ETUDE RAFFINEE D'INEGALITES EN ANALYSE.

ALEXIS DROUOT

1. INTRODUCTION

Considérons un cadre tout d'abord général. Soit E, F deux espaces de Banach et $\mathcal{T}$ un opérateur linéaire continu, de E dans F. L'hypothèse de continuité s'écrit alors

$$\|\mathcal{T}f\|_F \leq C_{\mathcal{T}}\|f\|_E, \tag{1.1}$$

ou $f \in E$ et $C_{\mathcal{T}}$ est une constante indépendante de f.

De nombreuses questions se posent alors :

(i) Quelle est la valeur de la plus petite constante $C_{\mathcal{T}}$ satisfaisant (1.1) ?
(ii) Quelles sont les éléments de E satisfaisant l'égalité ?
(iii) Que peut-on dire d'une suite d'éléments extremisants, c'est a dire une suite d'éléments f_n satisfaisant $\|f_n\|_E = 1$ et $\|\mathcal{T}f_n\|_F \to C_{\mathcal{T}}$?
(iv) Que peut-on dire des éléments tels que l'égalité n'est pas satisfaite ?

Ces questions sont de difficultés extrêmement variables, dépendant essentiellement de la structure de l'inégalité (1.1). Donnons quelques exemples concrets.

Exemples.

- Inégalité de Hölder : soit $1 \leq p \leq \infty$ et p' l'exposant dual ; soit $g \in L^{p'}$. Alors il existe une constante A avec
$$\|fg\|_1 \leq A\|f\|_p.$$
La meilleure constante A est connue et vaut $\|g\|_{p'}$; l'égalité est réalisée dès que f et g sont liées. La preuve de ce fait découle de la preuve de l'inégalité de Hölder. C'est un cas où la réponse à la question (ii) est en fait quasiment immédiate.
- Inégalité de Sobolev : cette inégalité concerne une injection de Sobolev. Soit d un entier, $1 < p < d$, $p^* = dp/(d-p)$. Alors pour toute fonction dans l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$,
$$\|f\|_{p^*} \leq A\|\nabla f\|_p. \tag{1.2}$$
La meilleure constante et la valeur d'extremiseurs est connue depuis 1975 et la première preuve est obtenue par Talenti [18]. La preuve utilise des arguments de réarrangement et du calcul des variations.

- Hardy-Littlewood-Sobolev : cette inégalité est d'une manière ou d'une autre entrelacée avec l'inégalité de Sobolev ci-dessus. Soit d un entier et $1 < p, q < \infty$, $0 < \lambda < d$

satisfaisant

$$\frac{1}{p} + \frac{\lambda}{d} = 1 + \frac{1}{q}.$$

Alors pour toute fonction dans L^p,

$$\| | \cdot |^{-\lambda} \star f \|_q \leq A \| f \|_p. \tag{1.3}$$

En 1983, Lieb a montré dans un célèbre article [15] que des extremiseurs existent pour cette inégalité ; il les a également tous identifiés dans les trois cas $p = 2$, $q = 2$, $p = q'$, dérivant la valeur de la meilleure constante. La question a été largement étudiée depuis et plusieurs papiers sur le sujet ont été écrits, amenant à une multitude de preuves de ce fait – voir entre autres [3], [4]. La valeur de la meilleure constante dans le cas général est cela dit toujours inconnue !

– Transformée de Fourier : considérons la transformée de Fourier d'une fonction test, définie par

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{i\xi x} dx.$$

Il est bien connu que $\mathcal{F}$ s'étend de L^p dans $L^{p'}$ pour $1 \leq p \leq 2$, amenant à l'inégalité

$$\|\mathcal{F}f\|_{p'} \leq A \|f\|_p.$$

La meilleure constante pour cette inégalité est connue et remonte a Beckner [2] en 1974.

– Transformée k-plan : considérons la transformée k-plan d'une fonction test de $\mathbb{R}^d$, définie par

$$\mathcal{R}_k f(\Pi) = \int_{\Pi} f d\lambda,$$

où Π est un plan affine de dimension k de $\mathbb{R}^d$ et $d\lambda$ est sa mesure superficielle. Alors si on munit l'espace des k-plans d'une mesure naturelle (voir [16] pour plus de détails) $\mathcal{R}_k$ s'étend comme une isométrie de L^1 dans L^1 et un opérateur de $L^{\frac{d+1}{k+1}}$ dans L^{d+1}. L'inégalité sous-jacente est en fait délicate a prouver, voir Christ [5] ; elle s'écrit

$$\|\mathcal{R}_k f\|_{d+1} \leq A \|f\|_{\frac{d+1}{k+1}}. \tag{1.4}$$

La meilleure constante est connue – voir Drouot [10]. La question de l'unicité des extremiseurs est encore ouverte, mis a part pour $k = d-1$ – voir Christ [9]. Par interpolation, il existe des inégalités intermédiaires. Mis à part quelques cas particuliers on ne connait pas la meilleure constante pour ceux-ci. Baernstein et Loss ont cependant conjecturé sa valeur dans [1].

On développera dans les parties 3 et 4 la dérivation de la meilleure constante pour cette inégalité, et on étudiera une propriété de compacité des suites extremisantes radiales.

2. Quelques outils utiles

Ici on présente quelques outils utiles pour répondre aux questions précédemment posées. Il en existe bien sur des dizaines d'autres, la recherche des meilleures constantes et des extremiseurs étant une question naturelle, donnant des informations sur la structure et le domaine d'application efficace des inégalités.

Réarrangement. La notion de réarrangement est une notion très utile pour ce genre de problème. C'est une opération qui transforme des fonctions quelconques en des fonctions plus simples, et qui conserve certaines quantités. Nous nous limiterons ici à la notion de réarrangement radial décroissant.

Definition 2.1. *Soit $1 \leq p \leq \infty$ et f une fonction de L^p. Il existe une unique fonction $f^\star$ radiale, décroissante, satisfaisant la propriété suivante : pour tout $\lambda \geq 0$,*

$$|\{x, |f(x)| \geq \lambda\}| = |\{x, |f^\star(x)| \geq \lambda\}|. \tag{2.1}$$

En l'occurrence, ce réarrangement conserve la norme L^p.

L'utilité du réarrangement est qu'elle transforme la fonction considérée en une fonction plus simple ; et que, pour certaines inégalités, la fonction réarrangée a plus de chance d'être un extremiseur. Par exemple, dans le cas des inégalités (1.2), (1.3), (1.4),

$$\begin{aligned} \| |\cdot|^{-\lambda} * f\|_q &\leq \| |\cdot|^{-\lambda} * f^\star\|_q \\ \|\nabla f\|_{p^*} &\leq \|\nabla f^\star\|_{p^*} \\ \|\mathcal{R}_k f\|_q &\leq \|\mathcal{R}_k f^*\|_q. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Ainsi, pour ces inégalités, il nous est permis de considérer des suites extremisantes radiales décroissantes. Non seulement elles réduisent le problème multidimensionnel en un problème à une seule dimension, mais en plus les suites de fonctions décroissantes bornées dans un espace L^p possèdent une propriété de compacité importante : elles convergent presque partout.

Introduisons quelques propriétés supplémentaires des réarrangements, sans en donner les preuves.

Lemme 2.2. *Pour toutes fonctions positives $g, h \in L^p$ avec $1 \leq p \leq \infty$, on a :*

(i) $\|g\|_p = \|g^*\|_p$,

(ii) $\|g^* - h^*\|_p \leq \|g - h\|_p$,

(iii) $g \leq h \Rightarrow g^* \leq h^*$,

(iv) *Pour tout* $\lambda \geq 0$, $\lambda g = (\lambda g)^*$.

(v) *Si h décroit strictement alors* $\|h - g\|_p = \|h^* - g\|_p \Rightarrow g = g^*$.

Pour une introduction plus complète, voir Grafakos [13].

Principe de concentration-compacite. On présente une brève introduction à ce principe fameux, qui a constitué une grande étape dans l'étude des inégalités en analyse fonctionnelle. C'est une caractérisation des comportements possibles d'une suite de fonctions bornée dans L^1 : ou bien elle s'aplatit (suite dite évanescente), ou bien elle se concentre (suite concentrée), ou bien elle mixe ces deux comportements (suite dichotomique). La première version de ce résultat est donnée par Lions dans [14] et prend la forme suivante :

Lemme 2.3. *Soit f_n une suite de fonctions dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, avec $\|f_n\|_1 = 1$. Il existe une suite extraite de f_n, encore notée f_n, satisfaisant l'une des propriétés suivantes :*

(i) *(concentration) Il existe une suite y_n d'éléments de $\mathbb{R}^d$, telle que quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe $R > 0$, avec pour tout entier n,*

$$\int_{B(y_n,R)} |f_n| \geq 1 - \varepsilon. \tag{2.3}$$

(ii) *(évanescence) Quelque soit R,*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^d} \int_{B(y,R)} |f_n| = 0. \tag{2.4}$$

(iii) *(dichotomie) Il existe f_n^1 et f_n^2 deux suites de fonctions à support compact, et $\alpha \in (0,1)$ avec*

$$\|f_n^1\|_1 \to \alpha, \;\; \|f_n^2\|_1 \to 1-\alpha, \;\; \|f_n - f_n^1 - f_n^2\|_1 \to 0, \tag{2.5}$$

$$d(\mathrm{supp}(f_n^1), \mathrm{supp}(f_n^2)) \to \infty. \tag{2.6}$$

L'argument de Lions pour l'étude de l'inégalité de Sobolev (1.2) dans [14] – et qui s'applique à de nombreuses autres inégalités – est que la dichotomie ne peut apparaitre pour une suite extremisante. On verra plus loin un exemple d'application.

Symétries en compétition. Le principe, développé par Carlen et Loss [4] est le suivant. Considérons l'inégalité (1.1) et supposons que deux opérateurs U et V, de E dans lui-même, non forcement linéaires, satisfont les inégalités

$$\|\mathcal{T}Uf\|_F \geq \|\mathcal{T}f\|_F, \;\; \|\mathcal{T}Vf\|_F \geq \|\mathcal{T}f\|_F. \tag{2.7}$$

Ainsi, si f est un élément extremisant, Uf et Vf le sont aussi. Supposons que les opérateurs U et V agissent de façons très différentes sur E, c'est a dire que $\mathrm{Im}(U) \cap \mathrm{Im}(V)$ est "petit". Existe-t-il un élément extremisant f tel que $Uf = Vf = f$? Si tel est le cas, alors d'une part $f = (UV)^n f$ et d'autre part, f est un point fixe de U et de V.

Cela donne une clé pour construire l'élément f : partant d'un extremiseur, f_0 on considère la suite d'extremiseurs $f_n = (UV)^n f_0$, le but étant de montrer que cette suite converge vers un élément f. La condition $Uf = Vf = f$ restreint considérablement le nombre d'éléments accessibles, amenant parfois a une valeur explicite de f et donc de la meilleure constante $C_{\mathcal{T}}$.

3. EXEMPLE : PRÉCOMPACITÉ DES SUITES RADIALES EXTREMISANTES DANS LE CAS DE LA k-PLANE TRANSFORM

Choisissons $2 \leq k \leq d-1$ et posons une bonne fois pour toutes

$$\mathcal{R} := \mathcal{R}_k, \;\; p := \frac{d+1}{k+1}, \;\; q := d+1.$$

On va parler ici de la preuve du théorème suivant, qui a été faite en détails dans Drouot [11].

Theoreme 1. *Considérons l'inégalité (1.4), pour $\underline{2 \leq k \leq d-1}$ et f_n une suite de fonctions extremisante radiale. Alors il existe une suite $\lambda_n \in \mathbb{R}$ telle que $g_n := \lambda_n^{d/p} f_n(\lambda_n \cdot)$ converge dans L^p vers un extremiseur.*

Grace à l'inégalité (2.2) on peut simplement considérer un problème unidimensionnel. Comme montré dans Drouot [10] montrer la précompacité de suites extremisantes radiales pour $\mathcal{R}$ revient à le montrer pour l'opérateur $\mathcal{T}$ défini par

$$\mathcal{T}_k f(r) = \int_0^\infty f(\sqrt{r^2+s^2}) s^{k-1} ds = \int_r^\infty f(u)(u^2-r^2)^{k/2-1} u du.$$

Cet opérateur envoie, en vertu des propriétés de la transformée k-plans, $L^p((0,\infty), r^{d-1}dr)$ vers $L^q((0,\infty), r^{d-k-1}dr)$.

La preuve du théorème est effectuée en trois étapes.

(1) Dans un premier temps, on construit la suite λ_n, et on montre que g_n ne peut être évanescente d'une part, et ne peut se concentrer à la manière d'une masse de Dirac, d'autre part. Cela conduit à une certaine borne uniforme sur la suite g_n : uniformément en n, on a
$$\lim_{M\to\infty} \int_{|g_n|\geq M} |g_n|^p = 0$$

(2) Dans un deuxième temps, on montre que l'opérateur réduit $\mathcal{T}$ satisfait des propriétés d'interaction faible. Cela rendra impossible le comportement dichotomique ; ainsi g_n doit être concentrée. Cela conduit a la borne uniforme suivante : uniformément en n, on a
$$\lim_{R\to\infty} \int_{r\geq R} |g_n|^p = 0$$

(3) Dans un dernier temps, on utilise ces deux bornes uniformes, des propriétés de compacité locale de $\mathcal{T}$, et des résultats d'analyse fonctionnelle pour L^p $(1 < p < \infty)$ pour montrer que g_n converge fortement.

Etape 1. On utilise ici essentiellement un raffinement de l'inégalité (1.4), prouvée par Christ [5] : $\mathcal{T}$ est continu de $L^{p,p+\delta}$ dans $L^{q,q-\delta}$, pour un certain $\delta > 0$ satisfaisant $p+\delta < q-\delta$. Cela conduit a une renormalisation naturelle de la suite f_n, nommée g_n et qui a été définie au dessus. La suite g_n satisfait les propriétés suivantes : uniformément en n,

$$\lim_{M\to\infty} \int_{|g_n|\geq M} |g_n|^p = 0. \tag{3.1}$$

Cette inégalité résulte d'un théorème prouvé dans Drouot [10] assurant que les suites extremisantes *radiales, décroissante* convergent vers des extremiseurs. De plus,

$$\exists E_n \subset \mathbb{R},\ \ |E_n| = 1,\ \ g_n \gtrsim \mathbb{1}_{E_n}. \tag{3.2}$$

Le problème de cette propriété est qu'elle ne prouve pas directement que la suite g_n est non-évanescente. Cela dit, la preuve de cette inégalité n'utilise pas le fait que g_n est extremisante ; elle résulte du fait que $\|\mathcal{T} g_n\|_q \sim 1$. En conséquence, il faut la raffiner en utilisant que $\|\mathcal{T} g_n\|_q$ est proche de la meilleure constante. C'est la qu'un phénomène intéressant apparait : en utilisant cette propriété, on peut prouver que E_n est d'une certaine manière proche de 0. Plus précisément, l'étude de l'opérateur $\mathcal{T}$ montre que uniformément en n,

$$\lim_{R\to\infty} |E_n \cap [0,R]| = 0.$$

Cela prouve que g_n ne peut être évanescente. De plus, elle ne peut converger faiblement vers 0.

Etape 2. Ici on prouve que la suite g_n ne peut être dichotomique. Supposons le contraire ; il existe alors g_n^1 et g_n^2 deux suites de fonctions à support compact, et $\alpha \in (0,1)$ avec

$$\|g_n^1\|_1 \to \alpha,\ \ \|g_n^2\|_1 \to 1-\alpha,\ \ \|g_n - g_n^1 - g_n^2\|_1 \to 0, \tag{3.3}$$

$$d(\mathrm{supp}(g_n^1), \mathrm{supp}(g_n^2)) \to \infty. \tag{3.4}$$

Un raffinement du lemme de Lions 2.3 utilisant le fait que $g_n \gtrsim \mathbb{1}_{F_n}$ pour un certain $F_n \subset [0,R]$ permet alors de transformer les suites g_n^1 et g_n^2 (on ne changera néanmoins pas leur nom par mesure de simplicité) de manière à ce que $\mathrm{supp}(g_n^1) \subset [0,R]$. A partir de là, on utilise une propriété d'interaction faible de l'opérateur $\mathcal{T}$: si $d([0,R], \mathrm{supp}(g_n^2)) \to 0$ alors pour tout $1 \leq m \leq d$,

$$\langle 1_{[0,R]}, (\mathcal{T} g_n^2)^m \rangle \to 0. \tag{3.5}$$

Cela montre, grâce à la borne (3.1), que $\mathcal{T} g_n^1$ et $\mathcal{T} g_n^2$ doivent interagir faiblement, i.e.

$$\|\mathcal{T}(g_n^1 + g_n^2)\|_q^q - \|\mathcal{T} g_n^1\|_q^q - \|\mathcal{T} g_n^2\|_q^q \to 0. \tag{3.6}$$

Cela rend impossible toute dichotomie. En effet, posons

$$S_\alpha = \sup\{\|\mathcal{T} f\|_q^q,\ \ \|f\|_p^p = \alpha\} > 0. \tag{3.7}$$

Alors en utilisant les propriétés de dilatation de l'inégalité, $S_\alpha = \alpha^{\frac{q}{p}} S_1$. Ainsi, puisque $p < q$, des arguments de convexité montrent que pour $\alpha \in]0,1[$,

$$S_\alpha + S_{1-\alpha} < S_1. \tag{3.8}$$

Supposons que la suite $f_n := |g_n|^{p^*}$ soit dichotomique ; on considère α, f_n^1 et f_n^2 associes, $g_n^1 := |f_n^1|^{1/p^*}, g_n^2 = |f_n^2|^{1/p^*}$. Alors utilisant le fait que g_n^1, g_n^2 sont à supports disjoints, et l'estimation (3.6)

$$S_\alpha + S_{1-\alpha} \geq \|\mathcal{T} g_n^1\|_q^q + \|\mathcal{T} g_n^2\|_q^q \sim \|\mathcal{T} g_n^1 + \mathcal{T} g_n^2\|_q^q = \|\mathcal{T} g_n\|_q^q \to S_1$$

ce qui est une contradiction avec (3.8)

Ainsi on en tire la borne uniforme en n

$$\lim_{R\to\infty} \int_{r\geq R} |g_n|^p = 0. \tag{3.9}$$

Étape 3. Cette étape démarre par une constatation importante : l'opérateur $\mathcal{T}$ est proche d'être un opérateur compact. Plus précisément, il est limite forte d'opérateurs compacts, définis par $\mathcal{T}_R := \mathcal{T}\mathbb{1}_{[0,R]}$.

Considérons $g_n^R := \mathbb{1}_{[0,R]} g_n$. Alors d'une part, $\mathcal{T} g_n^R = \mathcal{T}_R g_n$ converge fortement vers une fonction h^R ; d'autre part, $\lim_{R\to\infty} g_n^R = g_n$ uniformément en n. On en déduit alors grâce à cette borne uniforme, et au fait que h^R est une suite croissante de fonctions, que $\mathcal{T} g_n$ converge en fait fortement.

Si g est la limite faible de g_n, alors $\mathcal{T} g_n \to \mathcal{T} g$ et ainsi $\|\mathcal{T} g\|_q = A$ et $\|g\|_p = 1$. L'uniforme convexité de L^p permet de conclure : g_n converge fortement vers un extremiseur.

4. Exemple : meilleure constante dans le cas de la transformée k-plans

On présente ici une illustration des symétries en compétition, technique introduite par Carlen et Loss dans [4]. En règle générale, un haut degré de symétrie – c'est a dire un groupe de symétrie non compact de grande dimension – est un problème pour la recherche d'extremiseurs. En effet il implique que les suites extremisantes convergent en général vers 0 et il faut, pour prouver l'existence d'extremiseurs, les renormaliser en faisant agir ce groupe, comme on l'a vu dans la partie précédente. Bien sur cela concernait un cas facile : le groupe de symétrie était le groupe des dilatations, qui n'a qu'un seul degré de liberté. Dans le cas d'un groupe plus gros, cela amène à des considérations en général complexes. On pourra consulter par exemple Christ [6] et [7] pour l'etude des suites extremisantes associée à l'inégalité (1.4) dans le cas $k = d - 1$ (transformée de Radon). Le groupe de symétrie à considérer a dans ce cas au moins $d^2 + d + 1$ paramètres, ce qui accroit considérablement la difficulté.

Cependant, une fois que l'existence d'extremiseurs a été prouvée, il devient souvent plus simple de dériver leur valeur dans le cas d'un haut degré de symétrie. En effet, celles-ci sont parfois, en un sens, incompatibles et fournissent donc des informations supplémentaires sur la structure de certains extremiseurs.

Nous nous focalisons à nouveau sur l'étude de l'inégalité (1.4). Le résultat principal est le suivant :

Theoreme 2. *Un extremiseur pour* (1.4) *est*

$$x \mapsto \left[\frac{C}{1+\|Lx\|^2}\right]^{\frac{k+1}{2}}$$

ce qui mène a la valeur de la meilleure constante,

$$A(k,d) = \left[2^{k-d}\frac{|S^k|^d}{|S^d|^k}\right]^{\frac{1}{d+1}}$$

ou $|S^{i-1}|$ *est l'aire de Lebesgue de la sphère de* R^i*.*

Cela résout notamment les cas extrêmes d'une conjecture de Baernstein et Loss dans [1]. Nous esquissons ici le principe de la preuve, pour plus de détails voir Drouot [10]. La première étape est l'identification de quasi-symétries :

Theoreme 3. *Soit* V *l'opérateur de rearrangement radial,* $V : f \mapsto f^*$*, et* U *l'opérateur defini sur* L^p *par*

$$Uf(u,s) = \frac{1}{|s|^{k+1}} f\left(\frac{u}{s}, \frac{1}{s}\right),$$

ou $(u,s) \in \mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}$*. Alors* U, V *conservent la norme* L^p *et de plus,*

$$\|\mathcal{R}Uf\|_q = \|\mathcal{R}f\|_q, \tag{4.1}$$

$$\|\mathcal{R}Vf\|_q \geq \|\mathcal{R}f\|_q. \tag{4.2}$$

L'expression de U n'est pas naturelle – au sens où il n'est pas évident au premier coup d'oeil que c'est une symétrie ! – et nous essayons de donner une explication, *a posteriori*. La première des choses concerne l'expression de la transformée k-plan. Une hypothèse naturelle est qu'un changement de coordonnées conserve sa norme L^q (au determinant prés), étant donne que les coordonnées n'interviennent pas dans son expression – principe de covariance. Cela veut par exemple dire que les transformations affines sont des symétries de l'inégalité. Il y a d'autres manière d'utiliser ce fait : considérons une droite d'expression $y = ax+b$. Il n'y a aucune raison d'obtenir des résultats différents si on inverse x et y, ainsi cette droite est en un sens équivalente à la droite d'équation $y = 1/a \cdot x - b/a$. Cela incite a considérer la transformation

$$(a,b) \mapsto \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right). \tag{4.3}$$

Des tâtonnements conduiront à l'expression de la transformation U. A l'origine cette transformation a été dérivée par Christ pour le seul cas de la transformée de Radon, utilisant une correspondance entre opérateurs, cette interprétation est venue plus tard - voir [6], [7], [9].

Introduisons un dernier résultat simple avant la preuve :

Lemme 4.1. *Soit* h *tel que* $Uh = Vh = h$*. Alors il existe une constante* C *telle que*

$$h(x) = C\left[\frac{1}{1+\|x\|^2}\right]^{k+1}. \tag{4.4}$$

A partir de maintenant, on appelle H la fonction définie sur $\mathbb{R}^d$ par

$$H(x) = \left[\frac{1}{1+\|x\|^2}\right]^{k+1}.$$

Partons donc d'un extremiseur $h_0 \geq 0$, avec $\|h_0\|_p = 1$ – son existence a été prouvée au paragraphe précédent. Considérons la suite h_n définie par $h_n = (VU)^n h_0$. Alors h_n est également un extremiseur, radial décroissant. Par le théorème d'Helly, h_n admet une sous-suite $h_{\phi(n)}$convergeant presque partout vers une fonction nommée h_∞, celle-ci étant radiale décroissante.

On veut montrer que la convergence $h_{\phi(n)} \to h_\infty$ se passe en fait dans L^p. Par le raisonnement habituel invoquant l'uniforme convexité de L^p il suffit de montrer que $\|h_\infty\|_p \geq 1$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction $g_0 \geq 0$ C^∞ a support compact satisfaisant $\|h_0 - g_0\|_p \leq \varepsilon$. De plus, $g_{\phi(n)} := (VU)^{\phi(n)} g_0$ converge presque partout – a une extraction prés – vers une fonction g_∞. Comme $\|(VU)^n h_0 - (VU)^n g_0\|_p \leq \|h_0 - g_0\|_p \leq \varepsilon$, $\|h_\infty - g_\infty\|_p \leq \varepsilon$. g_0 étant C^∞ a support compact, il existe une constante C telle que $0 \leq g_0 \leq CH$, impliquant $0 \leq g_n \leq CH$ et par le théorème de convergence dominée $g_n \to g_\infty$ dans L^p, ce qui implique $\|h_\infty\|_p \geq \|g_\infty\|_p - \varepsilon \geq 1 - 2\varepsilon$ et permet de conclure.

Pour conclure il faut montrer que H est un extremiseur. Considérons

$$I := \inf_n \|h - h_{\phi(n)}\|_p.$$

Alors soit I est atteint par un élément $h_{\phi(N)}$, et dans ce cas

$$\begin{aligned} I \leq \|h - h_{\phi(N+1)}\|_p =& \|(VU)^{\phi(N+1)-\phi(N)-1} Vh - (VU)^{phi(N+1)-\phi(N)-1} VUh_{\phi(N)}\|_p \\ & \leq \|Vh - VUh_{\phi(N)} \leq \|h - Uh_{\phi(N)}\|_p = \|h - h_N\| = I. \end{aligned}$$

Cette suite d'inégalités montre que $\|Vh - VUh_{\phi(N)}\|_p = \|h - h_{\phi(N)}\|_p$ et ainsi par les propriétés du réarrangement 2.2 $h_{\phi(N)} = Uh_{\phi(N)}$, ce qui permet de conclure par le lemme : $h_{\phi(N)}$ est un extremiseur (non nul) satisfaisant $h_{\phi(N)} = Uh_{\phi(N)} = Vh_{\phi(N)}$. Par le lemme 4.1, $h_{\phi(N)} = H$. Dans le cas ou I n'est pas atteint par un des h_n, I est atteint par h_∞ et le même raisonnement permet de conclure, utilisant également le fait que h_∞ n'est pas nul.

RÉFÉRENCES

[1] A. BAERNSTEIN and M. LOSS, *Some conjectures about L^p-norms of k-plane transforms*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano 67 (1997), 9-26 (2000).

[2] W. BECKNER, *Inequalities in Fourier analysis*, Ann. of Math. 102 (1975), 159-182.

[3] E. A. CARLEN, J. A. CARILLO, M. LOSS, *Hardy-Littlewood-Sobolev inequalities via fast diffusion flows*, Proc. Nat. Acad. USA 107 (2010), no. 46, 19696-19701.

[4] E. CARLEN and M. LOSS, *Extremals of functionals with competing symmetries*, J. Funct. Anal. 88(2), 437-456 (1990).

[5] M. CHRIST, *Estimates for the k-plane transform*, Indiana Univ. Math. Jour., 33 (1984), 891-910.

[6] M. CHRIST, *Quasiextremals for a Radon-like transform*, preprint, arXiv :1106.0722.

[7] M. CHRIST, *On extremal for a Radon-like transform*, preprint, arXiv :1106.0728.

[8] M. CHRIST and Q. XUE, *Smoothness of extremizers of a convolution inequality*, preprint, arXiv :1012.5458.

[9] M. CHRIST, *Extremizers for a Radon transform inequality*, preprint, arXiv :1106.0719.

[10] A. DROUOT, *Best constant and value of extremizers for a k-plane transform inequality*, preprint. ArXiv : 1111.5061v5.

[11] A. DROUOT, *Precompactness of radial extremizing sequences for a k-plane transform inequality*, preprint. ArXiv : 1205.3251.

[12] S. W. DRURY, *L^p estimates for the X-ray transform*, Illinois J. Math. 27 (1983), 125-129.

[13] L. GRAFAKOS, *Classical and Modern Fourier Analysis*, Prentice Hall, NJ 2003.

[14] P. L. LIONS, *The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations. The locally compact case, Part 1*, Ann. I. H., Anal. Nonlin., 1 (1984), 109-145.

[15] E. H. LIEB, *Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities*, Ann. Math. 118 (1983), 349-374.

[16] P. MATTILA, *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces*, Cambridge U.P., (1995).

[17] D. M. OBERLIN and E. M. STEIN, *Mapping properties of the Radon transform*, Indiana J. Math., vol. 31 (1982), pp. 641-650.

[18] TALENTI *Best constant in Sobolev inequalities*, Ann. Math. Pura Appl., 110 (1976), 353-372.

E-mail address: `drouot@clipper.ens.fr`

ECOLE NORMALE SUPERIEURE, 45 RUE D'ULM, 75005 PARIS, FRANCE