m \log\left(\frac{y^u}{m}\right)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\log y}\right)\right) \\ &+ O\left(\sum_{y^{u-1}(1-h) < m \leq y^{u-1}} \frac{hy^u}{m \log\left(\frac{y^u}{m}\right)} \right) \end{aligned}$$

Si $d\,[t]$ est la mesure de Stieljes associée à la fonction partie entière, on remarque que

$$\sum_{m \leq y^{u-1}} \frac{1}{m \log\left(\frac{y^u}{m}\right)} = \int_1^{y^{u-1}} \frac{d\,[t]}{t \log\left(\frac{y^u}{t}\right)}$$

En intégrant par parties,

$$\sum_{m\le y^{u-1}} \frac{1}{m\log\left(\frac{y^u}{m}\right)} = \frac{\left[y^{u-1}\right]}{y^{u-1}\log y} - \frac{1}{u\log y} + \int_1^{y^{u-1}} \frac{[t]\left(\log\left(\frac{y^u}{t}\right)-\frac{1}{t}\right)}{t^2\log^2\left(\frac{y^u}{t}\right)}dt$$

Donc

$$\sum_{m\le y^{u-1}} \frac{1}{m\log(\frac{y^u}{m})} = \int_1^{y^{u-1}} \frac{dt}{t\log\left(\frac{y^u}{t}\right)} + O\left(\frac{1}{\log y}\right) = \log u + O\left(\frac{1}{\log y}\right)$$

On en déduit alors

$$\Psi(y^u,y)-\Psi(y^u(1-h),y) = hy^u\left(1-\log u + O\left(\frac{1}{\log y}\right)\right) + O(1)$$

i.e.

$$\Psi(y^u,y)-\Psi(y^u(1-h),y) = hy^u\rho(u)\left(1+O\left(\frac{1}{\log y}\right)\right)$$

d'où le résultat pour $1\le u\le 2$.

– cas général :
On utilise à nouveau l'identité fondamentale (proposition 2.1.).

$$\begin{aligned}(\Psi(y^u,y)-\Psi(y^u(1-h),y))\log(y^u) - \Psi(y^u(1-h),y)\log(1-h) &= \int_{y^u(1-h)}^{y^u}\frac{\Psi(t,y)}{t}dt \\ &+ \sum_{\substack{p^m\le y^u\\ p\le y}}\left(\Psi\left(\frac{y^u}{p^m},y\right)-\Psi\left(\frac{y^u(1-h)}{p^m},y\right)\right)\log p\end{aligned}$$

Or

$$\left|\int_{y^u(1-h)}^{y^u}\frac{\Psi(t,y)}{t}dt + \Psi(y^u(1-h),y)\log(1-h)\right| = \int_{y^u(1-h)}^{y^u}\frac{1}{t}\left(\Psi(y^u(1-h),y)-\Psi(t,y)\right)dt$$

car $\Psi(.,y)$ est croissante. Donc

$$\left|\int_{y^u(1-h)}^{y^u}\frac{\Psi(t,y)}{t}dt + \Psi(y^u(1-h),y)\log(1-h)\right| \le \int_{y^u(1-h)}^{y^u}\frac{1}{t}h\rho(u)y^u\left(1+|\Delta_h(y,u)|\right)dt$$

i.e.

$$\begin{aligned}\left|\int_{y^u(1-h)}^{y^u}\frac{\Psi(t,y)}{t}dt + \Psi(y^u(1-h),y)\log(1-h)\right| &\le h\rho(u)y^u\left(1+|\Delta_h(y,u)|\right)\log\left(\frac{1}{1-h}\right) \\ &\le Ch\rho(u)y^u\left(1+\Delta_h^*(y,u)\right)\end{aligned}$$

où C est une constante. Et pour $u\ge\frac{3}{2}$, $\quad h\ge y^{-\frac{5}{12}}$,

$$\sum_{\substack{y<p^m\le y^u\\ p\le y}}\left(\Psi\left(\frac{y^u}{p^m},y\right)-\Psi\left(\frac{y^u(1-h)}{p^m},y\right)\right)\log p$$

$$\begin{aligned}&\le (1+\Delta_h^*(y,u))hy^u\sum_{\substack{y<p^m\le y^{u-\frac{1}{2}}\\ p\le y}}\rho\left(u-\frac{\log p^m}{\log y}\right)\frac{\log p}{p^m} + \sum_{\substack{y^{u-\frac{1}{2}}<p^m\le y^u\\ p\le y}}\left(\frac{hy^u}{p^m}+1\right)\log p \\ &\le (1+\Delta_h^*(y,u))hy^u\sum_{\substack{y<p^m\le y^u\\ p\le y}}\rho\left(u-\frac{\log p^m}{\log y}\right)\frac{\log p}{p^m} + hy^u y^{\frac{1}{12}}\end{aligned}$$

On en déduit que

$$1+\Delta_h(y,u)=\frac{1}{\rho(u)\log y^u}\sum_{\substack{p^m\le y^u\\ p\le y}}\left(1+\Delta_h\left(y,u-\frac{\log p^m}{\log y}\right)\right)\rho\left(u-\frac{\log p^m}{\log y}\right)\frac{\log p}{p^m}$$
$$+O_\epsilon\left(\frac{1+\Delta_h^*(y,u)}{u\log y}\left(\frac{1}{\rho(u)}\sum_{\substack{y<p^m\le y^u\\ p\le y}}\rho\left(u-\frac{\log p^m}{\log y}\right)\frac{\log p}{p^m}+1\right)\right)$$

sur l'ensemble souhaité.
On en déduit donc

$$|\Delta_h(y,u)|\le\frac{1}{2}\Delta_h^*(y,u)+\frac{1}{2}\Delta_h^*\left(y,u-\frac{1}{2}\right)+O_\epsilon\left(\frac{1+\Delta_h^*(y,u)}{u\log y}\right)$$

pour $u\ge\frac{3}{2}$.
On en déduit pour $u\ge 2$,

$$|\Delta_h^*(y,u)|\le\frac{1}{2}\Delta_h^*(y,u)+\frac{1}{2}\Delta_h^*\left(y,u-\frac{1}{2}\right)+O_\epsilon\left(\frac{1+\Delta_h^*(y,u)}{u\log y}\right)$$

Alors, par une récurrence, il existe u_0 dans l'intervalle $\left[\frac{3}{2},2\right]$ tel que

$$|\Delta_h^*(y,u)|\le\Delta_h^*(y,u_0)+O_\epsilon\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right)=O_\epsilon\left(\frac{1+\log u}{\log y}\right)$$

et cela assure le résultat annoncé.

$\square$

Références

[1] G. Tenenbaum et M. Mendès France. *Que sais-je ? Les nombres premiers.* P.U.F., 1997.

[2] A. Hildebrand. On the number of positive integers $\le x$ and free of prime factors $> y$. *Journal of number theory*, 22, 289-307, 1986.

[3] E. Hlawka. *Geometric and analytic number theory.* Berlin New York Paris Springer, 1991.

[4] G. Tenenbaum. *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres.* Paris Société Mathématique de France, Cours spécialisés 1, 1995.