

Algèbres de Temperley-Lieb-Jones

Invariants de noeuds

CHARLES VIAL et OLIVIER DUDAS

Exposé de Maîtrise du MMFAI encadré par MARC ROSSO
École Normale Supérieure

29 juin 2004

Résumé

Le but principal de cet exposé est l'étude des noeuds d'un point de vue algébrique. Une première approche très intuitive et géométrique consisterait à associer à chaque noeud ses invariants topologiques. Néanmoins, ce que l'on gagne en compréhension, on le perd en efficacité de calcul. Ici, nous verrons comment associer à chaque noeud de façon « unique » un invariant algébrique : un polynôme à deux variables. Ce dernier, outre sa simplicité de calcul, va se révéler plus discriminant que le polynôme d'Alexander (lui construit sur des bases topologiques) puisqu'il permet la distinction entre deux noeuds images l'un de l'autre par un miroir. Ce polynôme se révélera être une généralisation des polynômes de Jones et d'Alexander. Ensuite, nous verrons comment cette étude amène à s'intéresser à certains types d'algèbres que l'on pourra voir comme des déformations de certains groupes usuels. On verra alors comment l'existence d'une trace sur certains types d'algèbres permet de justifier l'existence d'un tel polynôme.

Nous commencerons donc par présenter des généralités d'algèbre permettant surtout de fixer les notations et le cadre de l'étude. Ensuite, nous définirons les noeuds et admettrons des propriétés d'invariance par isotopie liant les entrelacs et les tresses, trop éloignées du sujet de l'exposé pour nous ramener à l'étude purement algébrique du groupe de tresses. Enfin, nous en viendrons au coeur du sujet en construisant le polynôme de Jones et en étudiant les algèbres de Temperley-Lieb-Jones. Nous conclurons cet exposé en retrouvant l'approche originelle de Jones pour la détermination de son polynôme.

Les travaux présentés ici sont essentiellement ceux de Hoste, Ocneanu, Millet, Freyd, Lickorish, et Yetter (HOMFLY) en ce qui concerne les paragraphes 2, 3 et 4 et de Jones pour le dernier paragraphe. Nous avons été largement inspirés par [7] en ce qui concerne la partie noeud.

Table des matières

I	Présentations et représentations	3
1	Présentations de groupes et d'algèbres	3
1.1	Présentations de groupes	3
1.2	Présentations d'algèbres	4
2	Représentations linéaires	5
2.1	Généralités	5
2.2	Cas des algèbres simples	7
2.3	Algèbres semi-simples	8
II	Tresses et entrelacs	10
1	Entrelacs	10
1.1	Définitions et propriétés	10
1.2	Polynômes invariants par association	10
2	Groupe de tresses	13
2.1	Définitions et propriétés	13
2.2	Lien avec les entrelacs	14
III	Représentations de B_n et algèbres de Hecke	15
1	Algèbres de Hecke	15
2	Trace d'Ocneanu	16
IV	Polynôme HOMFLY	18
1	Existence	18
2	Quelques propriétés de $P_E(l, m)$	19
3	Spécialisation : polynôme d'Alexander et polynôme de Jones	20
V	Algèbres de Temperley-Lieb-Jones	22
1	Généralités	22
2	Lien avec les algèbres de Hecke	23
3	Polynôme de Jones	25
4	Exemple : calcul du polynôme pour les anneaux boromméens	26
	Références	28

I Généralités sur les présentations et les représentations

1 Présentations de groupes et d'algèbres

Les présentations nous serviront surtout à définir le groupe de tresses, les algèbres de Hecke et les algèbres de Temperley-Lieb-Jones. C'est le cadre naturel qui permet de relier ces trois objets.

1.1 Présentations de groupes

Définition I.1. Soit F un groupe, X un ensemble quelconque et $\sigma : X \rightarrow F$ une fonction. On dit que (F, σ) est libre sur X si pour toute fonction α de X dans un groupe G , il existe un unique morphisme β de F vers G tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma} & F \\ & \searrow \alpha & \downarrow \beta \\ & & G \end{array}$$

Théorème I.1. Soit $X \neq \emptyset$. Il existe un groupe $F(X)$ (unique à isomorphisme près) et une fonction $\sigma : X \rightarrow F(X)$ tel que $(F(X), \sigma)$ soit libre sur X .

Preuve :

On définit formellement l'ensemble $X^{-1} = \{x^{-1}, x \in X\}$. Un mot sur l'alphabet X est une suite finie d'éléments de $X \cup X^{-1}$, de la forme

$$w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_r^{\varepsilon_r} \quad \text{où } \varepsilon_i = \pm 1$$

Le mot vide est noté μ , et l'ensemble des mots sur X est noté X^* . L'opération de concaténation munit X^* d'une structure de monoïde. On voudrait supprimer les occurrences du type xx^{-1} . Pour cela on définit la relation d'équivalence \mathcal{R} sur X^* par :

$$v \mathcal{R} w \iff \text{on peut passer de } x \text{ à } y \text{ par une suite finie de suppressions ou d'insertions de } xx^{-1}, x \in X$$

Il suffit alors de remarquer que la loi de concaténation est compatible avec \mathcal{R} pour munir l'ensemble quotient $F(X) = X^*/\mathcal{R}$ d'une structure de monoïde. On définit alors l'inverse de la classe $[w]$ de l'élément $w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_r^{\varepsilon_r}$ par la classe de l'élément $w^{-1} = x_r^{-\varepsilon_r} x_{r-1}^{-\varepsilon_{r-1}} \dots x_1^{-\varepsilon_1}$, ce qui munit $F(X)$ d'une structure de groupe.

Soit $\alpha : X \rightarrow G$ une fonction. On définit $\beta : F(X) \rightarrow G$ par :

$$\beta([x_1^{\varepsilon_1} \dots x_r^{\varepsilon_r}]) = \alpha(x_1)^{\varepsilon_1} \dots \alpha(x_r)^{\varepsilon_r}$$

La fonction β est bien définie car $\alpha(x)\alpha(x)^{-1} = e$, c'est un morphisme de groupe et $\alpha = \beta \circ \sigma$ (σ étant l'inclusion de X dans $F(X)$). De plus β est l'unique morphisme vérifiant cette propriété. En effet, si γ est un morphisme de $F(X)$ vers G , il vérifie nécessairement

$$\gamma([x_1^{\varepsilon_1} \dots x_r^{\varepsilon_r}]) = \gamma([x_1])^{\varepsilon_1} \dots \gamma([x_r])^{\varepsilon_r}$$

Et comme pour tout $x \in X$, $\gamma([x]) = \alpha(x)$, on a $\gamma = \beta$. □

Proposition I.1. Si X_1 et X_2 sont deux ensembles de même cardinal, alors $F(X_1) \simeq F(X_2)$.

Preuve : Soit α une bijection de X_1 dans X_2 . On considère les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\sigma_1} & F(X_1) \\ & \searrow \alpha & \downarrow \beta_1 \\ & & F(X_2) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X_2 & \xrightarrow{\sigma_2} & F(X_2) \\ & \searrow \alpha^{-1} & \downarrow \beta_2 \\ & & F(X_1) \end{array}$$

On a alors $\beta_2 \circ \beta_1 \circ \sigma_1 = \sigma_1$ et par unicité on a $\beta_2 \circ \beta_1 = \text{id}$. De même, $\beta_1 \circ \beta_2 = \text{id}$, donc β_1 est un isomorphisme de $F(X_1)$ sur $F(X_2)$. \square

Définition I.2. La clôture normale d'un sous-ensemble S d'un groupe G est le plus petit sous groupe distingué de G contenant S . On la note

$$\langle S \rangle = \bigcap_{S \subset H \triangleleft G} H$$

Soit G un groupe engendré par X et $\alpha : Y \rightarrow X$ une surjection. Alors α induit un morphisme surjectif $\beta : F(Y) \rightarrow G$ et on a donc $G \simeq F(Y)/\text{Ker } \beta$.

Définition I.3. Soit X un ensemble quelconque, et S une partie de $F(X)$. Si π est un morphisme surjectif de $F(X)$ sur un groupe G tel que $\text{Ker } \pi = \langle S \rangle$, alors, par la remarque précédente, on a $G \simeq F(X)/\langle S \rangle$. Si ces conditions sont vérifiées, on dit que π est une présentation de G . L'ensemble des « $\pi(x) = e$ » est appelé l'ensemble des relations vérifiées par G .

Théorème I.2 (Von Dyck). Soient $F(X)$ un groupe libre, et G, H deux groupes de présentations ρ et λ vérifiant $\text{Ker } \rho \subset \text{Ker } \lambda$. Alors l'application

$$\begin{array}{ccc} \varphi : G & \rightarrow & H \\ \rho(f) & \mapsto & \lambda(f) \end{array}$$

est bien définie, et c'est un morphisme surjectif.

Preuve : si $\rho(f) = \rho(g)$ alors $fg^{-1} \in \text{Ker } \rho \subset \text{Ker } \lambda$ donc $\lambda(f) = \lambda(g)$. Donc φ est bien définie. Il est clair que c'est un morphisme de groupes et elle est surjective puisque λ l'est. \square

Ce théorème permet de donner des présentations explicites de groupes. En effet, supposons que l'on dispose d'un groupe G engendré par une partie X . Alors on a un morphisme surjectif canonique λ de $F(X)$ dans G (d'après la propriété universelle des groupes libres). De plus, si on se donne un sous-ensemble S de $F(X)$ tel que si ρ est la surjection canonique de $F(X)$ vers $F(X)/\langle S \rangle$, on ait $\text{Ker } \rho \subset \text{Ker } \lambda$ (i.e. tel que les relations « $\rho(x) = e$ » soient vraies dans G), alors d'après le théorème de Von Dyck, $F(X)/\langle S \rangle$ se surjecte dans G . Il suffit alors de vérifier que $\langle S \rangle = \text{Ker } \lambda$ pour que l'application soit un isomorphisme.

1.2 Présentations d'algèbres

Les définitions et les théorèmes sont les mêmes en remplaçant les structures de groupes par des structures d'algèbres. On définit la multiplication formelle par un scalaire d'un corps K fixé et l'addition formelle de la même façon que l'on définissait la multiplication dans les groupes libres. On obtient ainsi, à partir d'un ensemble X la K -algèbre libre associée à X , notée $A_K(X)$. Par exemple, si les $(E_{i,j})$ sont les unités matricielles de $\mathfrak{M}_n(K)$ on a la présentation suivante :

$$\begin{array}{ccc} \varphi : A_K(X_{1,1}, \dots, X_{n,n}) & \rightarrow & \mathfrak{M}_n(K) \\ X_{i,j} & \mapsto & E_{i,j} \end{array}$$

On peut décrire simplement le noyau de φ , c'est l'idéal engendré par $\{X_{i,j}X_{k,l} - \delta_{j,k}X_{i,l}\}$.

Une façon équivalente de définir cette algèbre est de considérer un K -espace vectoriel V de dimension n , de base (x_1, \dots, x_n) . L'algèbre tensorielle $T(V)$ est la K -algèbre graduée dont la composante homogène de degré n est définie par

$$T^n(V) = V^{\otimes n} = V \otimes V \otimes \dots \otimes V$$

Cette algèbre est alors exactement la K -algèbre libre engendrée par n éléments. Si on quotiente par l'idéal bilatère \mathcal{J} engendré par $\{xy - yx\}$, on obtient l'algèbre symétrique sur V , qui s'identifie à l'algèbre de polynômes $K[X_1, \dots, X_n]$. On en déduit qu'une présentation de $K[X_1, \dots, X_n]$ est donnée par

$$\begin{aligned} \psi : A_K(x_1, \dots, x_n) &\rightarrow K[X_1, \dots, X_n] \\ x_i &\mapsto X_i \end{aligned}$$

où le noyau de ψ est exactement l'idéal \mathcal{J} .

2 Représentations linéaires

Les représentations nous serviront principalement à représenter le groupe de tresses dans des algèbres de Hecke, ce qui constituera une « modélisation » de ce groupe en introduisant un paramètre. On renvoie utilement à [6].

2.1 Généralités

Dans tout ce paragraphe, \mathcal{A} désignera une algèbre associative unifère sur \mathbb{C} .

Définition I.4.

(i) Une représentation de \mathcal{A} est un couple (ρ, V) où V est un \mathbb{C} -espace vectoriel, et $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \text{End}(V)$ est un morphisme d'algèbres envoyant 1 sur l'identité de V . On dit alors que V est un \mathcal{A} -module (c'est un module pour l'action $a.v = \rho(a)(v)$).

(ii) Un sous-espace $U \subset V$ est dit invariant par la représentation si $\rho(\mathcal{A})(U) \subset U$. Si on définit $\rho|_U$ par $\forall a \in \mathcal{A} \rho|_U(a) = \rho(a)|_U$, alors $(\rho|_U, U)$ est aussi une représentation de \mathcal{A} .

(iii) Une représentation est irréductible si les seuls espaces invariants sont $\{0\}$ et V .

(iv) Une représentation est dite fidèle si ρ est un morphisme injectif.

(v) Deux représentations (ρ, V) et (τ, W) sont équivalentes si il existe un isomorphisme $T : V \rightarrow W$ appelé opérateur d'entrelacement, tel que $\forall a \in \mathcal{A}, T\rho(a) = \tau(a)T$. On note alors $(\rho, V) \cong (\tau, W)$.

On notera $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(V, W) = \{T \in \text{Hom}(V, W) / \forall a \in \mathcal{A}, T\rho(a) = \tau(a)T\}$, l'ensemble des opérateurs d'entrelacement.

Théorème I.3 (Schur). Soient (ρ, V) et (τ, W) deux représentations irréductibles de \mathcal{A} . On suppose que V et W sont de dimension finie. Alors, on a :

$$\dim \text{Hom}_{\mathcal{A}}(V, W) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\rho, V) \cong (\tau, W) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Preuve :

Soit $T \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(V, W)$ un opérateur d'entrelacement. Alors $\text{Im } T$ et $\text{Ker } T$ sont des sous-espaces invariants de V et W . Si $T \neq 0$, alors l'irréductibilité de (ρ, V) et (τ, W) force T à être un isomorphisme, et on a donc $(\rho, V) \cong (\tau, W)$.

Pour tout $S \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(V, W)$, on a $T^{-1}S \in \text{Hom}(V, V)$. L'espace V est de dimension finie, si bien que

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} \quad \dim \text{Ker}(T^{-1}S - \lambda I_V) \geq 1$$

L'irréductibilité de (ρ, V) entraîne donc $S = \lambda T$. □

Théorème I.4 (Burnside). *Soit (ρ, V) une représentation irréductible de \mathcal{A} . Si $\dim V < \infty$, alors $\rho(\mathcal{A}) = \text{End}(V)$. Autrement dit, le morphisme associé à une représentation de dimension finie est surjectif.*

Preuve :

(i) Notons $\mathcal{B} = \rho(\mathcal{A})$. Montrons que si \mathcal{B} contient un élément de rang 1 alors il les contient tous. Pour cela on considère la représentation de \mathcal{A} sur V^* définie comme la transposée de ρ :

$$\begin{aligned} \rho^* : \mathcal{A} &\rightarrow \text{End}(V^*) \\ a &\mapsto (\varphi \mapsto \varphi \circ \rho(a)) \end{aligned}$$

Alors (ρ^*, V^*) est aussi irréductible : en effet, si $L \subset V^*$ est un espace invariant, $\bigcap_{\varphi \in L} \text{Ker } \varphi$ l'est pour (ρ, V) , ce qui force $L = 0$ ou V^* . Considérons maintenant un élément f de $\rho(\mathcal{A})$ de rang 1, et g une application linéaire quelconque de rang 1. On peut alors écrire $f(x) = \psi(x)v$ et $g(x) = \varphi(x)w$. L'irréductibilité nous donne :

$$\{b(v) / b \in \rho(\mathcal{A})\} = V \quad \text{et} \quad \{\psi \circ b / b \in \rho(\mathcal{A})\} = V^*$$

Donc il existe des éléments b et b' de $\rho(\mathcal{A})$ tels que $g = b \circ f \circ b'$, de sorte que $g \in \rho(\mathcal{A})$. On en déduit, par linéarité, que $\rho(\mathcal{A}) = \text{End}(V)$.

(ii) Soit $a \in \mathcal{B}$ un élément de rang $r \geq 2$. Alors il existe $x, y \in V$ tels que $(a(x), a(y))$ soit libre. Par irréductibilité

$$\{b(a(x)) / b \in \mathcal{B}\} = V$$

Il existe ainsi $b \in \mathcal{B}$ tel que $b(a(x)) = y$. Mais alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $ab - \lambda I_V$ soit un endomorphisme non injectif de $\text{Im} a$. De plus, cet endomorphisme est non nul d'après l'hypothèse faite sur x et y . Si on forme $aba - \lambda a$, on obtient un élément de \mathcal{B} de rang $0 < r' < r$, et une itération nous ramène au cas du (i). \square

Définition I.5. *Un \mathcal{A} -module est dit complètement réductible si $\dim V < \infty$ et pour tout $W \subset V$ invariant, il existe $U \subset V$ invariant tel que*

$$V = U \oplus W$$

Dans ce cas, on a $U \simeq V/W$ en tant que \mathcal{A} -module. En effet, si P est le projecteur de V sur U parallèlement à W , on note $\tilde{P} : V/W \rightarrow U$ l'isomorphisme d'espaces vectoriels associé. Alors,

$$\forall v \in V \quad \rho(a)P(v + W) = P(\rho(a)v + W)$$

car U et W sont invariants, c'est à dire $\tilde{P} \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(V, W)$.

Lemme I.1. *Soient (ρ, V) une représentation complètement réductible et $W \subset V$ un espace invariant. On pose $\tau = \rho|_W$ et on définit σ par $\sigma(a)(v + W) = \rho(a)(v) + W$. Alors (τ, W) et $(\sigma, V/W)$ sont des représentations complètement réductibles.*

Preuve : On écrit $V = U \oplus W$ avec $U \simeq V/W$ invariant.

(i) Soit $Y \subset W$ un espace invariant pour (τ, W) et $P \in \text{End}_{\mathcal{A}}(V)$ la projection de V sur W . Alors $U \oplus Y$ est invariant par (ρ, V) donc il existe un sous-espace invariant Z tel que $V = (U \oplus Y) \oplus Z$. Par linéarité de P , on a $W = Y + P(Z)$. De plus

$$\dim W = \dim V - \dim U = \dim Y + \dim Z = \dim Y + \dim P(Z)$$

car $P|_Z$ est injective, son noyau étant égal à $U \cap Z$. D'où finalement :

$$W = Y \oplus Z$$

(ii) Soit $M \subset V/W$ un espace invariant par $(\sigma, V/W)$. On considère $\pi : V \rightarrow V/W$, la surjection canonique. On pose $\tilde{M} = \pi^{-1}(M) \subset V$. Alors \tilde{M} est un espace invariant par (ρ, V) donc il existe

un sous-espace invariant \tilde{N} tel que $V = \tilde{M} \oplus \tilde{N}$. Si $N = p(\tilde{N})$, alors N est invariant pour (σ, W) et on a, après examen des dimensions :

$$V/W = M \oplus N$$

□

Lemme I.2. *Soit (ρ, V) une représentation de \mathcal{A} . On suppose que V est de dimension finie. Alors on a équivalence entre :*

- (i) (ρ, V) est complètement réductible
- (ii) $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_d$, avec les V_i invariants et irréductibles

Preuve :

(i) \Rightarrow (ii) : Par récurrence sur la dimension de V . Si V est une droite vectorielle, alors il est irréductible. Supposons le résultat vrai pour tout espace de dimension k , avec $k < \dim V$. Alors, si V est irréductible, le résultat est trivial, sinon il existe des espaces invariants $U, W \subset V$ tels que $V = U \oplus W$ et le lemme précédent nous donne la complète réductibilité de U et W . Or si W_i est irréductible pour (τ, W) , il l'est aussi pour (ρ, V) car $\tau(W) = \rho(W)$. De même, si U_j est irréductible pour $(\sigma, W/V)$ alors comme $\sigma(W/V) \simeq \rho(U)$, il l'est aussi pour (ρ, V) , ce qui établit la récurrence.

(ii) \Rightarrow (i) : Par récurrence sur d . Si $d = 1$ c'est direct. Supposons le résultat vrai pour tout $k < d$, et $d > 1$. Soit W un sous-espace invariant. On considère W_1 , le projeté de W sur V_1 . L'irréductibilité de V_1 conduit à deux cas :

- $W_1 = 0$: alors $W \subset V_2 \oplus \dots \oplus V_d$ et on applique l'hypothèse de récurrence.
- $W_1 = V_1$: on pose $W' = \text{Ker}(P_1|_W)$ et on a $W' \subset V_2 \oplus \dots \oplus V_d$, donc par l'hypothèse de récurrence, on a un sous-espace invariant U tel que

$$V_2 \oplus \dots \oplus V_d = W' \oplus U$$

On a aussi $\dim W = \dim W' + \dim V_1$ par le théorème du rang. De plus $W \cap U = \{0\}$ car si $v \in W \cap U$ alors $P_1(v) = 0$ donc $v \in W' \cap U = \{0\}$. On en déduit donc, par égalité des dimensions, que :

$$V = U \oplus W$$

□

2.2 Cas des algèbres simples

Définition I.6. *Une algèbre associative \mathcal{A} est dite simple si ses seuls idéaux bilatères sont $\{0\}$ et \mathcal{A} .*

Théorème I.5 (Wedderburn). *L'algèbre $\text{End}(V)$ est simple pour tout \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie. Réciproquement, si \mathcal{A} est une algèbre unifère simple et de dimension finie, alors il existe un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie W tel que $\mathcal{A} \simeq \text{End}(W)$.*

Preuve :

(i) C'est facile

(ii) Soit ρ la représentation régulière gauche de \mathcal{A} . Si $W \subset \mathcal{A}$ est un idéal à gauche non nul de \mathcal{A} de dimension minimale, alors $(\rho|_W, W)$ est une représentation irréductible de \mathcal{A} . Le théorème de Burnside entraîne $\rho|_W(\mathcal{A}) = \text{End}(W)$ et la minimalité de W force $\rho|_W$ à être injective, d'où :

$$\mathcal{A} \simeq \rho|_W(\mathcal{A}) = \text{End}(W)$$

□

On remarque que si $\dim V < \infty$, alors la représentation de $\text{End}(V)$ sur V est irréductible. En effet, il est clair que si $u \neq 0$ alors pour tout $v \in V$, il existe $T \in \text{End}(V)$ tel que $T(u) = v$; on a donc $\text{End}(V)(u) = V$.

2.3 Algèbres semi-simples

Définition I.7. Une algèbre \mathcal{A} est dite semi-simple si elle est somme directe d'algèbres simples.

On supposera par la suite les algèbres unifères et de dimension finie. On a alors, par Wedderburn, un isomorphisme d'algèbres :

$$\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \bigoplus_{\lambda \in \mathbf{L}} \text{End}(V^\lambda) \quad \text{avec } \dim V^\lambda < \infty$$

Soit $E_\lambda = 0 \oplus \dots \oplus I_{V^\lambda} \oplus \dots \oplus 0$. On pose $e_\lambda = \Phi^{-1}(E_\lambda)$. Alors on a :

$$\forall \lambda \in \mathbf{L} \quad e_\lambda \in Z_{\mathcal{A}} \quad , \quad \sum_{\lambda \in \mathbf{L}} e_\lambda = 1 \quad , \quad e_\lambda e_\mu = \begin{cases} e_\lambda & \text{si } \lambda = \mu \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les e_λ sont appelés les *idempotents centraux minimaux*.

Donnons maintenant un critère de semi-simplicité, faisant intervenir la notion d'idéal nilpotent.

Définition I.8. Un idéal \mathfrak{J} d'une algèbre est dit nilpotent s'il existe un entier naturel m tel que $\mathfrak{J}^m = \{0\}$.

On peut maintenant énoncer le résultat suivant :

Théorème I.6 (Wedderburn-Artin). Une algèbre \mathcal{A} est semi-simple si et seulement si elle est sans idéaux nilpotents propres.

Preuve :

(i) Considérons \mathcal{B} une algèbre simple. Par définition, \mathcal{B} n'a pas d'idéaux bilatères propres. Si \mathfrak{J} est un idéal nilpotent propre de \mathcal{B} , par exemple un idéal à gauche, alors il existe un entier m tel que $\mathfrak{J}^m = 0$. Ainsi, on a

$$(\mathfrak{J}\mathcal{B})^m = \mathfrak{J}(\mathcal{B}\mathfrak{J})^{m-1}\mathcal{B} = \mathfrak{J}^m\mathcal{B} = 0$$

Donc $\mathfrak{J}\mathcal{B}$ est un idéal bilatère nilpotent de \mathcal{B} . L'algèbre \mathcal{B} étant supposée unifère, on en déduit que c'est un idéal bilatère strictement inclus dans \mathcal{B} , ce qui le force à être nul, si bien que $\mathfrak{J} = 0$. Étant donné qu'un idéal nilpotent d'une somme directe d'algèbres est la somme directe d'idéaux nilpotents, on en déduit qu'une algèbre semi-simple est sans idéaux nilpotents propres.

(ii) Pour la réciproque, établissons d'abord les deux lemmes suivants :

Lemme I.3. Tout idéal à gauche minimal d'une algèbre sans idéaux nilpotents est engendré par un élément idempotent.

Lemme I.4. Une algèbre sans idéaux nilpotents est somme directe d'idéaux à gauche minimaux.

Preuves :

1. Soit \mathfrak{J} un idéal comme dans le premier lemme. Comme \mathfrak{J}^2 est non nul, il existe a de \mathfrak{J} tel que $\mathfrak{J}a$ soit non nul et comme $\mathfrak{J}a \subset \mathfrak{J}$, par minimalité de \mathfrak{J} on déduit l'existence d'un élément e de \mathfrak{J} tel que $ea = a$, ie tel que $ea = e^2a$. Les mêmes arguments de minimalité nous donnent l'injectivité de la multiplication à droite par a de \mathfrak{J} dans \mathfrak{J} ce qui permet de conclure.

2. On construit par récurrence des idéaux $\mathfrak{J}_1, \dots, \mathfrak{J}_n$, dont \mathcal{A} est la somme directe ainsi que des idempotents e_1, \dots, e_n tels que $e_j e_h = \delta_{j,h} e_h$, et $\mathfrak{J}_k = \mathcal{A}e_k$. Si $\mathcal{A} = \bigoplus_{k=0}^n \mathfrak{J}_k$, c'est fini. Sinon, $a = \sum_{k=0}^n e_k$ et $1 - a$ sont idempotents. On a la décomposition

$$\mathcal{A} = \mathfrak{J}_0 \oplus \dots \oplus \mathfrak{J}_n \oplus \mathcal{A}(1 - a)$$

On considère alors un idéal de $\mathcal{A}(1 - a)$ comme dans le lemme précédent. □

Ensuite, on considérant \mathcal{A}^{op} l'algèbre opposée de \mathcal{A} qui est aussi sans idéaux nilpotents, on a

l'isomorphisme naturel (toute application \mathcal{A} -linéaire à gauche de \mathcal{A} dans \mathcal{A} est une multiplication à droite)

$$\mathcal{A} \simeq \text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^{op})$$

On écrit alors \mathcal{A}^{op} comme somme de modules à gauche irréductibles. On obtient :

$$\text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^{op}) \simeq \prod_k \text{End}_{\mathcal{A}}(M_k^{n_k})$$

où M est un module simple sur \mathcal{A} . Il reste à voir que $\text{End}_{\mathcal{A}}(M^n) \simeq \mathfrak{M}_n(D)$ où $D := \text{End}_{\mathcal{A}}(M)$ est un corps gauche d'après le lemme de Schur.

En effet, en notant $p_k : M^n \rightarrow M$ la $k^{\text{ième}}$ projection et $i_k : M \rightarrow M^n$ la $k^{\text{ième}}$ injection, on voit que si f est un morphisme de \mathcal{A} – modules, $f_{k,j} := p_k \circ f \circ i_j$ est un endomorphisme de M . On montre facilement que $f = \sum_{k,j} i_k f_{k,j} p_j$. On vérifie alors que l'application ainsi définie de $\text{End}_{\mathcal{A}}(M^n)$ dans $\mathfrak{M}_n(D)$ est un isomorphisme d'algèbres. \square

Pour tout élément x de \mathcal{A} , on note m_x la multiplication à gauche par x . On peut alors définir une forme bilinéaire symétrique sur \mathcal{A} par :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{A}^2 \quad T(x, y) = \text{tr}(m_x \circ m_y)$$

Son noyau est un idéal bilatère de \mathcal{A} car pour tout a on a $T(xa, y) = T(x, ay)$. De plus, il contient tous les idéaux à gauche nilpotents car si x et y sont nilpotents, $m_x \circ m_y$ l'est aussi donc il est de trace nulle. On en déduit le théorème suivant :

Théorème I.7. *Une \mathbb{C} -algèbre \mathcal{A} est semi-simple si et seulement si T est non dégénérée.*

Preuve : si T est non dégénérée, alors son noyau est nul, donc \mathcal{A} est sans idéaux nilpotents propres, et ainsi elle est semi-simple. Réciproquement, si M est une matrice carrée d'ordre n , alors $\text{tr}(m_M) = n \text{tr}(M)$ et on utilise le fait que \mathcal{A} est somme directe d'algèbres de matrices. \square

II Tresses et entrelacs

1 Entrelacs

1.1 Définitions et propriétés

Définition II.1. Un entrelac E est une sous-variété de \mathbb{R}^3 compacte, de classe C^∞ et de dimension 1. Le nombre de composantes connexes de E est noté $c(E)$. Si $c(E) = 1$ on dit que E est un noeud.

La plupart du temps les entrelacs seront orientés, et on identifiera les entrelacs isotopes. On représente les entrelacs dans le plan en les projetant et en spécifiant le type de points de croisement.

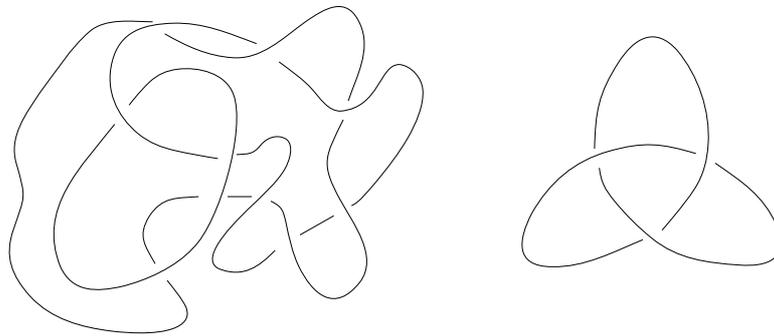
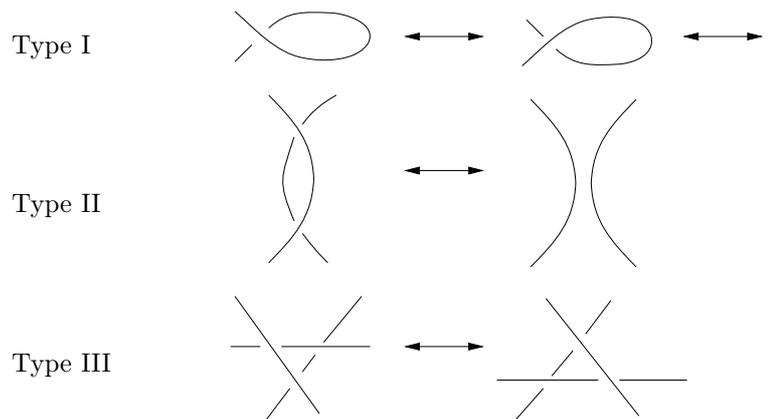


FIG. 1 – Entrelac à trois composantes connexes et noeud de trèfle

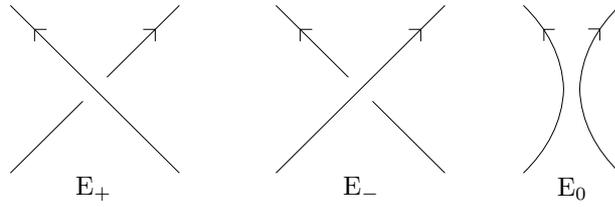
Les isotopies permettent de « démenter » les entrelacs. Elles donnent dans le plan trois types de mouvements particuliers appelés *mouvements de Reidemeister* :



Théorème II.1. Deux entrelacs orientés sont isotopes si et seulement si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie de mouvements de Reidemeister.

1.2 Polynômes invariants par association

Définition II.2. Trois entrelacs E_+ , E_- , E_0 sont dits associés s'ils ne diffèrent qu'en un point de croisement et qu'en ce point ils sont dans la configuration suivante :



On note \mathcal{E} l'ensemble des classes d'entrelacs et on s'intéresse désormais à des fonctions $P : \mathcal{E} \mapsto A$ où A est un anneau commutatif.

Définition II.3. P est dit invariant par association si $P(\bigcirc) = 1$ et s'il existe a_+, a_- et $a_0 \in A$ inversibles tels que pour tout triplet d'entrelacs associés (E_+, E_-, E_0) on ait :

$$a_+P(E_+) + a_-P(E_-) + a_0P(E_0) = 0$$

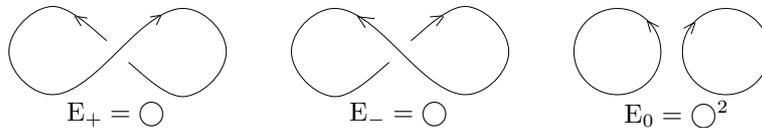
On peut déjà montrer de façon assez élémentaire que si un tel polynôme existe, alors il est uniquement déterminé par les coefficients de la relation précédente. On résume cela dans le théorème suivant :

Théorème II.2. Si P est invariant par association, alors il est uniquement déterminé par les coefficients a_+, a_- et a_0 .

Preuve : on remarque d'abord que

$$\forall r \in \mathbb{N} \quad P(\bigcirc^r) = \left(-\frac{a_+ + a_-}{a_0} \right)^{r-1}$$

où \bigcirc^r désigne le noeud composé de r cercles démêlés. En effet, la relation $P(\bigcirc) = 1$ et la propriété d'invariance de P appliquée aux entrelacs suivants



donne
$$a_+P(\bigcirc) + a_-P(\bigcirc) + a_0P(\bigcirc^2) = 0$$

On obtient ensuite la formule par récurrence sur r . Pour montrer le théorème, on se sert de la remarque suivante :

Lemme II.1. Pour tout entrelac, il existe un choix entre « passer par dessus » et « passer par dessous » (over/under crossing) à chaque point de croisement qui produise \bigcirc^r .

Pour cela, on projette l'entrelac sur un plan (de telle sorte qu'à un croisement il n'y ait que 2 brins qui se croisent). Cette projection est une immersion d'une union disjointe de cercles. On ordonne ces cercles arbitrairement. Maintenant, on parcourt l'image de chacun de ces cercles (dans l'ordre établi) en déclarant qu'à chaque croisement, on passe par dessous. \square

Pour chaque « over/under change » E_+, E_- , on obtient les 2 premiers termes d'une association. Le troisième membre E_0 de la classe (E_+, E_-, E_0) a un croisement en moins que E_+ et E_- . Ainsi, si on définit la complexité d'un entrelac comme étant la paire (N, S) , où S est le nombre de changement de croisement à effectuer pour obtenir \bigcirc^r , et N le nombre de croisements, on voit en procédant par récurrence sur la complexité ordonnée par l'ordre lexicographique, que $P(E)$ est uniquement déterminé par $P(\bigcirc)$ et la relation d'invariance

$$a_+P(E_+) + a_-P(E_-) + a_0P(E_0) = 0$$

\square

On a même de façon plus générale la propriété universelle suivante :

Théorème II.3. *Si il existe $P : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{Z}[l, l^{-1}, m, m^{-1}]$ polynôme invariant par association, de constantes (l, l^{-1}, m) , alors il est universel au sens suivant :*

(1) *P détermine un unique polynôme $T : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{Z}[x, x^{-1}, y, y^{-1}, z, z^{-1}]$ invariant par association satisfaisant*

$$xT(E_+) + yT(E_-) + zT(E_0) = 0$$

pour tout triplet E_+, E_-, E_0 d'entrelacs associés.

(2) *Si $P_A : \mathcal{E} \rightarrow A$ est un polynôme invariant par association pour les éléments a_+, a_- et a_0 dans A , alors on a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{T} & \mathbb{Z}[x, x^{-1}, y, y^{-1}, z, z^{-1}] \\ P_A \downarrow & & \swarrow s \\ A & & \end{array}$$

où évidemment s est un morphisme d'anneaux déterminé par $s(x) = a_+, s(y) = a_-$ et $s(z) = a_0$.

Prouvons d'abord un résultat utile pour la suite pour montrer que le polynôme de Jones est à coefficients entiers. C'est principalement pour cela qu'on a cité la propriété universelle ci-dessus.

Lemme II.2. *Soit $P : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{Z}[l, l^{-1}, m, m^{-1}]$ un polynôme invariant par association, i.e tel que $lP(E_+) + l^{-1}P(E_-) + mP(E_0) = 0$ et $P(\bigcirc) = 1$ pour tout triplet E_+, E_-, E_0 d'entrelacs associés. Alors, chaque monôme $l^a m^b$ apparaissant dans P_E est tel que $a \equiv b [2]$.*

Preuve : En fait, on va prouver un résultat plus précis, à savoir :

$$a \equiv b \equiv r(E) - 1 [2]$$

En se souvenant que $P(\bigcirc^r) = [-(l + l^{-1})/m]^{r-1}$, on voit que le résultat est vrai pour \bigcirc^r . Maintenant, on prend 3 entrelacs E_+, E_- et E_0 associés ; on a alors

$$P(E_+) = -l^{-2}P(E_-) - l^{-1}P(E_0)$$

et le résultat suit par récurrence sur la complexité de l'entrelac en remarquant que $r(E_+) = r(E_-) = r(E_0) \pm 1$. \square

Le lemme va nous permettre de définir correctement T . En effet, soit $P : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{Z}[l, l^{-1}, m, m^{-1}]$ invariant par association, on pose $T : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{Z}[x, x^{-1}, y, y^{-1}, z, z^{-1}]$ en remplaçant chaque monôme $l^a m^b$ de P_E par $x^i y^j z^k$, où

$$\begin{cases} k = b \\ i + j + k = 0 \\ i - j = a \end{cases}$$

Par le lemme, on voit que T est un polynôme de Laurent en x, y et z . Explicitement,

$$T(x, y, z) = P((x/y)^{1/2}, z(x/y)^{-1/2})$$

et on observe que T est homogène de degré 0. On vérifie facilement que T vérifie la relation d'invariance par association. De plus, en reprenant les notations du théorème, $s(T(E)) = P_A(E)$ est vérifiée pour tout entrelac E par unicité du polynôme invariant par association (sT et P_A satisfont la même relation d'invariance par association). \square

Le véritable problème est donc celui de l'existence d'un tel invariant. En effet, il faut trouver une fonction sur les entrelacs qui donne la même valeur pour deux entrelacs isotopes. Ceci motive la suite de notre étude, dans le sens où on va chercher à définir cette fonction sur un ensemble plus petit, ayant des propriétés algébriques remarquables, pour ensuite la prolonger à l'ensemble des entrelacs.

2 Groupe de tresses

2.1 Définitions et propriétés

On se place dans \mathbb{R}^3 et on considère deux plans horizontaux, d'équations $z = a$ et $z = b$ avec $a > b$. On choisit n points distincts dans le premier plan et on les reporte dans le second. On obtient ainsi $2n$ points :

$$\forall i = 1 \dots n \quad M_i = (x_i, y_i, a) \quad \text{et} \quad N_i = (x_i, y_i, b)$$

Une *tresse à n brins* est alors un ensemble de n chemins disjoints v_i vérifiant :

- (i) $v_i : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ est de classe C^1
- (ii) La fonction $t \mapsto \pi_3(v_i(t))$ est décroissante (où π_3 est la projection sur z)
- (iii) $\forall i = 1 \dots n, v_i(0) = M_i$ et $\{v_1(1), \dots, v_n(1)\} = \{N_1, \dots, N_n\}$.

On identifie deux tresses isotopes et, comme pour les entrelacs, on adopte une représentation par projection.

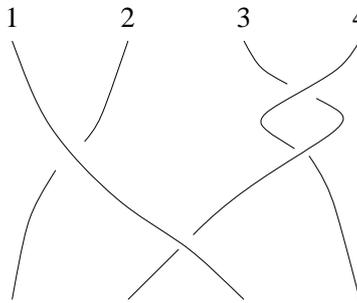


FIG. 2 – Tresse à quatre brins

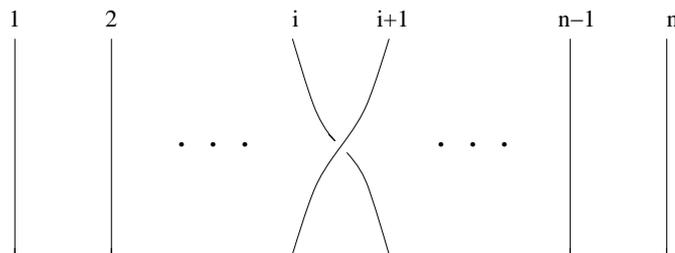
Remarque : la propriété (iii) nous montre que chaque tresse définit une permutation de $\{1, \dots, n\}$. Cependant, deux tresses différentes peuvent définir la même permutation.

On munit l'ensemble des classes d'équivalence (pour la relation « est isotope à ») de la loi de concaténation. Cela munit l'ensemble d'une structure de groupe, appelé *groupe de tresses*. Il est noté B_n .

On sait que \mathfrak{S}_n admet une présentation à la Coxeter donnée par :

$$\begin{aligned} S &= \{s_i = (i, i + 1) / i = 1 \dots n\} \text{ système générateur} \\ s_i^2 &= 1 \\ s_i s_j &= s_j s_i \text{ si } |i - j| \geq 2 \\ s_i s_{i+1} s_i &= s_{i+1} s_i s_{i+1} \end{aligned}$$

Cela nous invite à regarder les tresses σ_i pour $i = 1 \dots n - 1$:



Théorème II.4 (Artin). Une présentation de B_n est donnée par le système générateur $\{\sigma_i, i = 1 \dots n - 1\}$ et les relations :

$$\begin{aligned}\sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i \quad \text{si } |i - j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}\end{aligned}$$

2.2 Lien avec les entrelacs

Les résultats de cette section font appel à de la topologie algébrique et nous les admettrons comme annoncé en introduction. Le lecteur intéressé pourra se référer à [2] et [1].

Étant donné une tresse, on peut construire naturellement un entrelac en rejoignant les points M_i et N_i pour tout i .

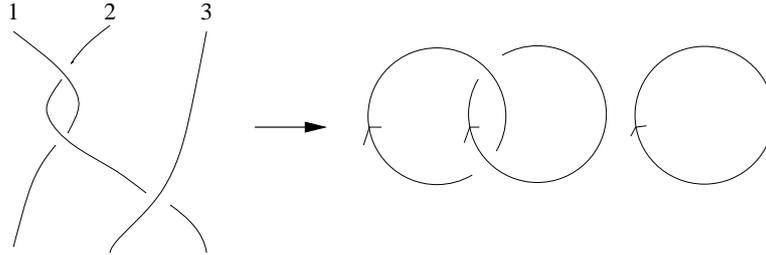


FIG. 3 – Obtention d'un entrelac à l'aide d'une tresse

Ceci nous définit une application $f : \bigcup B_n \rightarrow \mathcal{E}$
 $\alpha \mapsto \hat{\alpha}$

Réciproquement, le théorème d'Alexander nous donne la surjectivité de f :

Théorème II.5 (Alexander). *Tout entrelac est isotope à la clôture d'une certaine tresse.*

On peut maintenant se demander si f est injective, ou plus généralement, à quelles conditions on a $f(\alpha) = f(\beta)$. Pour cela, on définit les *mouvements de Markov* :

- (i) Si $\alpha, \gamma \in B_n$ $\alpha \mapsto \gamma \alpha \gamma^{-1}$
- (ii) Si $\alpha \in B_n$ $\alpha \mapsto \alpha \sigma_n^{\pm 1}$.

Pour le second mouvement, il faut voir α comme un élément de B_{n+1} en lui rajoutant un brin joignant M_{n+1} à N_{n+1} . Il est alors clair que, si $\beta = \alpha \sigma_n^{\pm 1}$ ou $\beta = \gamma \alpha \gamma^{-1}$ alors on a $f(\alpha) = f(\beta)$. Le théorème de Markov nous donne une réciproque :

Théorème II.6 (Markov). *Soient $\alpha \in B_n$ et $\beta \in B_m$. On a $f(\alpha) = f(\beta)$ si et seulement si il existe une suite finie de mouvements de Markov permettant de déduire β de α .*

Notre problème est donc ramené à la recherche d'une fonction invariante par les mouvements de Markov de laquelle on déduira une fonction sur les entrelacs. Pour la déterminer, on utilise les représentations linéaires du groupe de tresses.

III Représentations de B_n et algèbres de Hecke

1 Généralités sur les algèbres de Hecke

L'unicité du polynôme invariant par association de paramètre a_+ , a_- et a_0 ainsi établie, il s'agit maintenant de le construire explicitement. Pour ce faire, nous aurons besoin de « modéliser » le groupe de tresses de manière suffisamment simple mais assez fidèle. Par exemple, comme on a pu le voir, il est possible d'associer à chaque tresse un élément de \mathfrak{S}_n mais la perte d'information est importante puisque l'on passe d'un groupe de cardinal infini à un groupe de cardinal fini. L'idée la plus simple serait de remplacer la relation $s_i^2 = 1$ par une nouvelle relation d'ordre 2 faisant intervenir un paramètre $q \in \mathbb{C}$ pour se donner plus de « liberté ». Concrètement, on cherche à expliciter un type de représentation complexe dont les éléments sont tous diagonalisables et possèdent les deux mêmes valeurs propres. En notant alors g_i l'image du générateur s_i du groupe de tresses, son polynôme minimal est alors d'ordre 2, donc g_i vérifie une relation du type $g_i^2 = ag_i + b$ et quitte à faire des modifications évidentes, on se ramène à $g_i^2 = (q - 1)g_i + q$ pour des raisons de calculs. Ceci motive la définition suivante :

Définition III.1. *On appelle algèbre de Hecke, et on note $H_n[q]$, ou encore H_n ou même H quand il n'y a pas d'ambiguïté, l'algèbre donnée par le système générateur $\{g_i, i = 1 \dots n - 1\}$ et les relations :*

$$\begin{aligned} g_i g_j &= g_j g_i \quad \text{si } |i - j| \geq 2 \\ g_i g_{i+1} g_i &= g_{i+1} g_i g_{i+1} \\ g_i^2 &= (q - 1)g_i + q \end{aligned}$$

Montrons que, pour tout entier naturel n strictement positif, H_n a une structure de H_{n-1} -module et qu'on a un plongement $H_{n-1} \hookrightarrow H_n$. Ceci nous permet alors de définir la limite inductive de la tour

$$H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n \subset \dots$$

Par

$$H_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$$

Théorème III.1. *On a un isomorphisme canonique de bimodules*

$$\begin{aligned} \varphi : H_n \oplus H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n &\xrightarrow{\sim} H_{n+1} \\ a + \sum b_i \otimes c_i &\longmapsto a + \sum b_i g_n c_i \end{aligned}$$

Preuve :

(i) φ est bien définie car, si $u \in H_{n-1}$, u est combinaison linéaire de monômes en g_1, \dots, g_{n-2} qui commutent avec g_n donc

$$b u g_n c = b g_n u c \quad \text{et} \quad \varphi(b u \otimes c) = \varphi(b \otimes u c)$$

(ii) Montrons que φ est surjective : il suffit de prouver que H_{n-1} est engendrée par les monômes de degré 0 ou 1 en g_n . Par récurrence sur n : si $M = M_1 g_n M_2 g_n M_3$, on distingue deux cas :

- si M_2 contient une occurrence de g_n au moins, alors par l'hypothèse de récurrence, on peut se ramener au cas où il n'en contient qu'une et grâce à la commutativité, on peut écrire $M = M_1 M_2' g_n g_{n-1} g_n M_2'' M_3$. On utilise alors les relations $g_n g_{n-1} g_n = g_{n-1} g_n g_{n-1}$ pour diminuer le nombre d'occurrences de g_n .

- si $M_2 \in H_{n-1}$, alors on peut écrire $M = M_1 M_2' g_n^2 M_2'' M_3$, et on utilise la relation $g_n^2 = (q - 1)g_n + q$ pour diminuer le nombre d'occurrences de g_n .

On itère le procédé pour ne plus obtenir qu'une seule occurrence de g_n , ce qui établit la récurrence.

(iii) Par le même raisonnement qu'au (ii) on obtient une famille génératrice de H_n :

$$\mathcal{B} = \left\{ (g_{i_1} g_{i_1-1} \dots g_{i_1-k_1}) \dots (g_{i_p} g_{i_p-1} \dots g_{i_p-k_p}) \mid \begin{array}{l} 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n - 1 \\ \forall j = 1 \dots p \quad 0 \leq k_j < i_j \end{array} \right\}$$

(iv) On définit, pour $i = 1 \dots n$, un endomorphisme $L_i \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\mathfrak{S}_{n+1})$ par :

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_{n+1} \quad L_i(\sigma) = \begin{cases} s_i \sigma & \text{si } l(s_i \sigma) > l(\sigma) \\ qs_i \sigma + (q-1)\sigma & \text{si } l(s_i \sigma) < l(\sigma) \end{cases}$$

On peut alors montrer, en examinant les différents cas, que les L_i vérifient les mêmes relations que les g_i , ce qui permet de définir un morphisme d'algèbres L de H_n vers $\text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\mathfrak{S}_{n+1})$ tel que $L(g_i) = L_i$. On a alors

$$L((g_{i_1} g_{i_1-1} \dots g_{i_1-k_1}) \dots (g_{i_p} g_{i_p-1} \dots g_{i_p-k_p}))(\text{id}) = (s_{i_1} s_{i_1-1} \dots s_{i_1-k_1}) \dots (s_{i_p} s_{i_p-1} \dots s_{i_p-k_p})$$

Or ces éléments sont linéairement indépendants dans $\mathbb{C}\mathfrak{S}_{n+1}$, ce qui force les éléments de \mathcal{B} à être linéairement indépendants dans H_{n+1} . Donc \mathcal{B} est une base de H_{n+1} et $\dim H_{n+1} = (n+1)!$. Par le théorème du rang, on a

$$\dim(\text{Ker } \varphi) + (n+1)! = \dim(H_n \oplus H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n) \leq (n+1)!$$

donc $\dim(\text{Ker } \varphi) \leq 0$, ce qui force φ à être injective. \square

On peut ainsi mieux comprendre la structure de $H_n[q]$. En effet, tout mot de $H_n[q]$ se décompose sur la base \mathcal{B} avec des coefficients polynômiaux en q et q^{-1} , d'après (iii). Le déterminant $\Delta(q)$ de la forme bilinéaire T est donc lui aussi polynômial. Mais pour $q = 1$, H_n s'identifie avec l'algèbre de groupe $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ qui est semi-simple, comme toute algèbre de groupe. On a alors $\Delta(1) \neq 0$ et un voisinage V de 1 dans \mathbb{C} tel que Δ ne s'annule pas sur V . Ainsi, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème III.2. *Il existe un voisinage V_n de 1 dans \mathbb{C} tel que, pour tout $q \in V$, l'algèbre $H_n(q)$ est semi-simple.*

En fait, on peut démontrer que $H_n[q]$ est semi-simple pour tout nombre complexe q qui n'est pas racine j -ième de l'unité, avec $j \leq n$.

Maintenant, il s'agit de trouver un invariant sur les noeuds. On doit avoir $P(\gamma\alpha\gamma^{-1}) = P(\alpha)$ (ce qui fait penser à une trace) et $P(\alpha\sigma_n^{\pm 1}) = P(\alpha)$. Si on trouve une trace vérifiant la deuxième propriété sur H_n et qui commute avec $H_{n-1} \subset H_n$ (ce qui permettra de définir une trace sur H_{∞}) alors on aura le résultat recherché.

2 Trace d'Ocneanu

Théorème III.3. *Il existe une trace $\text{Tr} : H_n \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que :*

(1) *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} H_n & \xrightarrow{\quad} & H_{n+1} \\ & \searrow \text{Tr} & \swarrow \text{Tr} \\ & \mathbb{C} & \end{array}$$

(2) $\text{Tr}(1) = 1$

(3) Tr est linéaire et $\text{Tr}(ab) = \text{Tr}(ba)$

(4) $\forall a, b \in H_n, \text{Tr}(ag_n b) = z \text{Tr}(ab)$ pour z fixé

Preuve :

On définit Tr par récurrence sur n en utilisant $\varphi : H_n \oplus H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n \longrightarrow H_{n+1}$

Pour $n = 0$, $H_0 = \mathbb{C}$ donne l'identité.

Ensuite si Tr est définie sur H_n , on la prolonge à H_{n+1} par :

$$\forall x \in H_{n+1}, \quad \text{Tr}(x) = \text{Tr}(a) + \sum z \text{Tr}(b_i c_i) \quad \text{si } x = \varphi(a + \sum b_i \otimes c_i)$$

Alors les assertions (1), (2) et (4) sont directes. Pour (3) on distingue plusieurs cas :

- si $x \in H_n, y = y' g_n y''$ avec $y', y'' \in H_n$, alors

$$\mathrm{Tr}(xy) = \mathrm{Tr}(xy'g_ny'') = z\mathrm{Tr}(xy'y'') = z\mathrm{Tr}(y'y''x) = \mathrm{Tr}(yx)$$

- si x et y contiennent une occurrence de g_n alors on se ramène au cas où $x = g_n$ et $y = ag_nb$. Il y a alors plusieurs cas à distinguer selon que g_{n-1} apparaît ou non dans a ou b . Le cas le plus compliqué est celui où $a = a'g_{n-1}a''$ et $b = b'g_{n-1}b''$, avec $a', a'', b', b'' \in H_{n-1}$. Alors, on écrit

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(xy) &= \mathrm{Tr}(g_n a g_n b) = \mathrm{Tr}(g_n a' g_{n-1} a'' g_n b' g_{n-1} b'') \\ &= \mathrm{Tr}(a' g_n g_{n-1} g_n a'' b' g_{n-1} b'') \\ &= \mathrm{Tr}(a' g_{n-1} g_n g_{n-1} a'' b' g_{n-1} b'') \\ &= z\mathrm{Tr}(a' g_{n-1}^2 a'' b' g_{n-1} b'') \\ &= z((q-1)\mathrm{Tr}(ab) + q\mathrm{Tr}(a'a''b'g_{n-1}b'')) \\ \mathrm{Tr}(xy) &= z((q-1)\mathrm{Tr}(ab) + qz\mathrm{Tr}(a'a''b'b'')) \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(yx) &= \mathrm{Tr}(a g_n b g_n) = \mathrm{Tr}(a' g_{n-1} a'' g_n b' g_{n-1} b'' g_n) \\ &= \mathrm{Tr}(a' g_{n-1} a'' b' g_n g_{n-1} g_n b'') \\ &= \mathrm{Tr}(a' g_{n-1} a'' b' g_{n-1} g_n g_{n-1} b'') \\ &= z\mathrm{Tr}(a' g_{n-1} a'' b' g_{n-1}^2 b'') \\ &= z((q-1)\mathrm{Tr}(ab) + q\mathrm{Tr}(a'g_{n-1}a''b'b'')) \\ \mathrm{Tr}(yx) &= z((q-1)\mathrm{Tr}(ab) + qz\mathrm{Tr}(a'a''b'b'')) \end{aligned}$$

D'où $\mathrm{Tr}(xy) = \mathrm{Tr}(yx)$.

□

IV Polynôme HOMFLY

1 Existence

Nous avons maintenant tous les outils nécessaires pour prouver l'existence d'un polynôme à deux variables $P : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{Z}[l, l^{-1}, m, m^{-1}]$ vérifiant la propriété d'invariance

$$lP(L_+) + l^{-1}P(L_-) + mP(L_0) = 0$$

On a déjà vu qu'il nous suffit de construire un tel polynôme sur le groupe des tresses B_n et invariant par mouvements de Markov.

Considérons $K = \mathbb{C}(q, z)$ le corps des fractions rationnelles à deux variables sur le corps des nombres complexes et posons $w = 1 - q + z \in K$. A chaque tresse $\alpha \in B_n$ on va associer un élément $V_\alpha(q, z)$ appartenant à l'extension quadratique $K(\sqrt{q/zw})$ de K . On reprend les notations des parties précédentes en notant σ_i les générateurs de B_n . Remarquons qu'on dispose de deux morphismes bien définis

$$e : B_n \longrightarrow \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \rho : B_n \longrightarrow H_n \\ \sigma_i \longmapsto 1 \quad \quad \quad \sigma_i \longmapsto g_i$$

Maintenant, considérons $\alpha \in B_n$, on lui associe l'élément $V_\alpha(q, z) \in K(\sqrt{q/zw})$ défini par la formule

$$V_\alpha(q, z) = \left(\frac{1}{z}\right)^{e(\alpha)} \left(\sqrt{\frac{q}{zw}}\right)^{n-e(\alpha)-1} \text{Tr}(\rho(\alpha)) \\ = \left(\frac{1}{z}\right)^{(n+e(\alpha)-1)/2} \left(\frac{q}{w}\right)^{(n-e(\alpha)-1)/2} \text{Tr}(\rho(\alpha))$$

Il s'agit donc de montrer que V_α ne dépend que de l'entrelac associé à α et est donc invariant sous l'action des deux types de mouvements de Markov.

- Soient donc $\alpha, \gamma \in B_n$ et $\beta = \gamma\alpha\gamma^{-1}$. Alors on vérifie facilement que α et β ont le même nombre de brins et que $e(\alpha) = e(\beta)$. Ainsi $V_\alpha(q, z) = V_\beta(q, z)$.
- Si $\alpha \in B_n$ et $\beta = \alpha\sigma_n \in B_{n+1}$, on a $e(\beta) = e(\alpha) + 1$, $n(\beta) = n(\alpha) + 1$, et alors,

$$V_\beta(q, z) = \left(\frac{1}{z}\right)^{(n+1+e(\alpha)+1-1)/2} \left(\frac{q}{w}\right)^{(n+1-e(\alpha)-1-1)/2} \text{Tr}(\rho(\alpha g_n)) \\ = \left(\frac{1}{z}\right)^{(n+e(\alpha)+1)/2} \left(\frac{q}{w}\right)^{(n-e(\alpha)-1)/2} z \text{Tr}(\rho(\alpha)) \\ V_\beta(q, z) = V_\alpha(q, z)$$

Si $\beta = \alpha\sigma_n^{-1} \in B_{n+1}$, le raisonnement est le même en remarquant que

$$g_n^{-1} = \frac{1}{q}(1 - q + g_n)$$

On peut ainsi définir, pour tout entrelac E , $V_E(q, z)$ comme la valeur commune de tous les $V_\alpha(q, z)$ pour $\hat{\alpha} = E$. Cependant $V_E(q, z)$ ne ressemble pas à un polynôme à coefficients entiers. Heureusement, on a la propriété suivante

Proposition IV.1. *Pour chaque entrelac E , il existe un unique polynôme de Laurent $P_E(l, m) \in \mathbb{Z}[l, l^{-1}, m, m^{-1}]$, tel que*

$$P_E(i(z/w)^{1/2}, i(q^{-1/2} - q^{1/2})) = V_\alpha(q, z)$$

dès que α est une tresse dont la fermeture vaut E .

Preuve :

La clef de la preuve est l'invariance par association de $V_\alpha(q, z)$ que nous allons montrer. Soient $\beta, \gamma \in B_n$ deux tresses et soient $\alpha_+, \alpha_-, \alpha_0$ les trois tresses définies par

$$\alpha_+ = \beta g_k \gamma \quad \alpha_- = \beta g_k^{-1} \gamma \quad \alpha_0 = \beta \gamma$$

pour un certain $k < n$. Pour toute tresse $\alpha \in B_n$, si $e = e(\alpha)$, définissons

$$W_\alpha(q, z) = \left(\frac{1}{z}\right)^{(n+e-1)/2} \left(\frac{q}{w}\right)^{(n-e-1)/2} \rho(\alpha) \in H_n$$

où maintenant, H_n désigne l'algèbre de Hecke sur $K(\sqrt{q/zw})$ avec $K = \mathbb{C}(q, z)$, correspondant au paramètre q . Alors

Lemme IV.1. *Si $l = i(z/w)^{1/2}$ et $m = i(q^{-1/2} - q^{1/2})$, alors on a la relation*

$$lW_{\alpha_+} + l^{-1}W_{\alpha_-} + mW_{\alpha_0} = 0$$

Et en prenant la trace on obtient l'invariance par association de V_α .

Preuve du lemme : On pose $e = e(\alpha_0)$, et on observe que

$$\begin{aligned} W_{\alpha_+} &= \left(\frac{1}{z}\right)^{1/2} \left(\frac{q}{w}\right)^{-1/2} \left(\frac{1}{z}\right)^{(n+e-1)/2} \left(\frac{q}{w}\right)^{(n-e-1)/2} \rho(\beta) g_k \rho(\gamma) \\ W_{\alpha_-} &= \left(\frac{1}{z}\right)^{-1/2} \left(\frac{q}{w}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{z}\right)^{(n+e-1)/2} \left(\frac{q}{w}\right)^{(n-e-1)/2} \rho(\beta) g_k^{-1} \rho(\gamma) \end{aligned}$$

Un calcul facile donne l'expression suivante :

$$lW_{\alpha_+} + l^{-1}W_{\alpha_-} + mW_{\alpha_0} = i\left(\frac{1}{z}\right)^{(n+e-1)/2} \left(\frac{q}{w}\right)^{(n-e-1)/2} \rho(\beta) C \rho(\gamma)$$

où on a posé

$$C = q^{-1/2} g_k - q^{1/2} g_k^{-1} + q^{-1/2} - q^{1/2}$$

Mais $g_k^{-1} = q^{-1}(1 - q + g_k)$, de sorte que $C = 0$. □

Il reste donc à montrer que le polynôme P_E ainsi défini est bien à coefficients entiers. Pour cela, il suffit de remarquer que $P_E(l, m) = 1$ pour le noeud trivial \bigcirc et que P_E est invariant par association. La preuve se fait par récurrence de la même façon que pour l'unicité prouvée au paragraphe II.1.2. □

2 Quelques propriétés de $P_E(l, m)$

Les raisonnements que nous avons suivis jusqu'à maintenant vont nous permettre d'établir très simplement quelques propriétés du polynôme de Lickorish et Millet. On se servira d'une part de l'unicité de ce polynôme, d'autre part de la façon dont on le calcule.

Propriété IV.1. *Notons E' l'entrelac dont l'orientation est opposée à celle de E , alors on a*

$$P_{E'}(l, m) = P_E(l, m)$$

Soient E_+, E_- et E_0 trois entrelacs associés. On voit que E'_+, E'_- et E'_0 sont associés. Ainsi,

$$lP_{E'_+} + l^{-1}P_{E'_-} + mP_{E'_0} = 0$$

Par unicité, on a $P_E = P_{E'}$ pour tout E . (bien sûr $\bigcirc' = \bigcirc$) □

Propriété IV.2. *Notons E^* le miroir de E , alors on a*

$$P_{E^*}(l, m) = P_E(l^{-1}, m)$$

De même, E_-^* , E_+^* et E_0^* sont associés donc

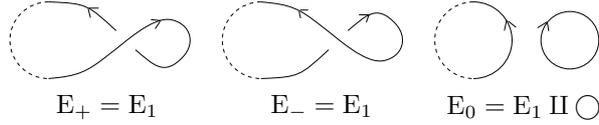
$$lP_{E_-^*} + l^{-1}P_{E_+^*} + mP_{E_0^*} = 0$$

Et on applique une fois de plus l'unicité de P_{E^*} . \square

Propriété IV.3. Si E_1 et E_2 sont des entrelacs, on note $E_1 \amalg E_2$ la somme disjointe de E_1 et E_2 . On a alors

$$P_{E_1 \amalg E_2} = -\frac{l+l^{-1}}{m} P_{E_1} P_{E_2}$$

Si $E_2 = \bigcirc$, les trois entrelacs suivants sont associés :



et ainsi

$$lP(E_1) + l^{-1}P(E_1) + mP(E_1 \amalg \bigcirc) = 0$$

d'où

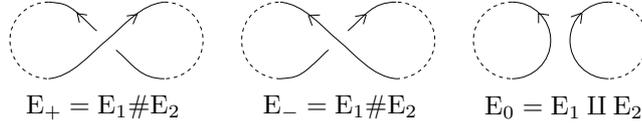
$$P(E_1 \amalg \bigcirc) = -\frac{l+l^{-1}}{m} P(E_1)$$

Si E_2 est plus compliqué, on procède par récurrence sur sa complexité. Plus précisément, si E_2^+ , E_2^- et E_2^0 sont associés, alors $E_1 \amalg E_2^+$, $E_1 \amalg E_2^-$ et $E_1 \amalg E_2^0$ le sont aussi. La propriété s'ensuit. \square

Propriété IV.4. Si E_1 et E_2 sont des entrelacs, on note $E_1 \# E_2$ la somme connexe de E_1 et E_2 . On a alors

$$P_{E_1 \# E_2} = P_{E_1} P_{E_2}$$

Les trois entrelacs suivants sont associés :



On a donc la formule

$$lP(E_1 \# E_2) + l^{-1}P(E_1 \# E_2) + mP(E_1 \amalg E_2)$$

La propriété précédente permet de conclure. \square

3 Spécialisation : polynôme d'Alexander et polynôme de Jones

On définit :

$$\Delta_E(t) = P_E(i, i(t^{1/2} - t^{-1/2}))$$

Ceci définit un polynome appelé *polynôme d'Alexander*.

Propriété IV.5. $\Delta_E(t)$ satisfait la propriété d'invariance par association

$$\begin{cases} \Delta_{\bigcirc}(t) = 1 \\ \Delta_{E_+} - \Delta_{E_-} + (t^{1/2} - t^{-1/2})\Delta_{E_0} = 0 \end{cases}$$

On définit aussi :

$$V_E(t) = P_E(it, i(t^{1/2} - t^{-1/2}))$$

Cette égalité n'est pas toujours une identité polynômiale. Néanmoins, pour des raisons détaillées plus loin, V_E est appelé le *polynôme de Jones*.

Propriété IV.6. $V_E(t)$ satisfait la propriété d'invariance par association

$$\begin{cases} V_{\circlearrowleft}(t) = 1 \\ tV_{E_+} - t^{-1}V_{E_-} + (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{E_0} = 0 \end{cases}$$

On se souvient du lemme II.2 qui stipule que l'exposant de m dans chaque monôme de $P_E(l, m)$ est congru à $r(E) - 1 \pmod{2}$. On voit alors que l'exposant de m pour un noeud (qui rappelons-le est un entrelac ne comportant qu'une seule composante connexe) est pair, et il s'ensuit que les polynômes de Jones et Alexander sont des polynômes de Laurent pour les noeuds.

On sait que la seule relation qu'il existe entre ces polynômes est que P_E détermine V_E et Δ_E . Il existe un noeud non trivial tel que $\Delta(t) = 1$ et $V(t) \neq 1$. Il existe deux noeuds ayant même $V(t)$ mais pas les mêmes $\Delta(t)$. V et Δ ne déterminent pas P : il existe un noeud qui a même V et Δ que son miroir, mais pas le même P .

V Algèbres de Temperley-Lieb-Jones

1 Généralités

Définition V.1. Pour tout entier naturel n et tout nombre complexe non nul β , l'algèbre de Temperley-Lieb-Jones $\mathcal{A}_{\beta,n}$ est l'algèbre unifère définie par les générateurs $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ et les relations

$$\begin{aligned}\varepsilon_i^2 &= \varepsilon_i \\ \beta \varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_i &= \varepsilon_i \quad \text{si } |i-j| = 1 \\ \varepsilon_i \varepsilon_j &= \varepsilon_j \varepsilon_i \quad \text{si } |i-j| \geq 2\end{aligned}$$

Théorème V.1. Pour tout $\beta \in \mathbb{C}^*$ et pour tout $n \geq 1$, l'algèbre $\mathcal{A}_{\beta,n}$ est de dimension $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$, et le morphisme naturelle $\mathcal{A}_{\beta,n} \rightarrow \mathcal{A}_{\beta,n+1}$ est injectif.

Un monôme de $\mathcal{A}_{\beta,n}$ est un élément de la forme $\varepsilon_{i_1} \varepsilon_{i_2} \cdots \varepsilon_{i_k}$ où chaque ε_{i_j} est un des $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$.

Proposition V.1. Tout monôme $\omega \in \mathcal{A}_{\beta,n}$ peut être écrit sous la forme réduite :

$$w = \beta^{-r} (\varepsilon_{i_1} \varepsilon_{i_1-1} \cdots \varepsilon_{j_1}) (\varepsilon_{i_2} \varepsilon_{i_2-1} \cdots \varepsilon_{j_2}) \cdots (\varepsilon_{i_p} \varepsilon_{i_p-1} \cdots \varepsilon_{j_p})$$

où $r \in \mathbb{N}$ et $0 \leq p \leq n-1$ et où

$$\begin{aligned}1 &\leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n-1 \\ 1 &\leq j_1 < j_2 < \cdots < j_p \leq n-1 \\ i_1 &\geq j_1 \quad i_2 \geq j_2 \quad \cdots \quad i_p \geq j_p\end{aligned}$$

De plus, on a
$$\dim \mathcal{A}_{\beta,n} \leq \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Remarque : En fait, on a exactement

$$\dim \mathcal{A}_{\beta,n} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

mais l'inégalité dans l'autre sens est beaucoup plus compliquée et fait appel soit à de l'homologie quand on considère les algèbres de Temperley-Lieb-Jones comme des quotients d'algèbres de Hecke (en anticipant sur la suite), soit à de la théorie des représentations avancée. On renvoie à [5] et [4].

Preuve : On considère un entier m tel que $0 \leq m \leq n$. On prouve la première partie de la proposition par récurrence sur m pour un monôme ω dans $\mathcal{A}_{\beta,m+1}$. C'est évident si $m = 0$, on suppose alors que $m \geq 1$ et que la propriété est vraie pour $\mathcal{A}_{\beta,m}$. On se ramène d'abord au cas où ε_m n'apparaît qu'une fois dans ω . Supposons que ω possède deux occurrences de ε_m , deux cas sont alors à envisager :

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_1 \varepsilon_m a \varepsilon_m \omega_2 \\ \text{ou } \omega &= \omega_1 \varepsilon_m a \varepsilon_{m-1} b \varepsilon_m \omega_2\end{aligned}$$

où a et b sont des monômes dans $\mathcal{A}_{\beta,m-1}$. Comme ε_m commute avec $\mathcal{A}_{\beta,m-1}$, on a

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_1 \varepsilon_m a \omega_2 \\ \text{ou } \omega &= \omega_1 a \beta^{-1} \varepsilon_m b \omega_2\end{aligned}$$

et le nombre de ε_m dans ω a diminué.

Soit donc $\omega = \omega_1 \varepsilon_m \omega_2$ avec ω_1 et ω_2 des monômes dans $\mathcal{A}_{\beta,m}$. En utilisant d'une part l'hypothèse de récurrence sur ω_2 , et d'autre part les relations $\varepsilon_m \varepsilon_j = \varepsilon_j \varepsilon_m$ pour $j \leq m-2$, on se ramène au cas où $\omega = \omega_1 \varepsilon_m \varepsilon_{m-1} \cdots \varepsilon_n$, où ω_1 un monôme réduit qui se termine par ε_l . Si $l \geq n$, on a

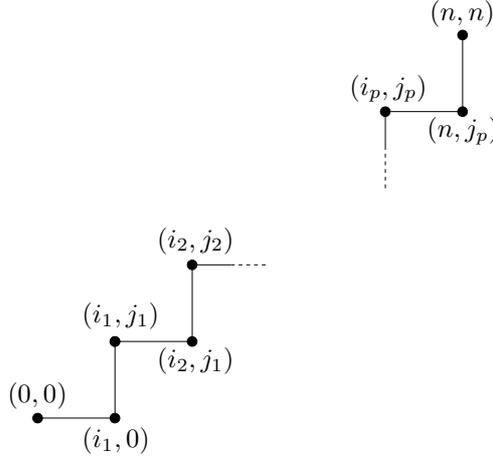
$$\begin{aligned} \varepsilon_l \varepsilon_m \varepsilon_{m-1} \cdots \varepsilon_k &= \varepsilon_m \cdots \varepsilon_{l+2} (\varepsilon_l \varepsilon_{l+1} \varepsilon_l) \varepsilon_{l-1} \cdots \varepsilon_k \\ &= \beta^{-1} \varepsilon_l \varepsilon_{l-1} \cdots \varepsilon_k \varepsilon_m \varepsilon_{m-1} \cdots \varepsilon_{l+2} \end{aligned}$$

Ainsi on peut supposer que $l < k$, de telle sorte que ω est de la forme

$$\omega = \beta \varepsilon_{i_1} \cdots \varepsilon_{j_1} \varepsilon_{i_2} \cdots \varepsilon_{j_2} \cdots \varepsilon_{i_p} \cdots \varepsilon_{j_p} \quad (i_p = m, j_p = k)$$

et on a bien les relations voulues sur les indices.

Il nous reste donc à faire le décompte des monômes réduits. Cela revient à compter le nombre de chemins dans \mathbb{Z}^2 joignant $(0, 0)$ à (n, n) et restant au dessous de la diagonale. En effet, les monômes réduits sont en bijections avec ces chemins par :



Mais ces chemins sont eux-mêmes en bijection avec les chemins joignant $(1, 0)$ à $(n + 1, n)$ et ne touchant pas la diagonale. Or, à chaque chemin rencontrant la diagonale on peut associer de façon bijective un chemin joignant $(0, 1)$ à $(n + 1, n)$ en considérant une symétrie partielle par rapport à la diagonale : si (j, j) est le premier point du chemin touchant la diagonale, alors on remplace le chemin de $(1, 0)$ à (j, j) par le chemin symétrique allant de $(0, 1)$ à (j, j) . On en déduit que le nombre de monômes réduits est

$$M = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

2 Lien avec les algèbres de Hecke

Les relations qui définissent les deux tours d'algèbres sont assez voisines. Cherchons un changement de variable sur les générateurs de l'algèbre de Temperley-Lieb-Jones qui met en évidence ce lien. Étant donné que l'on ne veut pas changer le degré des relations, on effectue un changement de variable linéaire : on pose

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \gamma_i = a\varepsilon_i + b$$

Calculons alors γ_i^2 , pour tout entier naturel i :

$$\begin{aligned} \gamma_i^2 &= a^2 \varepsilon_i^2 + 2ab \varepsilon_i + b^2 = (a^2 + 2ab) \varepsilon_i + b^2 \\ &= (a^2 + 2ab) \left(\frac{\gamma_i - b}{a} \right) + b^2 \\ \gamma_i^2 &= (a + 2b) \gamma_i - b(a + b) \end{aligned}$$

En posant $a = q + 1$ et $b = -1$, on obtient alors $\gamma_i^2 = (q - 1) \gamma_i + q$. Calculons maintenant $\gamma_i \gamma_{i+1} \gamma_i$ pour entier naturel i :

$$\begin{aligned}
\gamma_i \gamma_{i+1} \gamma_i &= ((q+1)\varepsilon_i - 1)[(q+1)^2 \varepsilon_{i+1} \varepsilon_i - (q+1)(\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1}) + 1] \\
&= (q+1)^3 \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \varepsilon_i - (q+1)^2 \varepsilon_i^2 - (q+1)^2 \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \\
&\quad - (q+1)^2 \varepsilon_{i+1} \varepsilon_i + 2(q+1)\varepsilon_i + (q+1)\varepsilon_{i+1} - 1 \\
&= \beta^{-1} (q+1)^3 \varepsilon_i - (q+1)^2 \varepsilon_i - (q+1)^2 \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \\
&\quad - (q+1)^2 \varepsilon_{i+1} \varepsilon_i + 2(q+1)\varepsilon_i + (q+1)\varepsilon_{i+1} - 1 \\
\gamma_i \gamma_{i+1} \gamma_i &= \gamma_{i+1} \gamma_i \gamma_{i+1} + [\beta^{-1} (q+1)^3 - (q+1)^2 + (q+1)] (\gamma_i - \gamma_{i+1})
\end{aligned}$$

On choisit donc $\beta = \frac{(q+1)^2}{q}$, et on a $\gamma_i \gamma_{i+1} \gamma_i = \gamma_{i+1} \gamma_i \gamma_{i+1}$. On remarque que l'on a alors

$$\begin{aligned}
\gamma_i \gamma_{i+1} \gamma_i &= -(q+1)^2 \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} - (q+1)^2 \varepsilon_{i+1} \varepsilon_i + (q+1)\varepsilon_i + (q+1)\varepsilon_{i+1} - 1 \\
&= -(\gamma_i + 1)(\gamma_{i+1} + 1) - (\gamma_{i+1} + 1)(\gamma_i + 1) + \gamma_i + 1 + \gamma_{i+1} + 1 - 1 \\
\gamma_i \gamma_{i+1} \gamma_i &= -\gamma_i \gamma_{i+1} - \gamma_{i+1} \gamma_i - \gamma_i - \gamma_{i+1} - 1
\end{aligned}$$

Ceci permet d'énoncer le théorème suivant :

Théorème V.2. *Soit $q \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ et $\beta = 2 + q + q^{-1}$. Pour tout entier naturel n , les éléments*

$$\forall i = 1 \dots n-1 \quad \gamma_i = (q+1)\varepsilon_i - 1$$

forment une base de $\mathcal{A}_{\beta, n}$ et les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\gamma_i^2 &= (q-1)\gamma_i + q \\
\gamma_i \gamma_{i+1} \gamma_i &= \gamma_{i+1} \gamma_i \gamma_{i+1} \\
\gamma_i \gamma_j &= \gamma_j \gamma_i \quad \text{si } |i-j| \geq 2 \\
\gamma_i \gamma_{i+1} \gamma_i + \gamma_i \gamma_{i+1} + \gamma_{i+1} \gamma_i + \gamma_i + \gamma_{i+1} + 1 &= 0
\end{aligned}$$

définissent une présentation de $\mathcal{A}_{\beta, n}$.

Preuve : on a déjà vérifié que ces relations étaient satisfaites donc il suffit de montrer que de ces relations on peut déduire celles qui définissent $\mathcal{A}_{\beta, n}$. Ceci se vérifie facilement en remarquant que

$$\forall i = 1 \dots n-1 \quad \varepsilon_i = \frac{\gamma_i + 1}{q+1}$$

et en effectuant les mêmes calculs que précédemment. \square

Le lien entre les deux algèbres est maintenant évident, et du théorème précédent on déduit le résultat suivant :

Corollaire V.1. *Soit $q \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ et $\beta = 2 + q + q^{-1}$. Pour tout entier naturel n , l'application*

$$\begin{array}{ccc}
\psi_n : \mathbb{H}_n[q] & \longrightarrow & \mathcal{A}_{\beta, n} \\
g_i & \longmapsto & \gamma_i
\end{array}$$

est un morphisme d'algèbres surjectif. Si $n = 1$ ou 2 , c'est un isomorphisme. Pour $n \geq 3$ on a

$$\text{Ker } \psi_n = (g_1 g_2 g_1 + g_1 g_2 + g_2 g_1 + g_1 + g_2 + 1)$$

De plus, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{H}_n & \longrightarrow & \mathbb{H}_{n+1} \\
\downarrow \psi_n & & \downarrow \psi_{n+1} \\
\mathcal{A}_n & \longrightarrow & \mathcal{A}_{n+1}
\end{array}$$

Preuve : Le théorème précédent nous prouve l'existence de ψ_n et permet de déterminer son noyau. Pour $n \geq 3$, celui-ci est engendré par les éléments suivants :

$$\forall i = 1 \dots n-1 \quad x_i = g_i g_{i+1} g_i + g_i g_{i+1} + g_{i+1} g_i + g_i + g_{i+1} + 1$$

Mais, en remarquant que si $k \in \llbracket 1; n-2 \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned} (g_1 \cdots g_{n-1}) g_k (g_{n-1}^{-1} \cdots g_1^{-1}) &= (g_1 \cdots g_{k+1}) g_k (g_{k+1}^{-1} \cdots g_1^{-1}) \\ &= (g_1 \cdots g_{k-1}) (g_k g_{k+1} g_k) (g_{k+1}^{-1} \cdots g_1^{-1}) \\ &= (g_1 \cdots g_{k-1}) (g_{k+1} g_k g_{k+1}) (g_{k+1}^{-1} \cdots g_1^{-1}) \\ (g_1 \cdots g_{n-1}) g_k (g_{n-1}^{-1} \cdots g_1^{-1}) &= g_{k+1} \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout entier $i \in \llbracket 1; n-2 \rrbracket$,

$$(g_1 \cdots g_{n-1}) x_i (g_{n-1}^{-1} \cdots g_1^{-1}) = x_{i+1}$$

si bien que le noyau de ψ_n est engendré par x_1 . \square

3 Polynôme de Jones

Commençons par signaler qu'il existe une manière très agréable de construire le polynôme de Jones, il s'agit de l'approche de Kauffman. Cette approche permet de prouver très simplement certaines propriétés du polynôme de Jones. Par exemple, si on prend un entrelac E et que l'on inverse l'orientation de l'une de ses composantes connexes (on note \tilde{E} l'entrelac obtenu), on a $V_{\tilde{E}}(t) = t^{3\lambda} V_E(t)$ avec $\lambda \in \mathbb{Z}$. Pour toutes précisions, on renvoie à [7].

Dans le chapitre III, on a vu que l'on pouvait définir une trace sur H_∞ , dépendant d'un paramètre z . Maintenant que l'on connaît une caractérisation des algèbres de Temperley-Lieb-Jones comme quotients d'algèbres de Hecke, on peut chercher les valeurs de z pour lesquelles la trace passe au quotient. Une condition nécessaire et suffisante est que :

$$\text{Tr}(x_1) = \text{Tr}(g_1 g_2 g_1 + g_1 g_2 + g_2 g_1 + g_1 + g_2 + 1) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Or} \quad \text{Tr}(x_1) &= \text{Tr}(g_1 g_2 g_1) + 2 \text{Tr}(g_1 g_2) + \text{Tr}(g_1) + \text{Tr}(g_2) + 1 \\ &= \text{Tr}(g_1^2 g_2) + 2z \text{Tr}(g_1) + 2z + 1 \\ &= z \text{Tr}(g_1^2) + 2z^2 + 2z + 1 \\ &= z^2 (q-1) + zq + 2z^2 + 2z + 1 \\ \text{Tr}(x_1) &= z^2 (q+1) + z(q+2) + 1 \end{aligned}$$

La variable q étant fixé, les solutions de l'équation $\text{Tr}(x_1) = 0$ sont :

$$\begin{cases} z_1 = -1 \\ z_2 = \frac{-1}{q+1} \end{cases}$$

On s'intéresse à la seconde solution. On a donc le théorème suivant :

Théorème V.3. *Soit $q \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ et $\beta = 2 + q + q^{-1}$. Il existe une trace $\text{Tr} : \mathcal{A}_{\beta, n} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :*

(1) *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{\beta, n} & \xrightarrow{\quad \quad} & \mathcal{A}_{\beta, n+1} \\ & \searrow \text{Tr} & \swarrow \text{Tr} \\ & & \mathbb{C} \end{array}$$

- (2) $\text{Tr}(1) = 1$
 (3) Tr est linéaire et $\text{Tr}(ab) = \text{Tr}(ba)$
 (4) $\forall a, b \in \mathbb{H}_n, \text{Tr}(ag_nb) = \frac{-1}{q+1} \text{Tr}(ab)$

Avec $z = -1/(q+1)$, on trouve que pour $\alpha \in \mathbb{B}_n$,

$$\begin{aligned} V_\alpha(q, z) &= V_\alpha(q, -1/(q+1)) \\ &= P_{\hat{\alpha}}(i(1/q), i(q^{-1/2} - q^{1/2})) \\ V_\alpha(q, z) &= V_{\hat{\alpha}}(1/q) \end{aligned}$$

où $V_{\hat{\alpha}}$ est le polynôme de Jones. Historiquement, c'est en construisant une trace sur les algèbres de Temperley-Lieb que Jones avait défini son polynôme.

4 Exemple : calcul du polynôme pour les anneaux borroméens

Calculons les différents polynômes dans un cas simple d'entrelacs : les anneaux borroméens. C'est le plus petit entrelac (au sens du nombre de composantes connexes) qui vérifie la propriété suivante : si on supprime une des composantes connexes, alors on obtient une somme disjointe de noeuds triviaux. Voici l'allure des anneaux :

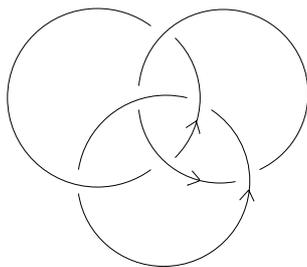


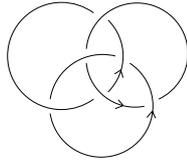
FIG. 4 – Anneaux borroméens

Une façon élémentaire d'obtenir ces anneaux est de considérer la tresse $w = \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2$, représentée par :

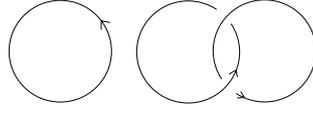


FIG. 5 – Tresse $w = \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2$

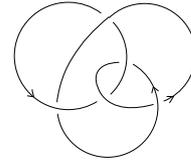
Regardons la relation d'association suivante :



$E_+ = B$



E_-



E_0

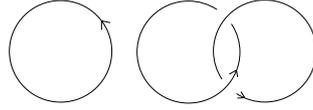
Ainsi

$$lP(B) + l^{-1}P(E_-) + mP(E_0) = 0$$

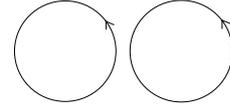
Maintenant, pour calculer $P(E_-)$ on regarde :



$E'_+ = \bigcirc^3$



$E'_- = E_-$

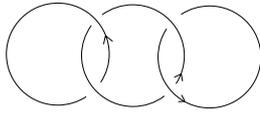


$E'_0 = \bigcirc^2$

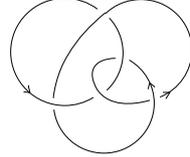
ce qui donne

$$lP(\bigcirc^3) + l^{-1}P(E_-) + mP(\bigcirc^2) = 0$$

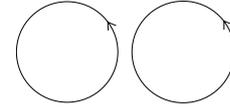
Quant à $P(E_-)$, il s'obtient grâce aux relations suivantes :



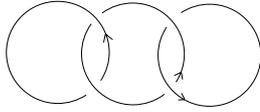
E''_+



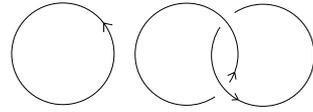
$E''_- = E_0$



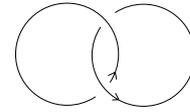
$E''_0 = \bigcirc^2$



$E'''_+ = E''_-$



E'''_-



E'''_0

qui donnent

$$\begin{cases} lP(E'_+) + l^{-1}P(E_0) + mP(\bigcirc^2) = 0 \\ lP(E'_-) + l^{-1}P(E'''_-) + mP(E'''_0) = 0 \end{cases}$$

Il suffit alors de mener à bien les calculs pour trouver

$$P_B(l, m) = -l - \frac{1}{l} + \frac{2l}{m^2} + \frac{1}{m^2l} - l^2 - 1 + \frac{1}{l^2} + \frac{2}{l^4} + \frac{1}{l^6} - \frac{2m^2}{l^2} - \frac{2m^2}{l^4} + \frac{m^4}{l^2}$$

Références

- [1] E. Artin. Theory of braids. *Annals of Math.*, 48, 1947.
- [2] J. Birman. Braids, links and mapping class groups. *Ann. Math. Stud.*, 82, 1974.
- [3] N. Bourbaki. *Groupes et Algèbres de Lie, IV, V, VI*. Masson, Paris, 1982.
- [4] V. F. R. Jones F. M. Goodman, P. De La Harpe. *Coxeter graphs and towers of algebras*. New York NY Berlin Paris Springer, 1989.
- [5] V. F. R. Jones. Hecke algebra representation of braid groups and link polynomials. *The Annals of Mathematics*, 126, sept 1987.
- [6] R. W. Goodman N. Wallack. *Representations and invariants of the classical groups*. Cambridge Cambridge University Press, 1998.
- [7] C. Weber P. De La Harpe, M. Kervaire. On the jones polynomial. *L'enseignement mathématique*, 32, 1986.