# Aperçu de la preuve de Sullivan de la conjecture d'Adams

Aurélien DJAMENT

Octobre 2003

On se propose de tracer les grandes étapes de la démonstration (détaillée dans mon mémoire de DEA) donnée par Sullivan de la conjecture d'Adams, résultat de pure topologie algébrique, à l'aide de l'utilisation de comparaison avec la géométrie algébrique. Dans la première partie, nous mettons en place rapidement les outils nécessaires à énoncer ce résultat. Dans la seconde, nous exposons le schéma de la démonstration.

## Table des matières



Nous désignerons dans la suite par le terme générique d'*espace* tout espace topologique suffisamment « raisonnable », disons qu'on puisse munir d'une structure de complexe cellulaire [1]. Un *espace fini* sera un complexe cellulaire fini [2].

Soient $X$ et $Y$ deux espaces. Nous noterons $\mathcal{C}(X,Y)$ l'ensemble des applications continues de $X$ dans $Y$. Deux éléments $f$ et $g$ de $\mathcal{C}(X,Y)$ sont dits *homotopes* s'il existe une application continue $H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ telle que $H(x,0) = f(x)$ et $H(x,1) = g(x)$ pour tout $x \in X$. Cela définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}(X,Y)$ ; l'ensemble quotient sera désigné par $[X,Y]$.

Étant donnés deux espaces $X$, $Y$ et $f \in \mathcal{C}(X,Y)$, la composition à droite (resp. à gauche) par $f$ induit pour tout espace $Z$ des applications $f^* : [Y,Z] \to [X,Z]$ et $f_* : [Z,X] \to [Z,Y]$ ; celles–ci ne dépendent que de la classe d'homotopie de $f$, de sorte que l'on notera encore de la même façon $f^*$ et $f_*$ pour $f \in [X,Y]$.

On dit que deux espaces $X$ et $Y$ ont le même *type d'homotopie* s'il existe $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ et $g \in \mathcal{C}(Y,X)$ tels que les composés $f \circ g$ et $g \circ f$ soient homotopes aux applications identiques de $Y$ et $X$ respectivement.

Nous dénoterons par $\mathbb{K}$ le corps topologique usuel $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

[1] En fait beaucoup de raisonnements sont agréables à mener en termes d'ensembles simpliciaux, ce qui est essentiellement la même chose d'un point de vue homotopique.

[2] Il s'agit d'une hypothèse de finitude *topologique* (équivalente à la compacité) ; une autre notion de finitude, *homotopique*, interviendra de façon cruciale dans la preuve.

# 1 $K$-théorie et énoncé de la conjecture d'Adams

## 1.1 Fibrés vectoriels et groupe $K(X)$

**Définition 1** *Soit $X$ un espace. Un* ***fibré vectoriel*** *(sur $\mathbb{K}$) de base $X$ est la donnée d'une application continue $f : E \longrightarrow X$ ($E$ est appelé l'espace total du fibré) et, pour tout $x \in X$, d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie sur la fibre $E_x = f^{-1}(\{x\})$* [3] *de sorte que l'on puisse recouvrir $X$ par des ouverts $U$ pour lesquels il existe un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $V$ et un homéomorphisme $\varphi : f^{-1}(U) \to V \times U$ tels que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & V \times U \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & = & U \end{array}$$

*commute* [4] *et que pour tout $x \in U$ $\varphi$ induise un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels entre $E_x$ et $V$* [5]*.*

*Un fibré vectoriel est dit de rang $n$ si toutes ses fibres sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension $n$.*

**Définition 2** *Soient $X$ et $X'$ deux espaces, $E \xrightarrow{p} X$ et $E' \xrightarrow{p'} X'$ des fibrations vectorielles. On appelle* ***morphisme de fibrés vectoriels*** *de $E$ vers $E'$ tout couple d'applications continues $(E \xrightarrow{f} E', X \xrightarrow{g} X')$ tel que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & {\scriptstyle p'}\downarrow \\ X & \xrightarrow{g} & X' \end{array}$$

*commute et que pour tout $x \in X$ l'application induite par $f$ entre les fibres $E_x$ et $E'_{g(x)}$ soit linéaire.*

*On appelle* ***morphisme de fibrés vectoriels de base*** *$X$ tout morphisme du type $(f, id_X)$ entre deux telles fibrations (que l'on notera alors simplement $f$). Deux fibrés vectoriels de base $x$ sont dits isomorphes s'il existe un morphisme de fibrés vectoriels bijectif entre eux dont la réciproque est également un morphisme de fibrés vectoriels* [6]*.*

*Un fibré vectoriel est dit trivial s'il est isomorphe à un fibré du type $X \times \mathbb{K}^n \longrightarrow X$ (projection, avec structure vectorielle évidente) pour un certain entier $n$.*

Fonctorialité : étant donnés deux espaces $X$ et $Y$, une application continue $X \xrightarrow{f} Y$ et une fibration vectorielle $E \xrightarrow{\xi} Y$ de base $Y$, on définit l'*image réciproque* de $\xi$ par $f$, et l'on note $f^*\xi$, le fibré vectoriel

$$E \underset{Y}{\times} X = \{(e,x) \in E \times X \,|\, \xi(e) = f(x)\} \longrightarrow X$$

(restriction de la projection $E \times X \longrightarrow X$) de base $X$, où la structure d'espace vectoriel sur les fibres est donnée par l'identification canonique $(E \underset{Y}{\times} X)_x \simeq E_{f(x)}$. On dispose ainsi d'un morphisme de fibrés vectoriels évident de $f^*\xi$ vers $f$.

Si $\xi$ est un fibré vectoriel de base $X$ et $U$ un sous–espace de $X$, la restriction de $\xi$ à $U$ est par définition $i^*\xi$, où $i$ est l'inclusion de $U$ dans $X$. Par définition, un fibré vectoriel est toujours localement trivial en ce sens qu'on peut trouver un recouvrement de sa base par des ouverts en restriction auxquels le fibré est trivial.

Si $Y \xrightarrow{\xi} X$ et $Z \xrightarrow{\xi'} X$ sont deux fibrés vectoriels de base $X$, on définit leur *somme directe* (ou *somme de Whitney*), notée $\xi \oplus \xi'$ (ou $\xi + \xi'$), comme la projection canonique $Y \underset{X}{\times} Z = \{(y,z) \in Y \times Z \,|\, \xi(y) = \xi'(z)\} \longrightarrow X$ (la structure vectorielle sur les fibres étant donnée par les identifications canoniques $(Y \underset{X}{\times} Z)_x \simeq Y_x \oplus Z_x$). Cette construction est naturelle en $X$ en ce sens qu'elle est compatible aux images réciproques : $f^*(\xi \oplus \xi') \simeq f^*\xi \oplus f^*\xi'$ canoniquement.

[3] on utilisera par la suite systématiquement cette notation pour désigner les fibres.
[4] où la flèche verticale de gauche est induite par $f$ et celle de droite est la projection.
[5] Un tel fibré sera souvent noté par abus $E$, ou $f$.
[6] Il revient au même de demander qu'existe entre les deux fibrés un morphisme qui est également un homéomorphisme.

Supposons maintenant que $X$ est un espace *fini*[7].

On note $\mathcal{E}(X)$ (resp. $\mathcal{E}_n(X)$, où $n \in \mathbb{N}$) l'ensemble[8] des classes d'équivalence de fibrés vectoriels (resp. de fibrés vectoriels de rang $n$) de base $X$. La somme directe des fibrés induit sur $\mathcal{E}(X)$ une loi (notée $\oplus$ ou $+$) associative, commutative et possédant un élément neutre, noté 0.

On définit $K(X)$ (noté $K_{\mathbb{K}}(X)$ s'il y a ambiguïté sur $\mathbb{K}$) comme le groupe abélien obtenu en symétrisant l'addition sur $\mathcal{E}(X)$[9] ; $K(X)$ s'appelle la *K–théorie* de $X$. Si $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue, elle induit un morphisme de groupes $f^* : K(Y) \longrightarrow K(X)$ obtenu à partir de l'image réciproque par $f$.

On définit la *K–théorie réduite* de $X$ comme le conoyau, noté $\widetilde{K}(X)$, du morphisme canonique $\mathbb{Z} \simeq K(*) \to K(X)$ ($*$ désignant un espace réduit à un point) : on « tue » les classes des fibrés triviaux dans $K(X)$. Si $X \neq \varnothing$, tout choix de point de base $* \to X$ scinde la suite exacte $0 \to \mathbb{Z} \to K(X) \to \widetilde{K}(X) \to 0$, d'où $K(X) \simeq \mathbb{Z} \oplus \widetilde{K}(X)$.

## 1.2 Opérations sur la $K$-théorie

*Dans ce paragraphe, $X$ désigne un espace fini.*

Les groupes abéliens $K(X)$ sont en fait des *anneaux* commutatifs (et unitaires) de manière naturelle[10] ; la multiplication est induite par l'opération de produit tensoriel sur les fibrés vectoriels. La construction, standard, que nous ne détaillerons pas, consiste à définir ce produit tensoriel de manière évidente sur les fibrés triviaux, puis à procéder par recollement à l'aide de trivialisations locales. Notons que l'image dans $K(X)$ d'un fibré en droites (i.e. de rang 1) est inversible (l'inverse est fourni par le dual, défini de manière analogue par recollements).

Le produit tensoriel fournit également un morphisme naturel de complexification $\mathfrak{c} : K_{\mathbb{R}}(X) \to K_{\mathbb{C}}(X)$ ; on dispose également d'un morphisme naturel évident $\mathfrak{o} : K_{\mathbb{C}}(X) \to K_{\mathbb{R}}(X)$ d' « oubli de la structure complexe » sur les fibrés.

**Proposition 1** *Il existe une unique famille de morphismes d'anneaux naturels*[11] $\psi^k : K(X) \to K(X)$ *(pour $k \in \mathbb{Z}$ ; en $K$–théorie réelle comme complexe) tels que :*

1. *pour toute classe de fibré en droites $\xi$, $\psi^k\,\xi = \xi^k$,*
2. *$\psi^k \circ \psi^l = \psi^{kl}$ pour tous entiers $k$ et $l$,*
3. *les $\psi^k$ sont compatibles à la complexification et à l'oubli de la structure complexe en ce sens que les diagrammes*

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathbb{R}}(X) & \xrightarrow{\psi^k_{\mathbb{R}}} & K_{\mathbb{R}}(X) \\ {\scriptstyle \mathfrak{c}}\downarrow & & {\scriptstyle \mathfrak{c}}\downarrow \\ K_{\mathbb{C}}(X) & \xrightarrow{\psi^k_{\mathbb{C}}} & K_{\mathbb{C}}(X) \end{array} \qquad \textit{et} \qquad \begin{array}{ccc} K_{\mathbb{C}}(X) & \xrightarrow{\psi^k_{\mathbb{C}}} & K_{\mathbb{C}}(X) \\ {\scriptstyle \mathfrak{o}}\downarrow & & {\scriptstyle \mathfrak{o}}\downarrow \\ K_{\mathbb{R}}(X) & \xrightarrow{\psi^k_{\mathbb{R}}} & K_{\mathbb{R}}(X) \end{array}$$

*commutent pour tout $k \in \mathbb{Z}$.*

Les $\psi^k$ sont appelés *opérations d'Adams.*

Nous nous bornons ici à indiquer comment l'on construit $\psi^k$ pour $k > 0$.

Pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^{*2}$, le polynôme

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^k \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$$

est symétrique, donc il s'écrit de manière unique sous la forme $P_{k,n}(\sigma_{1,n}, \ldots, \sigma_{n,n})$ avec $P_{k,n} \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$, où

$$\sigma_{i,n} = \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ Card\, I = i}} \prod_{k \in I} X_k \quad (1 \leq i \leq n) \tag{1}$$

On définit, $\xi$ étant la classe d'un fibré de rang $n$,

$$\psi^k\,\xi = P_{k,n}(\xi, \Lambda^2\,\xi, \ldots, \Lambda^n\,\xi)$$

où les puissances extérieures $\Lambda^p\,\xi$ de $\xi$ sont définies comme le produit tensoriel par recollement.

[7] Les raisons de cette restriction apparaîtront au paragraphe 1.3.

[8] Il n'est nullement évident a priori qu'il s'agisse d'un ensemble ; cela se voit en prouvant des résultats que nous admettrons dans 1.3.

[9] On peut par exemple le construire comme le quotient du groupe abélien libre $\mathbb{Z}^{(\mathcal{E}(X))}$ par le sous–groupe engendré par les $c(E) + c(E') - c(E + E')$, où $c : \mathcal{E}(X) \to \mathbb{Z}^{(\mathcal{E}(X))}$ est l'application canonique.

[10] i.e. de sorte que les morphismes $f^*$ évoqués ci–avant soient des morphismes d'anneaux.

[11] i.e. commutant aux images réciproques.

### 1.3 Propriétés de base

**Proposition 2** *Soit $X$ un espace fini*[12]*. Étant donné un fibré vectoriel $\xi$ de base $X$, il existe un autre fibré $\xi'$ tel que $\xi \oplus \xi'$ soit trivial. En conséquence, l'application $\mathcal{E}(X) \longrightarrow \widetilde{K}(X)$ composée des applications canoniques $\mathcal{E}(X) \longrightarrow K(X)$ et $K(X) \longrightarrow \widetilde{K}(X)$ est surjective si $X$ est connexe.*

Nous admettrons ce résultat (de même que tous les autres de ce paragraphe).

Notons, pour $n$, $k \in \mathbb{N}$, $Gr_{n,k}$ (ou $Gr_{n,k,\mathbb{K}}$ s'il y a ambiguïté sur $\mathbb{K}$) la grassmannienne des sous–espaces vectoriels de dimension $n$ dans $\mathbb{K}^{n+k}$, munie de sa topologie usuelle (qui en fait une variété analytique compacte). Les inclusions évidentes $Gr_{n,k} \subset Gr_{n,k+1}$ permettent de définir la réunion $Gr_n$ (notée encore $Gr_{n,\mathbb{K}}$) des $Gr_{n,k}$ pour $k \in \mathbb{N}$[13]. Cet espace[14](que l'on peut également voir comme l'ensemble des sous–espaces de dimension $n$ du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$) est équipé d'un fibré vectoriel de rang $n$ tautologique $\xi_n : E_n = \{(v,V) \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \times Gr_n \,|\, v \in V\} \longrightarrow Gr_n$ induit par la deuxième projection (où la structure vectorielle est donnée par l'égalité ensembliste $(\xi_n)_V = V$).

**Proposition 3** *Pour tout espace fini $X$ et tout $n \in \mathbb{N}$, l'application*

$$\mathcal{C}(X, Gr_n) \longrightarrow \mathcal{E}_n(X) \qquad f \longmapsto f^*\xi_n$$ [15]

*induit une bijection* $\quad [X, Gr_n] \longrightarrow \mathcal{E}_n(X)$.

(On dit que l'espace $Gr_n$ *représente* le foncteur $\mathcal{E}_n$)

Les inclusions $Gr_n \subset Gr_{n+1}$ (obtenues en envoyant un sous–espace $V$ de dimension $n$ de $\mathbb{K}^{n+k}$ sur le sous–espace $V \oplus \mathbb{K}$ de $\mathbb{K}^{n+k+1} = \mathbb{K}^{n+k} \oplus \mathbb{K}$) permettent de considérer la grassmannienne infinie $Gr_\infty$ (encore notée $Gr_{\infty,\mathbb{K}}$), réunion des précédentes[16]. L'opération de somme directe de sous–espaces définit une application continue $Gr_\infty \times Gr_\infty \longrightarrow Gr_\infty$ qui *à homotopie près* est associative, commutative, et possède un élément neutre. Cette loi induit, pour chaque espace $X$, une structure de monoïde (en fait, de groupe) naturelle sur $[X, Gr_\infty]$.

Les deux propositions précédentes permettent d'obtenir :

**Proposition 4** *Soit $X$ un espace fini et connexe. Le groupe $\widetilde{K}(X)$ est naturellement isomorphe à $[X, Gr_\infty]$.*
*Si $X$ est un espace fini (connexe ou non), le groupe $K(X)$ est naturellement isomorphe à $[X, \mathbb{Z} \times Gr_\infty]$*[17].

Autrement dit, $\mathbb{Z} \times Gr_\infty$ représente le foncteur $K$, ce qui permet de ramener les propriétés de la $K$-théorie aux propriétés homotopiques de cet espace. Ainsi, les opérations d'Adams décrites précédemment sont induites par des applications continues (définies de façon unique à homotopie près) de $Gr_\infty$ dans lui-même, i.e. par des éléments de $[Gr_\infty, Gr_\infty]$. Comme nous le verrons par la suite, la restriction de ces opérations aux classes de fibrés de rang 1 est induite par des éléments de $[Gr_1, Gr_1]$ faciles à comprendre ; nous exploiterons ce fait pour tous les fibrés via la proposition suivante dans le cas complexe, le cas réel s'y ramenant en quelque sorte (en vertu d'un résultat que nous tairons).

**Proposition 5** *Soient $X$ un espace fini, $\xi$ un fibré vectoriel* **complexe** *de base $X$. Il existe un espace fini $Y$ et une application continue $f : Y \to X$ telle que*

- *$f^*\xi$ est une somme directe de fibrés en droites,*
- *$f^* : K_{\mathbb{C}}(X) \to K_{\mathbb{C}}(Y)$ est injective.*

(Ainsi, en quelque sorte, toute propriété des fibrés vectoriels complexes « compatible » aux images réciproques et à la somme directe des fibrés est vraie pour *tous* les fibrés si elle est vérifiée pour les fibrés *en droites*)

[12]Cette hypothèse est ici essentielle et légitime la restriction aux espaces finis.
[13]que l'on munit de la topologie la plus forte induisant sur chaque $Gr_{n,k}$ la topologie usuelle.
[14]qui *n'est pas* fini.
[15]assimilé ici à son image dans $\mathcal{E}_n(X)$.
[16]que l'on munit encore de la topologie la plus faible induisant sur chaque $Gr_{n,k}$ la topologie usuelle.
[17]où $\mathbb{Z}$ est muni de la topologie discrète.

## 1.4 Énoncé de la conjecture d'Adams

Considérons un fibré vectoriel $\xi : E \longrightarrow X$. En en ôtant la section nulle (i.e. les origines des fibres pour leur structure d'espace vectoriel), on obtient une application $\sigma : E' \longrightarrow X$, appelée *fibration sphérique* de base $X$ associée à $\xi$, dont les fibres [18] sont homéomorphes à un $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, qui a le type d'homotopie de la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ [19]. On peut définir en toute généralité la notion de fibré sphérique (indépendamment de celle de fibré vectoriel) ; disons simplement que l'on peut définir une notion de classes d'équivalence de fibrés sphériques stables de base $X$ (la relation d'équivalence est ici l'équivalence d'homotopie fibrée [20] ; le terme *stable* signifie que l'on identifie également un fibré sphérique avec le fibré de dimension supérieure obtenu par « suspension fibrée » (ce qui est l'analogue de l'ajout du fibré trivial de rang 1 pour les fibrés vectoriels)), qui forment un groupe naturellement isomorphe $[X, BG_\infty]$ pour un certain espace $BG_\infty$, comme pour les fibrés vectoriels. L'opération consistant à ôter la section nulle induit alors un morphisme de groupes, pour $X$ espace fini connexe [21], $\widetilde{K}(X) \simeq [X, Gr_\infty] \xrightarrow{j_X} [X, BG_\infty]$, qui est induit par une application continue, unique à homotopie près, de $Gr_\infty$ dans $BG_\infty$, i.e. par un élément $J$ de $[Gr_\infty, BG_\infty]$.

Nous pouvons désormais énoncer la **conjecture d'Adams** [22] :

**Proposition 6** *Soit $X$ est un espace fini. Pour tous $\xi \in \widetilde{K}(X)$ et $k \in \mathbb{Z}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $j_X(k^n(\psi^k\xi - \xi)) = 0$.*

La première preuve de ce résultat, esquissée par Quillen et complétée par Friedlander, fait intervenir la géométrie algébrique via la topologie étale. La preuve de Sullivan, dont nous donnons ici un aperçu, utilise également la topologie étale, mais de manière différente : alors que Quillen et Friedlander font usage de la topologie étale en *caractéristique finie* (ils considèrent le morphisme de Frobenius pour décrire les opérations d'Adams), Sullivan emploie la topologie étale en *caractéristique nulle*, en considérant les variétés algébriques sur $\mathbb{K}$ qui interviennent directement pour classifier la $K$-théorie. D'autres preuves n'utilisent pas la géométrie algébrique.

[18] on adopte pour les fibrés sphériques les mêmes conventions de terminologie et de notation que pour les fibrés vectoriels, notamment en ce qui concerne les fibres et les images réciproques.

[19] sphère unité de $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique.

[20] Une *homotopie fibrée* entre deux applications continues $f$, $g : E \to F$ faisant commuter un diagramme

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & F \arrow[d, "v"] \\ X \arrow[r, equal] & X \end{tikzcd}$$

où $u$ et $v$ sont deux applications continues fixées (en général, ce sont des fibrations) est une homotopie $h : E \times [0,1] \to F$ de $f$ à $g$ telle que pour tout $t \in [0,1]$, $h(.,t) : E \to F$ fasse encore commuter ce diagramme. La notion d'*équivalence d'homotopie fibrée* se définit comme celle l'équivalence d'homotopie.

[21] cette restriction est en fait superflue.

[22] Adams avait prouvé sa conjecture pour les images de fibrés en droites.

# 2 $K$-théorie profinie et géométrie algébrique. Démonstration de la conjecture d'Adams

## 2.1 Principe. Aperçu du théorème de comparaison

Les grassmanniennes dont la réunion est apparue dans le paragraphe 1.3 sont des objets essentiellement *algébriques* : ce sont des variétés analytiques que l'on peut obtenir par un atlas d'ouverts définis par des (in)égalités algébriques, les changements de cartes étant également des fonctions rationnelles. On remarque également que l'on peut choisir tous les polynômes intervenant dans cette description à coefficients dans $\mathbb{Q}$ (alors que le corps de base est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). En termes précis, une grassmannienne (réelle ou complexe) est la réalisation topologique (réelle ou complexe) d'une variété algébrique[23] définie sur $\mathbb{Q}$. Ce dernier fait permet de faire agir le groupe de Galois $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ des $\mathbb{Q}$-automorphismes de corps de $\mathbb{C}$ sur lesdites variétés, dans le cas complexe du moins[24]. Évidemment, ces automorphismes sont topologiquement ultra–pathologiques (pas du tout continus) et cette action sur les variétés *algébriques* que sont les grassmanniennes ne fournit directement aucune action *topologique* sur les espaces que l'on obtient par réalisation topologique complexe et qui nous intéressent pour décrire la $K$-théorie. Cependant, on peut avec Sullivan utiliser cette action du groupe de Galois pour comprendre les opérations d'Adams sur la $K$-théorie *profinie* (voir paragraphe suivant), « variante » de la $K$-théorie où la géométrie algébrique interviendra via le théorème de comparaison entre géométrie et topologie algébriques dont nous allons maintenant donner une rapide idée.

<u>Complétion profinie d'un espace</u>

**Définition 3** *Un espace $X$ est dit **homotopiquement fini** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\pi_n(X)$*[25] *est fini. Si $p$ est un nombre premier, $X$ est dit **homotopiquement $p$-fini** si de plus les $\pi_n(X)$ ont pour cardinaux des puissances de $p$.*

**Définition 4**
1. *Un pro–espace est une famille d'espaces $(X_i)_{i\in I}$, où $I$ est un ensemble ordonné filtrant à gauche (i.e. muni d'un ordre $\geq$ tel que pour tous $a$, $b \in I$ il existe $c \in I$ tel que $c \geq a$ et $c \geq b$), munie d'applications continues $f_{ji} : X_i \to X_j$ pour $i \geq j$ telles que $f_{kj} \circ f_{ji} = f_{ki}$ pour $i \geq j \geq k$*[26].
2. *Étant donnés deux pro–espaces $X = (X_i)_{i\in I}$ et $Y = (Y_j)_{j\in J}$, on définit $[X, Y] = \varprojlim_{j\in J} (\varinjlim_{i\in I} [X_i, Y_j])$ ; la composée $g \circ f \in [A, C]$ de $f \in [A, B]$ et $g \in [B, C]$ (où $A$, $B$ et $C$ sont des pro–espaces) est définie de manière évidente (à partir de la composition des applications).*
3. *Deux pro–espaces $X$ et $Y$ sont dits **homotopiquement équivalents** s'il existe $f \in [X, Y]$ et $g \in [Y, X]$ tels que $f \circ g$ et $g \circ f$ coïncident avec l'identité de $Y$ et $X$ respectivement.*
4. *Un pro–espace $(X_i)_{i\in I}$ est dit $p$-**profini** (où $p$ est un nombre premier) si tous les $X_i$ sont homotopiquement $p$-finis.*

On fait de tout espace $X$ un pro–espace de manière évidente, en considérant la famille réduite au seul élément $X$.

**Proposition 7** *Soit $p$ un nombre premier. On peut associer naturellement à chaque espace $X$ un pro–espace $p$-profini, noté $\widehat{X}_p$ et appelé **complétion $p$-profinie de** $X$, muni d'une flèche naturelle $i \in [X, \widehat{X}_p]$, vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout espace homotopiquement $p$-fini $Y$, $i^* : [\widehat{X}_p, Y] \to [X, Y]$ (définie en associant à $f \in [\widehat{X}_p, Y]$ la composée $f \circ i$) est une bijection.*

Le produit des $\widehat{X}_p$ pour $p$ parcourant l'ensemble des nombres premiers est appelé *complété profini* de $X$ et noté $\widehat{X}$ ; il est muni d'une flèche naturelle de $[X, \widehat{X}]$ vérifiant une propriété universelle analogue, où « homotopiquement $p$-fini » est remplacé par « homotopiquement fini » .

Ce résultat, ici admis, est essentiellement dû à Artin et Mazur (qui fournissent du reste une théorie beaucoup plus générale de la complétion homotopique)[27].

[23] qui de plus vérifie toutes les propriétés de « gentillesse » que l'on peut en attendre : irréductibilité, lissité, propreté etc.

[24] le cas réel est légèrement plus compliqué : la démonstration nécessite de remplacer les variétés réelles (les grassmanniennes) qui interviennent naturellement par d'autres variétés *complexes*. Par la suite, nous ne parlerons plus que du cas complexe.

[25] Défini comme $[\mathbb{S}^n, X]$ mais en imposant aux homotopies de respecter un point de base donné.

[26] Ces applications sont en général omises dans la notation d'un pro–espace.

[27] Il existe plusieurs manières d'obtenir des « complétions profinies » homotopiques ; dans mon DEA, je présente une construction différente de celle d'Artin–Mazur.

Topologie étale et théorème de comparaison : à toute variété algébrique $V$ on peut associer naturellement un pro–espace $V_{et}$, appelé *type d'homotopie étale* de $V$, défini formellement à partir de la notion de faisceau étale[28]. Comme d'habitude, le terme *naturellement* signifie que l'on peut associer à chaque morphisme de schémas $f : V \longrightarrow W$ un $f_{et} \in [V_{et}, W_{et}]$ (en respectant la composition). En particulier, tout $\sigma \in Gal(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ induit un $\sigma_{et} \in [G_{et}, G_{et}]$, si $G$ est une grassmannienne complexe.

Si $V$ est une variété algébrique complexe, on peut également lui associer naturellement l'espace, noté $V(\mathbb{C})$, obtenu par réalisation topologique de $V$[29] : c'est cette construction que nous avons évoquée au début du paragraphe dans le cas des grassmanniennes.

**Proposition 8** *Si $V$ est une variété algébrique complexe lisse, le pro–espace $V_{et}$ est naturellement homotopiquement équivalent à $\widehat{V(\mathbb{C})}$.*

La démonstration de ce résultat profond, que nous admettrons totalement, repose d'une part sur des propriétés formelles de la complétion profinie, d'autre part sur deux théorèmes de comparaison entre topologie usuelle (i.e. de la réalisation topologique) et type d'homotopie étale : l'un compare les revêtements finis, l'autre la cohomologie (la démonstration de ce théorème de comparaison utilise le précédent, des propriétés formelles des faisceaux et des propriétés géométriques des variétés — notamment la notion de *bon voisinage*).

L'un des premiers (et des plus faciles) pas pour tous ces résultats réside dans la propriété suivante, dont nous donnons une démonstration complète, laquelle est élémentaire, mais non immédiate.

**Proposition 9** *Soit $V$ une variété algébrique complexe. Le nombre de composantes connexes de $V$ pour la topologie de Zariski est égal au nombre de composantes connexes de sa réalisation topologique $V(\mathbb{C})$.*

*Démonstration* : Nous utiliserons les propriétés suivantes de la réalisation topologique des variétés **complexes** :

1. Si $V \neq \varnothing$, alors $V(\mathbb{C}) \neq \varnothing$ ;
2. $V_{red}(\mathbb{C}) \simeq V(\mathbb{C})$ ;
3. La réalisation topologique commute aux sommes et recollements ;
4. Si $V$ est une variété lisse, $V(\mathbb{C})$ est naturellement muni d'une structure de variété analytique complexe ;
5. La réalisation topologique d'un revêtement étale (i.e. d'un morphisme fini et lisse) d'une variété lisse est un revêtement analytique fini de sa réalisation topologique.

2 et 3 sont immédiats ; 1 découle du théorème des zéros de Hilbert, 4 du théorème d'inversion local ; 5 est facile via le théorème d'Ehresmann selon lequel une submersion propre (entre variétés différentielles) est un revêtement.

Grâce à 1, 2 et 3, il suffit de montrer que si $V$ est une variété intègre non vide, $V(\mathbb{C})$ est connexe. Soit $n$ la dimension de $V$ : le corps des fonctions $K$ de $V$ est une extension de $\mathbb{C}$ de degré de transcendance $n$, donc par le théorème de l'élément primitif, il est de la forme $\mathbb{C}(X_1, \dots, X_n)(t)$ où $t$ a un polynôme minimal irréductible (dans $\mathbb{C}(X_1, \dots, X_n)[T]$), que l'on peut écrire sous la forme d'une fraction $f/g$ avec $f$ et $g$ dans $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n][T]$, premiers entre eux, et $f$ unitaire : $f$ est donc irréductible dans $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n][T]$, et $A = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n][T]/(f)$ est une $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$-algèbre intègre finie de corps des fractions isomorphes à $K$, donc $H = Spec\, A$ est birationnellement équivalent à $V$, et il existe des ouverts denses $M$ et $N$ de $H$ et $V$ respectivement qui sont isomorphes. Il suffit de prouver que $H(\mathbb{C})$ est connexe : en effet cela entraînera que $M(\mathbb{C})$, dont le complémentaire dans $H(\mathbb{C})$ est (topologiquement) de codimension au moins 2, est connexe ; comme $N(\mathbb{C}) \simeq M(\mathbb{C})$ est dense dans $V(\mathbb{C})$ (son complémentaire est d'intérieur vide pour la même raison de codimension), cela achèvera la démonstration.

Notons $\pi$ le morphisme fini $H \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ : par le théorème de Bertini, il existe un ouvert dense $U$ de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ tel que si l'on note $W = \pi^{-1}(U)$, $\pi|_W : W \to U$ soit lisse, donc un revêtement étale. Cela montre déjà que $W(\mathbb{C})$, donc son adhérence $H(\mathbb{C})$, a un nombre fini de composantes connexes — en nombre inférieur ou égal au degré $d$ de $A$ sur $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, que nous noterons $C_1, \dots, C_k$. En particulier, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $\pi(\mathbb{C})$ induit un revêtement analytique fini $W(\mathbb{C}) \cap C_i \to U(\mathbb{C})$, dont nous désignerons par $r_i$ le degré ; cela prouve que si l'on note, pour $a \in U(\mathbb{C})$, $(\sigma^i_m(a))_{1 \leq m \leq r_i}$ les fonctions symétriques élémentaires en les $r_i$ antécédents de $a$ par $\pi$ dans $C_i$ (cf. (1)), les $\sigma^i_m$ sont des fonctions holomorphes sur $U(\mathbb{C})$ (utiliser des trivialisations locales analytiques de $\pi$). Si l'on pose $\lambda_i(a) = T^{r_i} + \sum_{j=0}^{r_i - 1} (-1)^j \sigma^i_j(a) T^j \in \mathbb{C}[T]$, on a manifestement pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in U(\mathbb{C})$

$$f(a_1, \dots, a_n, T) = \prod_{i=1}^{k} \lambda_i(a_1, \dots, a_n) \tag{2}$$

[28] Nous n'entrerons ici pas du tout dans les détails de cette construction. Il est d'ailleurs remarquable que la preuve de Sullivan de la conjecture d'Adams n'utilise pratiquement que l'*existence* d'une telle construction (et le théorème de comparaison ci–après) dans le cas des grassmanniennes, et non la façon précise dont on l'obtient.

[29] L'ensemble sous–jacent est l'ensemble des points de $V$, et la topologie est celle induite par celle de $\mathbb{C}^n$ si $V$ est plongée comme sous–variété de l'espace affine complexe de dimension $n$, la topologie s'obtenant en général par recollement de variétés affines.

Si l'on écrit $f(X_1,\dots,X_n,T) = T^d + P_1(X_1,\dots,X_n)T^{d-1} + \cdots + P_d(X_1,\dots,X_n)$, on constate que pour tout $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{C}$, $f(a_1,\dots,a_n,t)$ est non nul dès que $|t| \geq 2d\sum_{i=1}^{d}|P_i(a_1,\dots,a_n)|$, donc tous les $\sigma_m^i$ sont majorés polynomialement. On en déduit tout d'abord que les $\sigma_m^i$ (donc les $\lambda_i$) se prolongent analytiquement à $\mathbb{C}^n$ tout entier (pour $n=1$, le complémentaire de $U(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ est isolé ; dans le cas général, pour tout $a=(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{C}$, il existe $i$ tel que parmi les points de $\mathbb{C}^n$ ayant les mêmes coordonnées, sauf peut–être la $i$-ème, que $a$, seul un nombre fini ne soient pas dans $U(\mathbb{C})$, et l'on est ramené au prolongement d'une fonction holomorphe d'une variable en un point isolé hors de son domaine de définition), puis que la singularité des $\sigma_m^i$ à l'infini est algébrique, ce qui implique que ces fonctions sont des *polynômes*. Maintenant la relation (2) et l'irréductibilité de $f$ imposent $k=1$, ce qu'il fallait démontrer.

## 2.2 Opérations sur la $K$-théorie profinie

*Dans tout ce paragraphe, on se donne un nombre premier $p$.*

**Définition 5** *Soit $X$ un espace fini. On appelle **$K$-théorie $p$-profinie** de $X$ le groupe abélien*

$$\widehat{K}_p(X) = \widetilde{K}(X) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \widehat{\mathbb{Z}}_p$$

*(le corps de base $\mathbb{K}$ étant indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), où $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ désigne l'anneau $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ des entiers $p$-adiques.*

Dans toute la suite, on ne s'occupera plus que de $K$-théorie $p$-profinie **complexe**, le cas réel étant analogue, modulo le raffinement évoqué dans la note 24.

**Proposition 10** *Pour tout espace connexe fini $X$, on a un isomorphisme naturel*

$$\widehat{K}_p(X) \simeq [X, \widehat{(Gr_\infty)}_p]$$

Cette propriété, que nous admettrons, est une conséquence directe de la proposition 4 et de résultats généraux sur la complétion $p$-profinie.

Afin d'exploiter les considérations du paragraphe précédent, nous utiliserons le fait suivant (élémentaire) : il existe une action de $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ sur $\widehat{(Gr_\infty)}_p$ compatible à son action sur le complété $p$-profini des grassmanniennes (donnée par l'isomorphisme de la proposition 8[30]).

Notons $\alpha : Gal(\mathbb{C}/\mathbb{Q}) \to \widehat{\mathbb{Z}}_p^*$ (groupe des éléments inversibles de l'anneau $\widehat{\mathbb{Z}}_p$) le morphisme de groupes obtenu en restreignant, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'action du groupe de Galois au groupe $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ des racines $p^n$-ièmes de l'unité. Des propriétés élémentaires de théorie de Galois montrent que $\alpha$ est *surjectif.*

**Proposition 11** *L'action de $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ sur $\widehat{(Gr_\infty)}_p$ se factorise par $\alpha$, de sorte que $\widehat{\mathbb{Z}}_p^*$ agit sur $\widehat{(Gr_\infty)}_p$, donc sur la $K$-théorie $p$-profinie par la proposition précédente. De plus, pour tout entier $k$ premier à $p$, l'opération induite en $K$-théorie $p$-profinie par l'opération d'Adams $\psi^k$ coïncide avec l'action de l'élément $k$ de $\widehat{\mathbb{Z}}_p^*$.*

Nous esquissons à présent la démonstration de ce résultat, qui constitue la clef de la preuve de Sullivan de la conjecture d'Adams.

Grâce à la proposition 5, il suffit de prouver que l'action de $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ sur $\widehat{(Gr_1)}_p$ se factorise par $\alpha$ et que $k$ agit par $\psi^k$ (en effet, l'action de $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ est compatible à l'addition en $K$-théorie $p$-profinie car au niveau des grassmanniennes finies l'addition des sous–espaces est la réalisation topologique de morphismes algébriques définissables sur $\mathbb{Q}$). Cette réduction simplifie grandement notre travail car $Gr_1 = \mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$ est homotopiquement très agréable : son seul groupe d'homotopie non trivial est le $\pi_2$, isomorphe à $\mathbb{Z}$, i.e. c'est un espace d'Eilenberg–Maclane de type $K(\mathbb{Z},2)$, d'où l'on déduit que $\widehat{(Gr_1)}_p$ est homotopiquement équivalent au pro–espace $(K(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z},2))_{n\in\mathbb{N}}$[31] (il s'agit d'une propriété formelle assez facile de $\widehat{\cdot}_p$). Les propriétés homotopiques de base des espaces d'Eilenberg–Maclane montrent alors qu'il suffit de prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'action de $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ sur $H^2(\widehat{(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}))}_p;\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ se factorise par $\alpha$ et que $k$ y a la même action que $\psi^k$. Mais comme l'inclusion $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \subset \mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$ induit un isomorphisme entre les $\pi_i$ pour $i \leq 2$ et un épimorphisme entre les $\pi_3$, il suffit de prouver la même assertion pour $H^2(\widehat{(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))}_p;\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$, ou encore, en utilisant le

[30] A priori, la proposition 8 ne fournit une action que sur le complété profini d'une grassmannienne ; on en déduit une action sur le complété $p$-profini car celui–ci peut s'obtenir à partir du précédent par une construction naturelle de « $p$-localisation (homotopique) » .

[31] Cette suite d'espaces est munie d'une structure de pro–espace car on peut choisir une construction d'espaces d'Eilenberg–Maclane *fonctorielle.*

théorème de comparaison entre cohomologies étale et singulière (l'un des principaux ingrédients de la proposition 8) pour la variété complexe lisse $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ (droite projective complexe), pour les groupes de cohomologie *étale* (où l'action du groupe de galois devient alors transparente) $H^2_{\text{ét}}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}};\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ [32].

On utilise ensuite la carte usuelle de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ formée de deux ouverts isomorphes à la droite affine complexe $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$, d'intersection isomorphe à $(\mathbb{G}_m)_{\mathbb{C}} = Spec\,\mathbb{C}[X,X^{-1}]$. La suite exacte de Mayer–Vietoris (en cohomologie étale) nous ramène à prouver notre assertion sur les groupes de cohomologie $H^1_{\text{ét}}((\mathbb{G}_m)_{\mathbb{C}};\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$, (isomorphes à $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$) ; il est ici agréable de regarder ce groupe comme l'ensemble des classes d'équivalence de revêtements étales galoisiens de groupe $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ de $(\mathbb{G}_m)_{\mathbb{C}}$. Mais pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $(\mathbb{G}_m)_{\mathbb{C}}$ a un unique (à isomorphisme près) revêtement étale galoisien de groupe $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, donné par la $\mathbb{C}[X,X^{-1}]$-algèbre étale standard $\mathbb{C}[X,X^{-1}][T]/(T^k-X)$ [33]. Le groupe $H^1_{\text{ét}}((\mathbb{G}_m)_{\mathbb{C}};\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ s'identifie alors au groupe des automorphismes de ce revêtement, canoniquement isomorphe au groupe $U(k)$ des racines $k$-ièmes de l'unité de $\mathbb{C}$ (considérer, si $\xi\in U(k)$, l'automorphisme de revêtement induit par $T\longmapsto \xi T$ dans $\mathbb{C}[X,X^{-1}][T]/(T^k-X)$). Il est maintenant évident que l'action de $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ sur ce groupe de cohomologie se factorise par le morphisme $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{Q})\to \mathbf{Aut}\,U(k)(\simeq \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}^*)$, donc que l'action de $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ sur $\widehat{(Gr_1)}_p$ se factorise par $\alpha$.

Pour prouver l'assertion relative aux opérations d'Adams, il suffit ensuite de constater que $\psi^k$ induit dans $\pi_2(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}))$ la multiplication par $k$ (car c'est le cas pour $x\longmapsto x^k$ dans $\pi_1(\mathbb{C}^*)$).

## 2.3 La conjecture d'Adams d'après Sullivan

On pose, pour tout espace fini $X$, $\widehat{K}(X)=\prod_p \widehat{K}_p(X)$, $p$ parcourant l'ensemble des nombres premiers (le corps de base étant ici $\mathbb{C}$, conformément à la restriction que nous nous sommes fixée) : si $X$ est connexe, on a un isomorphisme naturel $\widehat{K}(X)\simeq[X,\widehat{Gr_\infty}]$. Par la proposition précédente, $\widehat{K}(X)$ est muni d'une action naturelle du groupe $\widehat{\mathbb{Z}}^*=\prod_p\widehat{\mathbb{Z}}_p^*$ (si l'on voit $\sigma\in\widehat{\mathbb{Z}}^*$ comme un automorphisme homotopique de $\widehat{Gr_\infty}$, $\sigma$ agit par l'image réciproque $\sigma^*$).

$J\in[Gr_\infty,BG_\infty]$ (introduit au paragraphe 1.4) se factorise de manière unique par l'élément canonique de $[Gr_\infty,\widehat{Gr_\infty}]$ car $BG_\infty$ **est homotopiquement fini**. Ce point crucial provient de ce que *les groupes d'homotopie de $BG_\infty$ sont isomorphes aux groupes d'homotopie stable $\pi_n^{st}\mathbb{S}^0$ (sauf en degré 0 — $BG_\infty$ est connexe), qui sont finis (excepté pour $n=0$)* comme Serre l'a montré. On obtient ainsi un élément $j$ de $[\widehat{Gr_\infty},BG_\infty]$ ; on peut donc associer à tout élément de $\widehat{K}(X)$ (où $X$ est fini connexe) un élément de $[X,BG_\infty]$ que l'on appellera son *type d'homotopie fibrée sphérique stable*.

Le théorème qui suit est la forme « abstraite » de la conjecture d'Adams prouvée par Sullivan.

**Proposition 12** *Pour tout espace fini connexe $X$, le type d'homotopie fibrée sphérique stable des éléments de $\widehat{K}(X)$ est constant le long des orbites de $\widehat{\mathbb{Z}}^*$.*

**Lemme** *Soit $\gamma_n : T_n\longrightarrow Gr_n$ le fibré sphérique associé au fibré vectoriel de rang $n$ tautologique $\xi_n$. On a un diagramme commutatif à homotopie près*

$$\begin{array}{ccc} T_n & \longrightarrow & Gr_n \\ \downarrow & & \| \\ Gr_{n-1} & \longrightarrow & Gr_n \end{array}$$

*où la flèche verticale de gauche est une équivalence d'homotopie et la flèche horizontale du bas l'inclusion.*

Le lemme est totalement élémentaire : la flèche $T_n=\{(x,v)\in Gr_n\times(\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}\setminus\{0\})\mid v\in x\}\longrightarrow Gr_{n-1}$ est donnée par $(x,v)\longmapsto x\cap v^\perp$ (où $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ est muni de sa structure hermitienne canonique) ; c'est une équivalence d'homotopie d'inverse $w\longmapsto(\mathbb{C}e_1\oplus s(w),e_1)$, où $e_i$ ($i\in\mathbb{N}^*$) est le $i$-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ et $s$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ donné par $e_i\longmapsto e_{i+1}$ (la composée $T_n\longrightarrow T_n\quad(x,v)\longmapsto(\mathbb{C}e_1\oplus s(x\cap v^\perp),e_1)$ est homotope à l'identité comme le montrent les homotopies $T_n\times[0,1]\longrightarrow T_n\quad(x,v,t)\longmapsto(\mathbb{C}h_t(v)\oplus s(x\cap v^\perp),h_t(v))$ où $h_t(v)=ts(v)+(1-t)e_1$, et $T_n\times[0,1]\longrightarrow T_n\quad(x,v,t)\longmapsto(i_t(x),i_t(v))$, où $i_t$ est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ donné par $e_i\longmapsto te_i+(1-t)e_{i+1}$).

Reste à voir que $\gamma_n$ est homotope à la composée $T_n\longrightarrow Gr_{n-1}\subset Gr_n\quad(x,v)\longmapsto\mathbb{C}e_1\oplus s(x\cap v^\perp)$. Pour cela on considère les homotopies $T_n\times[0,1]\longrightarrow Gr_n\quad(x,v,t)\longmapsto\mathbb{C}(ts(v)+(1-t)e_1)\oplus s(x\cap v^\perp)$ puis
$T_n\times[0,1]\longrightarrow Gr_n\quad(x,v,t)\longmapsto i_t(x)$, où $s$ et $i_t$ ont la même signification que précédemment.

[32] Le groupe des coefficients étant un $p$-groupe, la localisation par $p$ n'a pas d'effet en cohomologie.

[33] On utilise évidemment ici le théorème de comparaison des revêtements étales et analytiques finis d'une variété complexe lisse, l'autre ingrédient de fond de la proposition 8.

*Retour à la proposition 12 :* En appliquant le foncteur de complétion profinie $\widehat{.}$, on obtient à homotopie près une fibration $\widehat{\gamma}_n : \widehat{Gr_{n-1}} \longrightarrow \widehat{Gr_n}$ [34]. Étant donné $\sigma \in \widehat{\mathbb{Z}}^*$, considérons le diagramme commutatif (à homotopie près)

$$\begin{tikzcd} \sigma^*\widehat{Gr_{n-1}} \arrow[r] \arrow[d, "\sigma^*\widehat{\gamma}_n"'] & \widehat{Gr_{n-1}} \arrow[r, "\sigma^{-1}"] \arrow[d, "\widehat{\gamma}_n"'] & \widehat{Gr_{n-1}} \arrow[d, "\widehat{\gamma}_n"'] \\ \widehat{Gr_n} \arrow[r, "\sigma"] & \widehat{Gr_n} \arrow[r, "\sigma^{-1}"] & \widehat{Gr_n} \end{tikzcd}$$

(la commutation du carré de droite provient de la naturalité de l'action de $\widehat{\mathbb{Z}}^*$, vu que $\gamma_n$ est homotopiquement équivalent à l'inclusion $Gr_{n-1} \to Gr_n$, qui est un morphisme algébrique définissable sur $\mathbb{Q}$).

La composée $\sigma^*\widehat{Gr_{n-1}} \to \widehat{Gr_{n-1}} \xrightarrow{\sigma^{-1}} \widehat{Gr_{n-1}}$ induit une équivalence d'homotopie entre les fibres (c'est le cas de chacune des deux flèches dont elle est composée), d'où l'on déduit (par une propriété générale des fibrations) que $\sigma^*\widehat{\gamma}_n$ a le même type d'homotopie fibrée que $\widehat{\gamma}_n$. Cela entraîne que $\widehat{\xi}_n$ et $\sigma^*\widehat{\xi}_n$ ont le même type d'homotopie fibrée sphérique stable par un argument général de topologie reposant essentiellement sur la finitude homotopique de $BG_\infty$. On conclut ensuite grâce à la naturalité de l'action de $\widehat{\mathbb{Z}}^*$ et au fait que tout élément de $\widehat{K}(X)$ est combinaison linéaire d'images réciproques des $\widehat{\xi}_n$.

*Démonstration de la conjecture d'Adams (proposition 6) à partir de la proposition 12 :* Soient $X$ un espace fini (que l'on peut supposer connexe sans perte de généralité), $k \in \mathbb{Z}$ et $\xi \in \widetilde{K}(X)$. On utilise l'élément $\sigma_k$ de $\widehat{\mathbb{Z}}^*$ dont la composante dans $\widehat{\mathbb{Z}}_p^*$ est $k$ lorsque le nombre premier $p$ ne le divise pas, 1 sinon. Soit $\alpha$ l'image de $\xi$ dans $\widehat{K}(X)$ : $\sigma_k^*\alpha$ a la même image dans $\widehat{K}_p(X)$ que l'image $\beta$ de $\psi^k\alpha$ dans $\widehat{K}(X)$ pour $p$ premier à $k$ (d'après la description des opérations d'Adams en termes de $K$–théorie profinie donnée dans la proposition 11), donc le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \widehat{K}(X) \arrow[r] \arrow[d] & {[X, BG_\infty]} \arrow[d] \\ \prod_{p\nmid k} \widehat{K}_p(X) \arrow[r] & {[X, BG_\infty[k^{-1}]]} \end{tikzcd}$$

(où $BG_\infty[k^{-1}]$ désigne le « localisé (homotopique) de $BG_\infty$ » obtenu en inversant $k$) montre que l'image de $\sigma_k^*\alpha - \beta$ dans $[X, BG_\infty[k^{-1}]] \simeq [X, BG_\infty] \otimes \mathbb{Z}[k^{-1}]$ (cet isomorphisme découle de propriétés de la localisation homotopique) est nulle, donc pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand, le type d'homotopie fibrée sphérique stable de $k^n(\sigma_k^*\alpha - \beta)$, donc de $k^n(\beta - \alpha)$ par la proposition précédente, est trivial, soit $j_X(k^n(\psi^k\xi - \xi)) = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

[34] Les $Gr_k$ sont des *pro*–espaces, mais on peut en fait ici raisonner comme s'il s'agissait d'espaces ordinaires, ce que nous continuerons à faire par la suite.