# Introduction au Domaine de Recherche

FU Lie
Directrice de thèse : Claire Voisin

15 juin 2011

## 1 Introduction

Ce texte est une introduction à quelques sujets autour d'un thème : la conjecture de Hodge et cycles algébriques. Après un rappel succinct de la conjecture de Hodge, notamment les contre-exemples de la conjecture de Hodge entière, je présente le théorème de décomposition de Beauville pour une variété à fibré canonique trivial. Parmi les facteurs irréductibles, un certain type de variété appellé *hyperkählérien* est particulierment intéressant, qui est l'analogue de la variété symplectique dans le cadre géométrie complexe. On se pose un problème naturel, qui est assuré par la conjecture de Hodge (rationnelle), concernant deux séries de variété hyperkählérienne polarisée. A la fin, pour construire un contre-exemple de la conjecture de Hodge entière, on dispose de la conjecture de Bloch pour une certaine variété de dimension 3.

Je voudrais remercier ma directrice de thèse Claire Voisin de m'introduire la géométrie de variété hyperkählérienne, et sa relation avec la théorie de Hodge.

## 2 Préliminaires

### 2.1 Variétés Kählériennes

Soit $X$ une variété complexe de dimension $n$, munie d'une métrique hermitienne $h$. On note $\omega := -\mathfrak{I}(h)$, où $\mathfrak{I}(h)$ est la partie imaginaire de $h$. On dit que $X$ est *kählérienne*, si $d\omega = 0$. On remarque que cette condition est équivalente à la commutativité de la connection de Chern et la structure complexe : $\nabla J = J\nabla$. Dans la suite, une variété kählérienne est toujours supposée compacte. On dit qu'une variété complexe compacte est *de type kählérien*, si elle admet une métrique kählérienne.

**Proposition 2.1** *La classe des variétés kählériennes est stable par :*
- *sous variété fermée ;*
- *produit, union disjoint ;*
- *fibré projectif ;*
- *éclatement ;*
- *petite deformation.*

Comme l'espaces projectif complexe admet une métrique kählérienne, la *métrique de Fubini-Study*. Par la proposition précedente, toute variété complexe projective lisse est kählérienne.

## 2.2 Cycles Algébriques

Soit $X$ une variété algébrique intègre, séparée, de type fini sur un corp. Un *cycle* de dimension $r$ est une somme formelle finie de sous variété intègre de dimension $r$ dans $X$. Le groupe abélien des cycles de dimension $r$ est noté $\mathcal{Z}_r(X)$, de même manière, $\mathcal{Z}^k(X)$ est le groupe des cycles de codimension $k$ dans $X$, qui est aussi le groupe abélien libre de base les sous variétés intègre de codimension $k$.

On définit ensuit un sous groupe $\mathcal{Z}_r(X)_{\mathrm{rat}}$ de $\mathcal{Z}_r(X)$ comme le sous groupe abélien engendré par les éléments de la forme $W(0) - W(1)$, où $W$ est une sous variété intègre de $X \times \mathbf{P}^1$ plate sur $\mathbf{P}^1$, et $W(0), W(1)$ est la fibre de $W \to \mathbf{P}^1$ au dessus du point 0, 1 respectivement. Deux cycles algébriques de codimension $r$ est *rationnellement équivalents*, si leur différence est dans le sous groupe $\mathcal{Z}_r(X)_{\mathrm{rat}}$. D'une façon analogue, on a $\mathcal{Z}^k(X)_{\mathrm{rat}}$.

Le groupe de Chow $\mathrm{CH}^k(X) := \mathcal{Z}^k(X)/\mathcal{Z}^k(X)_{\mathrm{rat}}$ est défini comme le quotient du groupe de cycles algébriques de codimension $k$ modulo l'équivalence rationnelle. Il admet une application *classe de cycle* vers le groupe de cohomologie défini par, pour une sous variété intègre, le poussé avant de la classe fondamentale de la désingularisation de cette sous variété :

$$\mathrm{cl} : \mathrm{CH}^k(X) \to H^{2k}(X; \mathbf{Z}(k)),$$

où $\mathbf{Z}(k) = (2\pi i)^k \mathbf{Z}$.

## 2.3 La Première Classe de Chern

Soit $X$ une variété complexe. Considère la suite exacte courte d'exponentiel :

$$0 \to \mathbf{Z}(1) \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \to 0,$$

dont la suite exacte longue induite a une partie :

$$H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbf{Z}(1)).$$

On rappelle que $H^1(X, \mathcal{O}_X^*) = \mathrm{Pic}(X)$ est le groupe de Picard qui paramètre les classes d'isomorphisme de fibré en droite. On définit *la première classe de Chern* d'un fibré en droite holomorphe (ou algébrique) comme l'image par ce morphisme, et la première classe de Chern d'un fibré vectoriel est par définition celle de son déterminant.

On remarque que pour une variété complexe projective lisse, en identifiant le groupe de Picard et le groupe de Chow $\mathrm{CH}^1(X) := \mathcal{Z}^1(X)/\mathcal{Z}^1(X)_{rat}$ des diviseurs modulo l'équivalence rationnelle, on peut identifier l'application de classe de cycle et le morphisme de première classe de Chern :

$$\begin{aligned} c_1 : \mathrm{Pic}(X) \simeq \mathrm{CH}^1(X) &\xrightarrow{\mathrm{cl}} H^2(X; \mathbf{Z}(1)) \\ L \simeq \mathcal{O}_X(D) &\mapsto c_1(L) = \mathrm{cl}(D). \end{aligned}$$

# 3 La Conjecture de Hodge

On a le théorème fondamental suivant dû à Hodge :

**Théorème 3.1 (Décomposition de Hodge)** *Soit $X$ une variété kählérienne de dimension $n$, alors pour tout entier positif $k \leq 2n$, on a une décomposition*

$$H^k(X; \mathbf{C}) = \oplus_{p+q=k} H^{p,q}(X),$$

*où $H^{p,q}(X) = H^q(X, \Omega_X^p)$.*

On remarque que $H^{p,q}(X)$ est aussi le sous groupe de $H^k(X, \mathbf{C})$ constitué des éléments représentables par une $k$-forme fermée de type $(p, q)$.

Soit $X$ une variété complexe projective lisse, on a l'application de *classe de cycle* :

$$\mathrm{cl} : \mathrm{CH}^k(X) \to H^{2k}(X, \mathbf{Z}(k)).$$

D'ailleurs, l'inclusion $\mathbf{Z}(k) \subset \mathbf{C}$ induit un morphisme de changement de coefficient $\phi : H^{2k}(X, \mathbf{Z}(k)) \to H^{2k}(X, \mathbf{C})$, alors l'image du composé $\phi \circ \mathrm{cl}$ sera bien dans le facteur $H^{k,k}(X)$, *i.e.* la classe de cohomologie d'un cycle algébrique de codimension $k$ est une classe entière de type $(k, k)$ pour la décomposition de Hodge. C'est-à-dire, l'image du morphisme de classe cl est dans le groupe des *classes de Hodge entières* défini comme

$$Hdg^{2k}(X, \mathbf{Z}) := \phi^{-1}(H^{k,k}) \subset H^{2k}(X, \mathbf{Z}(k)).$$

En particulier, toute classe de torsion dans $H^{2k}(X, \mathbf{Z}(k))$ est une classe de Hodge entière.

La conjecture originale de Hodge est la réciproque :

**Conjecture 3.2 (Conjecture de Hodge Entière)** *Soit $X$ une variété projective lisse sur $\mathbf{C}$ de dimension $n$. Toute classe de Hodge entière $\alpha \in Hdg^{2k}(X, \mathbf{Z})$ provient d'un cycle algébrique : il existe $z \in \mathrm{CH}^k(X)$ telle que $\mathrm{cl}(z) = \alpha$.*

**Remarques 3.3**
(1) Cette conjecture est triviale pour $k = 0$ ou $n$, donc pour une courbe ;
(2) D'après le théorème de Lefschetz sur les classes $(1, 1)$, la conjecture de Hodge entière est vraie pour des classes de Hodge de degré 2, en particulier, pour une surface ;
(3) Le premier contre-exemple à la conjecture de Hodge entière a été fourni par Atiyah-Hirzebruch [AH62]. Ils ont utilisé la $K$-théorie pour démontrer qu'une certaine classe de Hodge de torsion n'est pas la classe d'un cycle algébrique. Totaro [Tot97] réinterprète ce résultat dans le cadre de la théorie de cobordisme algébrique, et obtient plus de classes de torsion qui sont des contre-exemples à la conjecture de Hodge entière.
(4) Les classes de Hodge non-torsion posent encore des problèmes. Kollár construit une telle classe de Hodge entière non-torsion qui ne peut pas être algébrique.

(5) Pour les variétés de dimension 3, Voisin[Voi06] montre la conjecture de Hodge entière pour les variétés uniréglées (ou de Calabi-Yau) de dimension 3.

(6) Il est facile de construire des contre-exemples au théorème de Voisin mentionné dans la remarque précédente en dimension au moins 4 en prenant le produit de $\mathbf{P}^1$ avec l'exemple de Kollár. On pourrait renforcer l'hypothèse en 'rationnellement connexe' (ou même 'unirationnelle'), cependant, dans [SV05], Soulé et Voisin construisent à partir de l'exemple de Kollár, des variétés rationnelles avec des classes de Hodge entières non algébriques. D'ailleurs, Colliot-Thélène et Voisin [CTV10] construisent des variétés rationnellement connexes(ou même unirationnelles) de dimension au moins 6, comme contre-exemples à la conjecture de Hodge entière.

(7) En regardant le théorème de Voisin dans Remarque(5), on pourrait être tenté de penser que la condition que $\mathbf{CH}_0(X)$ est petit (par exemple, supporté sur une surface, comme dans le cas uniréglé) suffit à entraîner la conjecture de Hodge entière.

Mais Colliot-Thélène et Voisin [CTV10] ont construit une variété de dimension 3 (cf. la troisième section), qui, *à supposer qu'elle satisfasse bien la conjecture de Bloch*, fournirait un contre-exemple à l'implication optimiste ci-dessus, parce que son troisième groupe de cohomologie nonramifiée à coefficients $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ est non nul.

On note qu'un certain multiple de la classe de Hodge dans l'exemple de Kollár devient algébrique quand même.

Considérons :

**Conjecture 3.4 (Conjecture de Hodge Rationnelle)** *Soit $X$ une variété projective lisse sur $\mathbf{C}$ de dimension $n$. Toute classe de Hodge rationnelle $\alpha \in Hdg^{2k}(X, \mathbf{Q})$ provient d'un $\mathbf{Q}-$cycle algébrique : il existe $z \in \mathrm{CH}^k(X)_{\mathbf{Q}}$ telle que $\mathrm{cl}(z) = \alpha$. C'est-à-dire, toute classe de Hodge entière a un multiple qui est la classe d'un cycle algébrique.*

Dans l'énoncé ci-dessus, le groupe de *classes de Hodge rationnelles* est défini de la même manière que le cas entier :

$$Hdg^{2k}(X, \mathbf{Q}) := H^{2k}(X, \mathbf{Q}(k)) \cap H^{k,k}(X) \subset H^{2k}(X, \mathbf{C}).$$

On remarque que le morphisme de changement de coefficients induit par l'inclusion $\mathbf{Q}(k) \subset \mathbf{C}$ est toujours injectif : $\phi_{\mathbf{Q}} : H^{2k}(X, \mathbf{Q}(k)) \hookrightarrow H^{2k}(X, \mathbf{C})$

**Remarques 3.5** (1) Grâce au théorème de Lefschetz difficile, la conjecture de Hodge rationnelle pour le degré $2k$ ($k \leq n$) entraine celle pour le degré $2(n-k)$. En particulier, on sait que la conjecture est vraie pour $k = 0, 1, n-1, n$.

(2) Voisin[Voi02a] montre que la conjecture de Hodge ne peut pas se généraliser à toutes les variétés kählériennes, même les classes de Chern des faisceaux cohérents ne suffisent pas pour engendrer toutes les classes de Hodge rationnelles.

# 4 Variétés Hyperkählériennes Compactes

## 4.1 Variétés Kählérienne avec $c_1(X) = 0$

**Théorème 4.1 ([Yau78])** *Soit $X$ une variété complexe compacte de type kählérien, on suppose que sa première classe de Chern est nulle : $c_1(T_X) = 0$, alors il existe une unique métrique kählérienne $\omega$ dans chaque classe de kähler, telle que la courbure de Ricci correspondante est nulle :* $\mathrm{Ric}(X, \omega) = 0$.

**Remarque 4.2** Pour une variété kählérienne compacte, la courbure de Ricci n'est autre que la courbure, à un scalaire non-nul près, du fibré canonique muni de la métrique induite. Par conséquent, la condition d'annulation de la courbure de Ricci dans le théorème est équivalente à dire que le fibré canonique est plat, *i.e.* admet une section non-nulle parallèle (donc elle ne s'annule nulle part). De manière équivalente, la représentation d'holonomie est restreinte dans le groupe unitaire spécial $\mathbf{SU}(n)$, où $n$ est la dimension de $X$.

On a ainsi le corollaire suivant :

**Corollaire 4.3** *Soit $X$ une variété compacte de type kählérien, les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *La première classe de Chern est nulle : $c_1(T_X) = 0$ ;*
2. *le fibré canonique $K_X$ est trivial ;*
3. *Il existe une métrique kählérienne Ricci-plate.*

Notons d'abord un résultat fondamental concernant la théorie de déformation pour les variétés de ce type :

**Théorème 4.4 (Bogomolov-Tian-Todorov)** *Soit $X$ une variété kählérienne compacte, si son fibré canonique est trivial $K_X \simeq \mathcal{O}_X$, alors l'espace de Kuranishi* $\mathrm{Déf}_X$ *est lisse.*

Par conséquent, pour une variété $X$ de fibré canonique trivial, la dimension de $\mathbf{Déf}_X$ est égale à la dimension de l'espace tangent $H^1(X, T_X) \xrightarrow{\simeq} H^1(X, \Omega_X^{n-1})$, qui est $h^{n-1,1}(X)$. Dans le cas où $X$ est hyperkählérienne (voir plus bas),

$$\iota_{\phi_X} : H^1(X, T_X) \xrightarrow{\simeq} H^1(X, \Omega_X^1),$$

donc la dimension de $\mathbf{Déf}_X$ est $h^{1,1}(X)$.

En utilisant la classification de groupe d'holonomie, Beauville [Bea83] décompose une telle variétés, à un revêtement étale fini près, en un produit de facteurs *irreducibles* :

**Théorème 4.5 (Beauville[Bea83])** *Soit $X$ une variété complexe compacte de type kählérien, dont la première classe de Chern est nulle : $c_1(T_X) = 0$. Alors il existe un revêtement étale fini $\widetilde{X}$ de $X$ isomorphe à un produit :*

$$\widetilde{X} \simeq T \times \prod Y_i \times \prod Z_j,$$

*où $T$ est un tore complexe, $Y_i$ sont des variétés de Calabi-Yau simplement connexe, et $Z_j$ sont des variétés hyperkählériennes compactes.*
*En particulier, si X est de plus simplement connexe, alors on a un isomorphisme :*

$$X \simeq \prod Y_i \times \prod Z_j$$

*avec $Y_i$ et $Z_j$ des types comme ci-dessus.*

Proof. Grâce au théorème de Yau, on peut supposer que $X$ est une variété kählérienne Ricci-plate, de dimension $n$, donc la représentation d'holonomie est contenue dans le sous groupe $\mathrm{SU}(n)$. Par le théorème de de Rham, son revêtement universel se decompose (isométriquement) :

$$\hat{X} \simeq \mathbf{C}^k \times \prod X_l,$$

avec chaque $X_l$ compacte [1], Ricci plate, simplement connexe, ayant la représentation d'holonomie irréductible et contenue dans $\mathrm{SU}(d_l)$, $d_l = \dim X_l$. D'après la classification de groupe d'holonomie [Ber55], le groupe d'holonomie de chaque $X_l$ est soit égal à $\mathrm{SU}(d_l)$, soit égal à $\mathrm{Sp}(d_l/2)$. Par les interprétations holonomiques des variétés de Calabi-Yau et hyperkählériennes (voir plus bas), on a :

$$\hat{X} \simeq \mathbf{C}^k \times \prod Y_i \times \prod Z_j$$

avec $Y_i$ et $Z_j$ comme dans le théorème. En utilisant le fait que les groupes des automorphismes de $Y_i$ et $Z_j$ sont tous discrets, on peut arriver à un revêtement étale fini satisfaisant la conclusion. Pour plus de détail, *cf* [Bea83]. □

Avant de décrire les trois types de variété mentionnés, on note qu'une surface K3 est à la fois Calabi-Yau et hyperkälérienne, et une courbe elliptique est à la fois un tore complexe et de Calabi-Yau, donc pour obtenir l'unicité de la décomposition dans le théorème et faciliter la présentation suivante, on va insister qu'*une variété de Calabi-Yau est de dimension au moins 3.*

On commence à préciser les trois types de variété. D'abord,

**Tores Complexes** Un *tore complexe* $T = V/\Lambda$ est par définition le quotient d'un espace vectoriel complexe $V$ par un réseau $\Lambda$ ( sous groupe libre, discret, engendrant $V$).

## 4.2 Variétés de Calabi-Yau

Par définition, une variété kählérienne compacte $Y$ de dimension $n \geq 3$ est de type *Calabi-Yau*, si le fibré canonique $K_Y$ est trivial et $H^0(Y, \Omega^i_Y) = 0$ pour tout $0 < i < n$.

Voici une autre manière de les caractériser :

[1] La compacité est assurée par le théorème de Cheeger-Gromoll [CG72].

**Lemme 4.6 (Interprétation holonomique de Calabi-Yau)** *Soir $Y$ une variété complexe compacte de type kählérien de dimension $n \geq 3$. Alors $Y$ est une variété de Calabi-Yau si et seulement si elle admet une métrique kählérienne dont le groupe d'holonomie est égal à* $\mathrm{SU}(n)$.

La démonstration utilise le principe de Bochner, qui dit que sur une variété kählérienne compacte Ricci-plate, tout champ de tenseur holomorphe est parallèle.

**Exemple 4.7** Voici quelques exemples de variétés de Calabi-Yau :

1. Intersection complète lisse de hypersurfaces de degré $(d_1, d_2, \cdots, d_r)$ dans $\mathbf{P}^m$, avec $\sum_{i=1}^r d_i = m + 1$.
2. Soit $X$ une variété de Fano [2]. alors un membre général $Y$ dans le système linéaire $|-K_X|$, est une variété de Calabi-Yau.

Notons quelques résultats généraux pour les variétés de Calabi-Yau :

**Projectivité** Comme $H^{2,0}(Y) = H^{0,2}(Y) = 0$ par définition, le cône de Kähler est ouvert dans $H^2(Y, \mathbf{C})$, ainsi contient des points rationnels. Donc on en déduit par le théorème de Kodaira que toute variété de Calabi-Yau est projective.

**Groupe fondamental** Soit $Y$ une variété de Calabi-Yau de dimension $n$, alors si $n$ est pair, $Y$ est simplement connexe, parce que $\chi(X, O_X) = \chi(\widetilde{X}, O_{\widetilde{X}}) = n/2 + 1$ ; si $n$ est impair, le groupe fondamental de $Y$ est fini.

**Invariance birationnelle de nombre de Betti** Soient $X$, $Y$ deux variétés projectives lisses à fibré canonique trivial. Si $X$, $Y$ sont birationnelles, alors elles ont les même nombres de Betti.

## 4.3 Variétés Hyperkählériennes Compactes

Par définition, une variété kählérienne compacte $X$ de dimension $2n$ est *hyperkählérienne* ou *symplectique holomorphe irréductible*, si $X$ est simplement connexe, et $H^0(X, \Omega_X^2)$ est de dimension 1, engendré par une 2-forme holomorphe $\phi$, qui est non-dégénérée en chaque point. La 2-forme holomorphe $\phi$ est appelée la forme *symplectique* de $X$, qui est définie à un scalaire près.

Une définition équivalente :

**Lemme 4.8 (Interprétation holonomique de variété hyperkählérienne)** *Soir $X$ une variété complexe compacte de type kählérien de dimension $2n$. Alors $X$ est hyperkählérienne si et seulement si elle admet une métrique kählérienne dont le groupe d'holonomie est égal à* $\mathrm{Sp}(n)$.

[2] *i.e.* $-K_X$ est ample, par exemple, intersection complete lisse de degré $(d_1, d_2, \cdots, d_r)$ dans $\mathbf{P}^m$, avec $\sum_{i=1}^r d_i \leq m$ ; espace homogène $G/P$ avec $G$ un groupe linéaire et $P$ un sous groupe parabolique, etc.

Par le principe de Bochner et le principe d'holonomie, on déduit que $H^0(X, \Omega_X^{2i}) = \mathbf{C} \cdot \phi^i$, pour $0 \leq i \leq n$, où $\phi$ est la 2-forme holomorphe symplectique de $X$.

**Exemple 4.9** Donnons quelques exemples de variété hyperkählérienne :

1. Surfaces K3 ;
2. Soit $S$ une surface K3, alors le schéma de Hilbert ponctuel $S^{[r]}$ est une variété hyperkählérienne, *cf* [Bea83] ;
3. Soit $A$ un tore complexe de dimension 2, alors la fibre du morphisme somme $S : A^{[r]} \to A$, notée $K_r := S^{-1}(0)$ est une variété hyperkählérienne, *cf* [Bea83] ;
4. Comme une déformation d'une variété hyperkählérienne reste hyperkählérienne, on obtient des familles de variété hyperkählérienne en déformant les exemples précédents.
5. O'Grady construit une famille de variété hyperkählérienne de dimension 10, comme une désingularisation d'une compactification lisse de l'espace de module des fibrés vectoriels stables de rang 2 avec classes de Chern $c_1 = 0, c_2 = 4$ sur une surface K3, c.f.[O'G99].
6. De façon analogue, dans [O'G03], O'Grady construit une famille de dimension 6 à partir de l'espace de module des fibrés vectoriels stables de rang 2 avec classes de Chern $c_1 = 0, c_2 = 2$ sur un tore complexe de dimension 2, et prenant une fibre pour la rendre simplement connexe.

Un outil important pour étudier les variétés hyperkählériennes est la forme quadratique de Beauville-Bogomolov :

### 4.3.1 Forme quadratique de Beauville-Bogomolov

Soit $X$ une variété hyperkählérienne de dimension $2n$, avec la 2-forme symplectique holomorphe $\phi$, on définit une forme quadratique $q_X$ sur $H^2(X, \mathbf{C})$ par la formule suivante :

$$q_X(\alpha) := \frac{n}{2} \int_X \alpha^2 (\phi\overline{\phi})^{n-1} + (1-n) \int_X \alpha \phi^{n-1} \overline{\phi}^n \int_X \alpha \phi^n \overline{\phi}^{n-1}$$

Si on décompose $\alpha$ par type : $\alpha = a\phi + \omega + b\overline{\phi}$ où $a, b \in \mathbf{C}$ et $\omega$ est de type (1,1), alors

$$q_X(\alpha) = ab + \frac{n}{2} \int_X \omega^2 (\phi\overline{\phi})^{n-1}$$

**Théorème 4.10 (Beauville[Bea83])** *La forme quadratique $q_X$ est non-dégénérée ; à un scalaire réel positif près, elle provient d'une forme quadratique entière primitive sur $H^2(X, \mathbf{Z})$ de signature $(3, b_2 - 3)$.*

**Théorème 4.11 (Relation de Fujiki[Fuj87])** *On garde les notations comme avant. Il existe une constante réelle positive $c$ telle que*

$$q_X(\alpha)^n = c \int_X \alpha^{2n}$$

*pour toute $\alpha \in H^2(X, \mathbf{C})$.*

### 4.3.2 Théorème de Torelli local

D'après le théorème de Bogomolov-Tian-Todorov 4.4, l'espace de Kuranishi $\text{Déf}_X$ est lisse de dimension $h^{1,1}(X)$. On note $\mathscr{X} \to \text{Déf}_X$ pour la famille universelle, et pour chaque $t \in \text{Déf}_X$, on note $X_t$ la déformation correspondante avec $\phi_t$ la forme symplectique sur $X_t$. On peut définir *l'application de période* :

$$\mathscr{P} : \text{Déf}_X \to \mathbf{P}\, H^2(X, \mathbf{C})$$

qui associe $t \in \text{Déf}_X$ à la classe $[u_t^*(\phi_t)]$ dans $\mathbf{P}\, H^2(X, \mathbf{C})$, où $u : X \times \text{Déf}_X \xrightarrow{\simeq} \mathscr{X}$ est une trivialization difféomorphique locale. On remarque que l'application de période est holomorphe.

**Théorème 4.12 (Torelli local[Bea83])** *L'image de l'application de période $\mathscr{P}$ est dans $\Omega$, qui est un ouvert d'un quadratique défini par :*

$$\Omega = \left\{ \alpha \in \mathbf{P}\, H^2(X, \mathbf{C}) | q_X(\alpha) = 0, q_X(\alpha, \overline{\alpha}) > 0 \right\}. \tag{1}$$

*De plus, l'application $\mathscr{P} : \text{Déf}_X \to \Omega$ est étale* [3].

Proof. L'application tangente de $\mathscr{P} : \text{Déf}_X \to \mathbf{P}\, H^2(X, \mathbf{C})$ est

$$T_0 \,\text{Déf}_X = H^1(X, T_X) \xrightarrow{\iota} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(H^{2,0}(X), H^{1,1}(X) \oplus H^{0,2}(X)),$$

donnée par le produit intérieur. Par la transversalité de Griffiths et la définition de $\Omega$, l'application tangente de $\mathscr{P} : \text{Déf}_X \to \Omega$ est

$$H^1(X, T_X) \xrightarrow{\iota} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(H^{2,0}(X), H^{1,1}(X)), \tag{2}$$

encore donnée par le produit intérieur. Puisque la forme symplectique $\phi$ induit un isomorphisme entre le fibré tangent et le fibré cotangent : $\iota_\phi : T_X \xrightarrow{\simeq} \Omega_X^1$, ainsi un isomorphisme $\iota_\phi : H^1(X, T_X) \to H^1(X, \Omega_X^1)$, d'où, 2 est bien un isomorphisme, *i.e.* $\mathscr{P} : \text{Déf}_X \to \Omega$ est localement isomorphe. □

L'analogue du théorème de Torelli global de surfaces K3 ne vaut plus pour les variétés hyperkählériennes de dimension supérieure ([Deb84]), en fait une correspondance birationnelle entre deux variétés hyperkählériennes induit un isométrie de structure de Hodge pour le $H^2$.

### 4.3.3 Déformations polarisées

À partir d'une variété hyperkählérienne *projective* $X$, grâce au théorème de Torelli local (Théorème 4.12), on peut identifier (locallement) $\text{Déf}_X$, par l'application de période $\mathscr{P}$, avec $\Omega$ defini par (1). Un problème naturel est caractériser les déformations projectives.

[3] *i.e.* localement isomorphe, néamoins, il faut faire attention que l'espace de déformation n'est pas forcément séparé.

Fixons une polarisation $L$ de $X$, *i.e.* un fibré en droite ample, considérons

$$\Omega_L := \{\phi \in \Omega | q_X(\phi, c_1(L)) = 0\}, \tag{3}$$

qui est une hypersurface dans $\Omega$. Comme une classe entière $a \in H^2(X_t, \mathbf{Z})$ est de type $(1,1)$ si et seulement si elle satisfait $q_{X_t}(a, \phi_t) = 0$, donc les déformations $X_t$ représentées par $t \in \Omega_L$ sont les deformations de $X$ pour lesquelles $L_t := u_t^{-1*}(L)$ reste de type (1,1). En particulier, $X_t$ est projective, polarisée par $L_t$, pour tout $t \in \Omega_L$. On appelle cette famille $\Omega_L$ la *déformation de $X$ respectant la polarisation $L$*. On remarque que deux familles de déformations respectant $L_1$ et $L_2$ sont transverse dans $\mathrm{Déf}_X$ si et seulement si $c_1(L_1)$ et $c_1(L_2)$ sont linéairement indépendentes dans $H^2(X, \mathbf{C})$.

**Corollaire 4.13** *Les deformations projectives sont dense dans* $\mathrm{Déf}_X$.

**Exemple 4.14** Voici quelques familles *complètes*[4] de deformations polarisées de $S^{[2]}$ pour une surface K3 projective $S$ projective.

1. La variété des droites contenues dans une hypersurface cubique de dimension 4, *cf* [BD85] ;
2. La variété des sommes de puissances d'une hypersurface cubique de dimension 4, *cf* [IR01],[IR07] ;
3. Un revêtement double d'une certaine hypersurface sextique de dimension 4 (*EPW-sextique*), *cf* [O'G06] ;
4. Soit $V$ un espace vectoriel de dimension 10, on fixe une 3-forme $\sigma$ sur $V$ générale, alors la sous variété du Grassmannien $\mathrm{G}(6, V)$ constituée de 6-plans sur lequel la restriction de $\sigma$ est nulle, *cf* [DV10].

### 4.3.4 Equivalence birationnelle de variété hyperkählérienne

**Théorème 4.15 ([Huy99])** *Soient $X$, $X'$ deux variétés hyperkählériennes, et $f : X \dashrightarrow X'$ une application birationelle*[5]*, alors il existe deux familles lisses propres $\mathscr{X} \to S$ et $\mathscr{X}' \to S$ sur une base $S$ disque de dimension 1, satisfaisant :*

*(1) Les fibres spéciales sont : $\mathscr{X}_0 \simeq X$, $\mathscr{X}'_0 \simeq X'$ ;*

*(2) Il existe une application birationnelle $\mathscr{X} \dashrightarrow \mathscr{X}'$, qui est un isomorphisme sur $S - \{0\}$ et coïncide avec $f$ aux fibres spéciales.*

Bref, variétés hyperkählériennes birationnelles fournissent une paire de points non-séparés dans l'espace de module. Dans [Huy99], Huybrechts en fait démontre aussi l'inverse.

**Corollaire 4.16** *Deux variétés hyperkählériennes birationnellement équivalentes sont équivalentes par déformation, en particulier, elles sont difféomorphes.*

[4]C'est-à-dire, la famille est une hypersurface dans l'espace de Kuranishi de la forme précedente, *i.e.* une famille de déformation respectant une certaine polarisation.

[5]Plutôt biméromorphe.

## 4.4 Cubiques de dimension 4 et variétés hyperkählériennes

Dans l'article [BD85], Beauville et Donagi associent à une hypersurface cubique lisse $X$ de dimension 4 dans $\mathbf{P}^5$ une variété hyperkählérienne $F_X$ de dimension 4. $F_X$ est la variété paramétrant les droites contenues dans $X$. La droite universelle

$$\begin{tikzcd} P_X \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & X \\ F_X & \end{tikzcd} \tag{4}$$

fournit une correspondance $X \vdash F_X$, qui induit un morphisme de structures de Hodge $p_*q^* : H^4(X, \mathbf{Z}) \to H^2(F_X, \mathbf{Z})$, qui devient un isomorphisme à coefficients rationnels (cf [BD85]).

Par ailleurs, dans [IR01], [IR07], Iliev et Ranestad ont construit une autre variété hyperkählérienne $G_X$ de dimension 4 associée à $X$, obtenue comme la *variété des sommes de puissances* de $X$, qui paramètre grosso modo les 10-uplets $(a_1, \ldots, a_{10})$ *non ordonnés* d'éléments de $\mathbf{P}^{5*}$ tels que

$$f_X = \sum_i a_i^3,$$

où $f_X$ est le polynôme homogène de degré 3 définissant $X$.

Les deux variétés $F_X$ et $G_X$ ne sont pas isomorphes en général (cf. [IR07]) bien qu'elles le deviennent sur une hypersurface de l'espace de modules de $X$, représenté les cubiques Pfaffiens. Selon toute probabilité (en fait il suffit pour s'en assurer de vérifier que les deux représentations de monodromie coïncident), il existe également un isomorphisme de structures de Hodge rationnelles $\phi : H^4(X, \mathbf{Q}) \to H^2(G_X, \mathbf{Q})$. Voici le problème sur lequel je suis en train de travailler :

**Problème 1**. *Construire une famille de* 1*-cycles* $\mathcal{Z} \subset G_X \times X$ *telle que le morphisme induit par la classe de* $\mathcal{Z}$ *soit un isomorphisme de structures de Hodge* $[\mathcal{Z}]^* : H^4(X, \mathbf{Q}) \to H^2(G_X, \mathbf{Q})$.

Notons que si on connaît l'existence de $\phi$, l'existence du 1-cycle relatif $\mathcal{Z}$ est prédite par la conjecture de Hodge (cf. [Voi02b, Chap. 11]).

# 5 La conjecture de Bloch pour certaines variétés de dimension 3

La conjecture de Bloch a d'abord été formulée pour les surfaces comme une réciproque au théorème de Mumford([Mum68]) :

**Conjecture 5.1** *Soit $S$ une surface complexe projective lisse telle que $H^i(S, O_S) = 0$ pour $i > 0$. Alors le morphisme de degré* $\deg : \mathrm{CH}_0(S) \to \mathbf{Z}$ *est un isomorphisme.*

Cette conjecture a été établie dans [Voi92] pour les surfaces de Godeaux quintiques, quotients de surfaces quintiques dans $\mathbf{P}^3$ par un groupe d'ordre 5 agissant sans point fixe. La version généralisée de cette conjecture est la suivante (cf. [Voi03, Chap. 10]) :

**Conjecture 5.2** *Soit $X$ une variété complexe projective lisse telle que $H^i(X, O_X) = 0$ pour $i > 0$. Alors* $\deg : \mathrm{CH}_0(S) \to \mathbf{Z}$ *est un isomorphisme.*

Dans l'article [Voi92], cette conjecture est étudiée également pour des variétés de dimension 3 à fibré canonique de torsion. Le schéma de preuve a été récemment repris par Peters [Pet10], ce qui lui permet d'établir la conjecture 5.2 pour certaines hypersurfaces d'espaces projectifs à poids de dimension 4, ayant cette fois un fibré canonique ample.

Par ailleurs, Colliot-Thélène et Voisin ont construit des variétés $X$ de dimension 3 de la façon suivante : on prend une hypersurface $Y$ de bidegré $(3, 4)$ dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^3$ invariante sous une certaine action de $G = \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$ mais générique par ailleurs et on considère une désingularisation $X$ du quotient $Y/G$. L'intérêt pour ces variétés vient du fait que si les paramètres sont très généraux, ces variétés ne satisfont pas la conjecture de Hodge pour les classes de Hodge entières. Pourtant, elles satisfont la condition d'annulation $H^i(X, O_X) = 0$ pour $i > 0$. Un second problème de recherche possible est le suivant :

**Problème 2**. *Montrer que ces variétés $X$ satisfont la conjecture de Bloch, i.e.* $\mathrm{CH}_0(X) = \mathbf{Z}$.

Outre l'intérêt intrinsèque d'une telle étude et plus généralement du développement de méthodes pour l'étude de ce type de problèmes, une motivation pour ce problème est la suivante : Voisin [Voi06] montre qu'une variété de dimension 3 uniréglée satisfait la conjecture de Hodge pour les classes de Hodge entières. Comme on a déjà mentionné dans Remarques 3.3 (5)(7), pour la conjecture de Hodge entière, peut-on faiblir l'hypothèse *'uniréglée'* en '$\mathrm{CH}_0(X)$ *supporté sur une surface*' ? L'exemple de Colliot-Thélène et Voisin, modulo la solution du Problème 2, donnerait un contre-exemple à l'énoncé optimiste suivant :

*Si* $\dim X = 3$, *et* $\mathrm{CH}_0(X) = \mathbf{Z}$, *alors $X$ satisfait la conjecture de Hodge pour les classes de Hodge entières.*

# Références


[AH62] M. F. Atiyah and F. Hirzebruch, *Analytic cycles on complex manifolds*, Topology **1** (1962), 25–45. MR 0145560 (26 #3091)

[BD85] Arnaud Beauville and Ron Donagi, *La variété des droites d'une hypersurface cubique de dimension* 4, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **301** (1985), no. 14, 703–706. MR 818549 (87c :14047)

[Bea83] Arnaud Beauville, *Variétés kähleriennes dont la première classe de chern est nulle*, J. Differential Geom. **18** (1983), no. 4, 755–782 (1984). MR 730926 (86c :32030)

[Ber55] Marcel Berger, *Sur les groupes d'holonomie homogène des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes*, Bull. Soc. Math. France **83** (1955), 279–330. MR 0079806 (18,149a)

[CG72] Jeff Cheeger and Detlef Gromoll, *The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature*, J. Differential Geometry **6** (1971/72), 119–128. MR 0303460 (46 #2597)

[CTV10] J.-L. Colliot-Thélène and C. Voisin, *Cohomologie non-ramifiée et conjecture de hodge entière*, prépublication (2010).

[Deb84] Olivier Debarre, *Un contre-exemple au théorème de Torelli pour les variétés symplectiques irréductibles*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **299** (1984), no. 14, 681–684. MR 770463 (87c :14039)

[DV10] Olivier Debarre and Claire Voisin, *Hyper-Kähler fourfolds and Grassmann geometry*, J. Reine Angew. Math. **649** (2010), 63–87. MR 2746467

[Fuj87] Akira Fujiki, *On the de Rham cohomology group of a compact Kähler symplectic manifold*, Algebraic geometry, Sendai, 1985, Adv. Stud. Pure Math., vol. 10, North-Holland, Amsterdam, 1987, pp. 105–165. MR 946237 (90d :53083)

[Huy99] Daniel Huybrechts, *Compact hyper-Kähler manifolds : basic results*, Invent. Math. **135** (1999), no. 1, 63–113. MR 1664696 (2000a :32039)

[IR01] Atanas Iliev and Kristian Ranestad, *$K3$ surfaces of genus 8 and varieties of sums of powers of cubic fourfolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), no. 4, 1455–1468 (electronic). MR 1806733 (2002c :14082)

[IR07] ———, *Addendum to "$K3$ surfaces of genus 8 and varieties of sums of powers of cubic fourfolds" [Trans. Amer. Math. Soc.* **353** *(2001), no. 4, 1455–1468 ; mr1806733]*, C. R. Acad. Bulgare Sci. **60** (2007), no. 12, 1265–1270. MR 2391437 (2009a :14066)

[Mum68] D. Mumford, *Rational equivalence of* **0***-cycles on surfaces*, J. Math. Kyoto Univ. **9** (1968), 195–204. MR 0249428 (40 #2673)

[O'G99] Kieran G. O'Grady, *Desingularized moduli spaces of sheaves on a $K3$*, J. Reine Angew. Math. **512** (1999), 49–117. MR 1703077 (2000f :14066)

[O'G03] ———, *A new six-dimensional irreducible symplectic variety*, J. Algebraic Geom. **12** (2003), no. 3, 435–505. MR 1966024 (2004c :14017)

[O'G06] ———, *Irreducible symplectic 4-folds and Eisenbud-Popescu-Walter sextics*, Duke Math. J. **134** (2006), no. 1, 99–137. MR 2239344 (2007e :14062)

[Pet10] Chris Peters, *Bloch-type conjectures and an example of a three-fold of general type*, Commun. Contemp. Math. **12** (2010), no. 4, 587–605. MR 2678942

[SV05] C. Soulé and C. Voisin, *Torsion cohomology classes and algebraic cycles on complex projective manifolds*, Adv. Math. **198** (2005), no. 1, 107–127. MR 2183252 (2006i :14006)

[Tot97] Burt Totaro, *Torsion algebraic cycles and complex cobordism*, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), no. 2, 467–493. MR 1423033 (98a :14012)

[Voi92] Claire Voisin, *Sur les zéro-cycles de certaines hypersurfaces munies d'un automorphisme*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **19** (1992), no. 4, 473–492. MR 1205880 (93m :14005)

[Voi02a] ———, *A counterexample to the Hodge conjecture extended to Kähler varieties*, Int. Math. Res. Not. (2002), no. 20, 1057–1075. MR 1902630 (2003e :32037)

[Voi02b] ———, *Hodge theory and complex algebraic geometry. I*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 76, Cambridge University Press, Cambridge, 2002, Translated from the French original by Leila Schneps. MR 1967689 (2004d :32020)

[Voi03] ———, *Hodge theory and complex algebraic geometry. II*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 77, Cambridge University Press, Cambridge, 2003, Translated from the French by Leila Schneps. MR 1997577 (2005c :32024b)

[Voi06] ———, *On integral Hodge classes on uniruled or Calabi-Yau threefolds*, Moduli spaces and arithmetic geometry, Adv. Stud. Pure Math., vol. 45, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2006, pp. 43–73. MR 2306166 (2008f :14057)

[Yau78] Shing Tung Yau, *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I*, Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), no. 3, 339–411. MR 480350 (81d :53045)