

# Introduction au domaine de recherche : implémentation et utilisation d'évolutions de surfaces

Thomas Deneux

9 octobre 2002

## 1 Introduction

Un grand nombre de problèmes de traitement d'image fait appel à l'utilisation de surfaces (par le terme générique de surface j'entends une variété de codimension 1 dans une image : ce sera donc un contour dans un espace à 2 dimensions ou une surface en dimension 3), et plus particulièrement à la construction d'une surface satisfaisant certaines propriétés. Il s'agit par exemple des problèmes de segmentation d'image (séparer les différents objets présents dans une image, c'est à dire en retrouver les bords), de reconstruction de surfaces à partir d'un échantillon de points dans l'espace...

Des techniques récentes utilisent des techniques d'évolution de surfaces : une surface initiale  $\mathcal{S}_0$  se déforme jusqu'à épouser la forme souhaitée  $\mathcal{S}^*$ .

Dans l'exemple de la figure (1), qui va être développé dans cette section, on cherche à retrouver, à partir d'une image 3D du cerveau obtenue par IRM, la forme de ce cerveau. On voit bien comment une surface est initialisée sous forme de 4 sphères et va évoluer jusqu'à épouser la forme du cerveau recherchée.

## 2 Formalisme de l'évolution de surfaces

Le formalisme communément adopté est emprunté à la physique : on commence par définir une énergie  $\mathcal{E}(\mathcal{S})$  dépendant de la surface  $\mathcal{S}$  et éventuellement d'autres paramètres qui soit minimale pour la surface recherchée  $\mathcal{S}^*$ .

On cherche alors, partant d'une surface initiale  $\mathcal{S}_0$ , à la déformer continuellement (on note  $\mathcal{S}_t$  la surface au temps  $t > 0$ ) de manière à ce que son énergie diminue, jusqu'à atteindre un minimum ; on a alors trouvé la surface optimale recherchée si ce minimum n'est pas un minimum local.

La déformation se calcule en appliquant le schéma d'Euler-Lagrange décrit ci-dessous par un exemple.

Précisons d'abord la notion suivante : la *déformation infinitésimale* d'une surface donnée est décrite par le déplacement infinitésimal de chacun de ses points le long de la normale à la surface (on ne considère pas le déplacement des points de la surface tangentiellement à cette dernière puisqu'ils n'affectent pas la forme globale de la surface). Ainsi, si on note  $\mathbf{n}(x)$  la normale extérieure à la surface au point  $x$ , le déplacement de ce point est donné par sa vitesse normale  $\beta(x)$  :

$$\mathbf{v}(x) = \beta(x)\mathbf{n}(x).$$

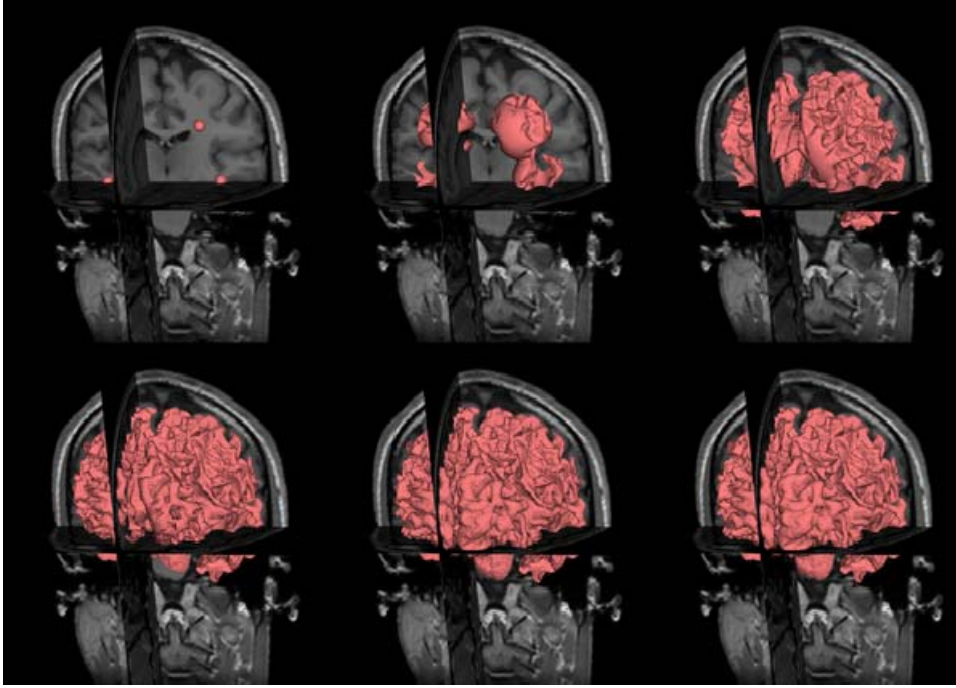


Figure 1: Segmentation de la surface du cortex - travail de José Gomes

**Définition 1.** On appelle dérivée de la fonctionnelle  $\mathcal{E}(S)$  par rapport à la vitesse de déformation de la surface  $\mathbf{v}$  la quantité, notée  $\langle \mathcal{E}(S)', \mathbf{v} \rangle$ , telle que pour une déformation infinitésimale  $\mathbf{v}dt$  de  $S$  la variation infinitésimale correspondante de  $\mathcal{E}$  soit égale à  $\langle \mathcal{E}(S)', \mathbf{v} \rangle dt$ .

Prenons l'exemple classique de l'énergie égale à la longueur de la courbe (en dimension 2) :  $\mathcal{E}(S_t) = |\mathcal{S}_t|$ . Cette énergie est minimale pour une courbe nulle. On choisit un paramétrage de la courbe  $\Gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  (avec  $\Gamma(1) = \Gamma(0)$ , la courbe étant un contour fermé); l'énergie s'écrit alors :

$$\mathcal{E}(S_t) = \int_{[0,1]} |\Gamma'(u)| du.$$

On considère une déformation infinitésimale  $d\Gamma$  du contour.

$$d\Gamma(x) = \mathbf{v}(x)dt = \beta(x)\mathbf{n}(x)dt$$

(la courbe décrite par le paramétrage  $\Gamma$  à l'instant  $t$  sera décrite par le paramétrage  $(\Gamma + d\Gamma)$  à l'instant  $(t + dt)$ )

L'énergie à  $t + dt$  est alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(S_{t+dt}) &= \int_{[0,1]} |\Gamma'(u) + d\Gamma'(u)| du \\ &= \int_{[0,1]} |\Gamma'(u)| du + \int_{[0,1]} d\Gamma'(u) \cdot \frac{\Gamma'(u)}{|\Gamma'(u)|} du \end{aligned}$$

où  $\frac{\Gamma'(u)}{|\Gamma'(u)|} = \mathbf{t}(x)$ , la tangente à la courbe en  $x$ .  
 Et par intégration par partie on obtient :

$$\begin{aligned} d\mathcal{E}(\mathcal{S}) &= \mathcal{E}(\mathcal{S}_{t+dt}) - \mathcal{E}(\mathcal{S}_t) \\ &= [\mathbf{d}\Gamma(u) \cdot \mathbf{t}(u)]_0^1 - \int_{[0,1]} \mathbf{d}\Gamma(u) \cdot \mathbf{t}'(u) du \\ &= 0 - \int_{[0,1]} (\beta(\Gamma(u)) \mathbf{n}(\Gamma(u)) d t) \cdot (\kappa(\Gamma(u)) |\Gamma'(u)| \mathbf{n}(\Gamma(u))) du \\ &= - \int_{\mathcal{S}} \beta(x) \kappa(x) ds(x) dt, \end{aligned}$$

où  $\kappa(x)$  est le rayon de courbure de la courbe en  $x$ .

La dérivée de l'énergie  $\mathcal{E}(\mathcal{S})$  par rapport à une vitesse de déformation  $v$  est donc

$$\langle \mathcal{E}'(\mathcal{S}), \mathbf{v} \rangle = - \int_{\mathcal{S}} \beta(x) \kappa(x) ds(x)$$

Pour minimiser l'énergie de la courbe, on choisira donc comme vitesse normale de déformation :

$$\beta(x) = \kappa(x).$$

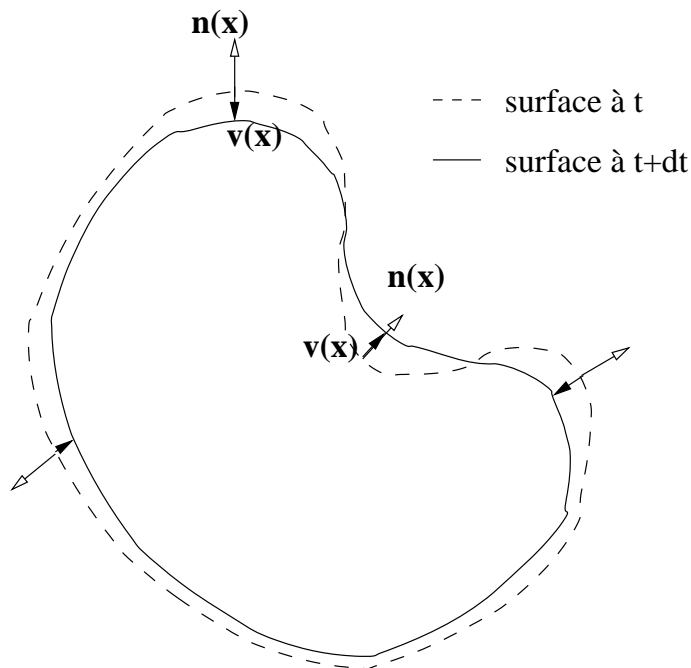


Figure 2: Exemple de déformation selon la courbure de la surface

### 3 Représentation implicite des surfaces

Comment implémenter une telle évolution de surface ?

Il est très commode de représenter une surface de manière implicite : alors que les méthodes

explicites pour représenter une surface  $\mathcal{S}$  consistent à stocker effectivement les coordonnées de points de  $\mathcal{S}$  et comment ces points sont reliés entre eux par des segments (pour des courbes) ou facettes (pour de vraies surfaces), les méthodes implicites consistent à définir une fonction continue  $\phi$  dans tout l'espace, dont  $\mathcal{S}$  est le niveau zéro. On appelle cette fonction  $\phi$  'levelset'. Typiquement, elle est initialisée comme la distance à  $\mathcal{S}$  signée (négative à l'intérieur de  $\mathcal{S}$  et positive à l'extérieur).

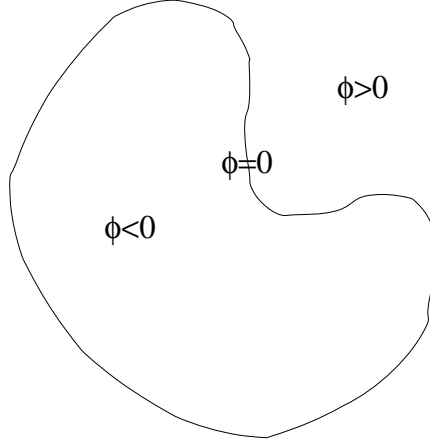


Figure 3: Représentation implicite d'une surface :  $\mathcal{S} = \{x/\phi(x) = 0\}$

La déformation de la surface  $\mathcal{S}$  en  $x$  selon la vitesse normale  $\beta(x)$  est alors réalisée par :

$$d\phi(x) = -\beta(x)|\nabla\phi(x)|dt.$$

Il faut évidemment faire évoluer la fonction  $\phi$  dans toute l'image de manière propre pour qu'elle reste bien différentiable au niveau de la surface. José Gomes dans [3] propose, pour tout point  $y$  dans l'image, de prendre :

$$d\phi(y) = -\beta(x)|\nabla\phi(y)|dt,$$

où  $x$  est le point de la surface le plus proche de  $y$ , ce qui fait en sorte que  $\phi$  reste la fonction distance signée à  $\mathcal{S}$ .

Reprenons l'exemple précédent de l'énergie égale à la longueur de la courbe. On a  $\beta(x) = \kappa(x)$ , la courbure de la surface en  $x$ . Il faut maintenant passer à la formulation 'levelset' de cette équation d'évolution : sur  $\{x, \phi(x) = 0\}$  on doit avoir :

$$\frac{d\phi}{dt} = -\kappa(x)|\nabla\phi(x)|dt.$$

On peut retrouver directement la valeur de la courbure en  $x$  à partir de la fonction de levelset  $\phi$  :

$$\begin{aligned} K &= \phi_x^2\phi_{yy} - 2\phi_x\phi_y\phi_{xy} + \phi_y^2\phi_{xx} \\ \beta(x) &= \frac{K}{(\phi_x^2 + \phi_y^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{K}{\phi_x^2 + \phi_y^2}dt.$$

Dans ce rapport on ne s'intéressera pas aux subtilités de cette représentation et de son implémentation, à part en annexe. On se contentera donc de caractériser les évolutions de surfaces par la donnée des vitesses normales de leurs points  $\beta(x)$ .

## 4 Exemple : la segmentation du cortex sur des images d'IRM

J'ai travaillé au cours de mon stage sur la segmentation d'images d'IRM du cerveau. Les images sont des images en 3 dimensions de la tête obtenues par résonance magnétique, c'est à dire des matrices en 3 dimensions de voxels ayant chacun une couleur (en intensité de niveau de gris). L'intensité de niveau de gris d'un point dépend des propriétés de résonance magnétique de la matière en ce point, qui sont différentes pour les différentes parties du cerveau : matière blanche, matière grise, liquide encéphalo-rachidien, boîte crânienne... , ce qui nous permet de chercher dans l'image la surface du cortex, c'est à dire les frontières entre matière blanche et matière grise, et entre matière grise et liquide encéphalo-rachidien. J'ai travaillé à partir de la thèse de José Gomes [2], qui a étudié ce sujet et créé une librairie C++ pour l'implémentation de ces méthodes.

On désire donc retrouver dans l'image les surfaces  $\mathcal{S}^1$  et  $\mathcal{S}^2$  qui segmentent cette dernière en trois régions : si on note  $\Omega_1$  l'intérieur de  $\mathcal{S}^1$  et  $\Omega_2$  l'intérieur de  $\mathcal{S}^2$ , ces trois régions sont la matière blanche ( $\Omega_1$ ), la matière grise ( $\Omega_2 \cap \Omega_1^C$ ) et l'extérieur du cortex ( $\Omega_2^C$ ).

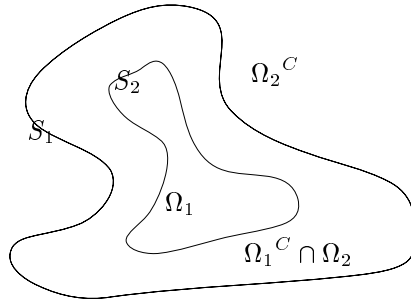


Figure 4: matière blanche, matière grise et extérieur du cortex

On définit une énergie qui doit être minimisée pour la segmentation correcte. Cette énergie contient 3 termes :

$$\mathcal{E}(\mathcal{S}^1, \mathcal{S}^2) = \lambda_1 \mathcal{E}_1 + \lambda_2 \mathcal{E}_2 + \lambda_3 \mathcal{E}_3$$

J'explicité ces trois termes en même temps que je calcule leur dérivée pour en déduire les évolutions correspondantes.

Le premier terme tire parti du fait que les trois matières considérées n'ont pas les mêmes intensités de niveau de gris dans l'image. On décide donc à l'avance de 2 seuils  $s_1$  et  $s_2 < s_1$  tels que la matière blanche corresponde aux intensités de niveau de gris  $I(x) > s_1$ , la matière grise aux intensités  $s_2 < I(x) < s_1$  et l'extérieur aux intensités  $I(x) < s_2$ . On définit alors l'énergie à minimiser par :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(\mathcal{S}^1, \mathcal{S}^2) = & (|\Omega_1 \cap \{I(x) < s_1\}| + |\Omega_1^C \cap \{I(x) > s_1\}|) \\ & + (|\Omega_2 \cap \{I(x) < s_2\}| + |\Omega_2^C \cap \{I(x) > s_2\}|). \end{aligned}$$

Une déformation  $\mathbf{v}$  de  $\mathcal{S}^1$  entraîne une variation d'énergie

$$d\mathcal{E}_1 = \int_{\mathcal{S}^1} (\chi_{I(x) < s_1} - \chi_{I(x) > s_1}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} ds.$$

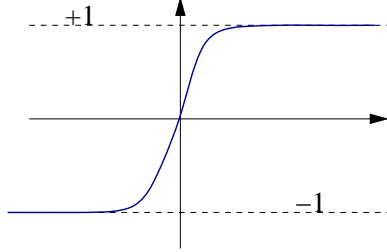
Ce qui conduit, pour minimiser  $\mathcal{E}_1$ , à la vitesse normale d'évolution pour la première surface :

$$\beta_1(x) = (\chi_{I(x) > s_1} - \chi_{I(x) < s_1}).$$

En réalité on prend :

$$\beta_1^1(x) = h(I(x) - s_1),$$

où  $h$  est une fonction de la forme :



De même, pour minimiser  $\mathcal{E}_1$ , on fait évoluer la seconde surface selon la vitesse normale :

$$\beta_1^2(x) = h(I(x) - s_2).$$

En fait, ne prendre en compte que le terme d'énergie précédent reviendrait à effectuer un seuillage de l'image selon les valeurs  $s_1$  et  $s_2$  ( $\mathcal{E}_1$  est nulle si on a exactement

$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_1 = \{I(x) > s_1\} \\ \Omega_1^C \cap \Omega_2 = \{s_2 < I(x) < s_1\} \\ \Omega_2^C = \{I(x) < s_2\} \end{array} \right.$ ). Pour obtenir une segmentation correcte, il faut im-

poser d'autres contraintes, notamment faire en sorte que les surfaces soient lisses. Cela se fait classiquement en minimisant la mesure de leur surface :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2(\mathcal{S}^1, \mathcal{S}^2) &= |\mathcal{S}^1| + |\mathcal{S}^2| \\ &= \int_{\mathcal{S}^1} ds(x) + \int_{\mathcal{S}^2} ds(x). \end{aligned}$$

Les évolutions correspondantes sont données par les courbures des surfaces, de manière analogue à ce qui a été calculé dans la première partie pour des contours :

$$\beta_2(x) = \kappa(x),$$

où  $\kappa(x)$  est la moyenne des deux courbures principales de la surface en  $x$ .

Enfin, le troisième terme tire parti du fait que la matière grise étant d'épaisseur à peu près constante le long du cortex, on peut guider les deux surfaces de manière à ce qu'elles soient à distance constante l'une de l'autre. On décide donc à l'avance de la distance optimale  $\epsilon$ , et on introduit l'énergie :

$$\mathcal{E}_3(\mathcal{S}^1, \mathcal{S}^2) = \int_{s^1} (d(x, \mathcal{S}^2) - \epsilon)^2 ds(x) + \int_{s^2} (d(x, \mathcal{S}^1) - \epsilon)^2 ds(x)$$

José Gomes en déduit les termes d'évolution des deux surfaces

$$\begin{aligned} \beta_3^1(x) &= d(x, \mathcal{S}^2) - \epsilon \\ \beta_3^2(x) &= -(d(x, \mathcal{S}^1) - \epsilon) \end{aligned}$$

Le programme consiste donc à initialiser deux surfaces à l'intérieur de la matière blanche et à les laisser évoluer de manière simultanée selon les vitesses normales :

$$\beta^1(x) = \lambda_1 h(I(x) - s_1) + \lambda_2 \kappa(x) + \lambda_3 (d(x, \mathcal{S}^2) - \epsilon)$$

$$\beta^2(x) = \lambda_1 h(I(x) - s_2) + \lambda_2 \kappa(x) - \lambda_3 (d(x, \mathcal{S}^1) - \epsilon)$$

## References

- [1] D. Mumford et J. Shah : Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Comm. Pure Appl. Math.* 42, 1989
- [2] José Gomes : Implicit representations of evolving manifolds in computer vision (Thèse de doctorat)
- [3] José Gomes et Olivier Faugeras : Reconciling Distance Functions and Level Sets