Analyse des EDP

Examen Janvier 2016

Problème 1 : Factorisation elliptique et régularité parabolique

Exercice 1 : Factorisation d'une équation elliptique

Fixons $n \geqslant 1$. Dans cet exercice on considère deux variables, $x \in \mathbb{R}^n$ et $z \in [0,1]$, qui jouent des rôles bien distincts. Par comparaison avec l'étude des équations d'évolution hyperboliques, disons que la variable z joue le rôle d'une variable de temps (c'est-à-dire le rôle d'un paramètre). Pour éviter les confusions, nous noterons, dans cet exercice uniquement, ∇_x le gradient par rapport à x et $\Delta_x u = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2 u$.

Considérons une fonction $\eta = \eta(x)$, C^∞ et bornée ainsi que toutes ses dérivées sur $\mathbb{R}^n$. On note

$$\alpha = \frac{1}{1+|\nabla_x \eta|^2}, \quad \beta = -\frac{2}{1+|\nabla_x \eta|^2}\nabla_x \eta, \quad \gamma = \frac{\Delta_x \eta}{1+|\nabla_x \eta|^2},$$

et on considère l'opérateur

$$P(\eta) = \partial_z^2 + \alpha \Delta_x + \beta \cdot \nabla_x \partial_z - \gamma \partial_z.$$

Le but de cet exercice est de factoriser $P(\eta)$. Par exemple, si $\eta = 0$, on a

$$P(0) = \partial_z^2 + \Delta_x = (\partial_z - |D_x|)(\partial_z + |D_x|),$$

où $|D_x|$ est le multiplicateur de Fourier de symbole $|\xi|$.

Question préliminaire. Pour $m \in \mathbb{R}$, on note $\dot{S}^m(\mathbb{R}^n)$ la classe des fonctions $a = a(x,\xi)$, qui sont C^∞ sur $\mathbb{R}^n_x \times (\mathbb{R}^n_\xi \setminus \{0\})$, telles que pour tout multi-indices α, β dans $\mathbb{N}^n$ on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{|\xi| \geqslant 1} \left\{ (1+|\xi|)^{-m+|\beta|} \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi) \right| \right\} < +\infty.$$

La seule différence par rapport à la classe $S^m(\mathbb{R}^n)$ étudiée en cours est que le sup en ξ est pris sur l'ensemble $\{|\xi| \geqslant 1\}$ au lieu de $\mathbb{R}^n$. Introduisons une fonction $\chi = \chi(\xi)$, C^∞ et telle que

$$\chi(\xi) = 1 \quad \text{si} \quad |\xi| \geqslant 2, \qquad \chi(\xi) = 0 \quad \text{si} \quad |\xi| \leq 1.$$

a) Soit $a \in \dot{S}^m(\mathbb{R}^n)$, montrer que $\chi a = \chi(\xi) a(x,\xi)$ appartient à la classe $S^m(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $(\chi^2 - \chi)a$ appartient à $S^{-k}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $k \geqslant 0$.

On note $\dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(a)$ l'opérateur défini par

$$\dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(a) = \mathrm{Op}(a\chi).$$

b) Montrer que si $a \in \dot{S}^m(\mathbb{R}^n)$ et $b \in \dot{S}^{m'}(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(a)\dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(b) = \dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(ab) + L_{-1},$$

où L_{-1} est d'ordre $m+m'-1$ (rappel : on dit qu'un opérateur est d'ordre $m\in\mathbb{R}$ s'il est borné de $H^\mu(\mathbb{R}^n)$ dans $H^{\mu-m}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\mu\in\mathbb{R}$). De même, montrer que

$$\dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(a)\dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(b)=\dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}\left(ab+\frac{1}{i}(\partial_\xi a)(\partial_x b)\right)+L_{-2}$$

où L_{-2} est d'ordre $m+m'-2$.

1. Considérons deux symboles $a=a(x,\xi)$, $A=A(x,\xi)$ vérifiant

$$\begin{aligned} a&=a^{(1)}+a^{(0)} \quad \text{où} \quad a^{(1)}\in\dot{S}^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad a^{(0)}\in\dot{S}^0(\mathbb{R}^n),\\ A&=A^{(1)}+A^{(0)} \quad \text{où} \quad A^{(1)}\in\dot{S}^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad A^{(0)}\in\dot{S}^0(\mathbb{R}^n),\end{aligned}$$

et tels que

$$\begin{aligned}&a^{(1)}A^{(1)}+\frac{1}{i}\partial_\xi a^{(1)}\cdot\partial_x A^{(1)}+a^{(1)}A^{(0)}+a^{(0)}A^{(1)}=-\alpha\left|\xi\right|^2,\\ &a+A=-i\beta\cdot\xi+\gamma.\end{aligned}\tag{1}$$

Posons

$$\begin{aligned}R_0&=\alpha\Delta_x-\dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(a)\dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(A),\\ R_1&=\dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(a)+\dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(A)+\beta\cdot\nabla_x-\gamma.\end{aligned}$$

Montrer que R_0 est d'ordre 0.

Montrer que R_1 est régularisant (d'ordre $-m$ pour tout $m\geqslant 0$).

2. Résoudre le système suivant par un calcul :

$$\begin{cases} a^{(1)}(x,\xi)A^{(1)}(x,\xi)=-\alpha(x)\left|\xi\right|^2,\\ a^{(1)}(x,\xi)+A^{(1)}(x,\xi)=-i\beta(x)\cdot\xi.\end{cases}$$

Vérifier que l'on définit ainsi deux symboles qui appartiennent à $\dot{S}^1(\mathbb{R}^n)$.

3. Montrer qu'il existe deux symboles $a^{(0)},A^{(0)}$ appartenant à $\dot{S}^0(\mathbb{R}^n)$ tels que

$$a^{(0)}A^{(1)}+a^{(1)}A^{(0)}+\frac{1}{i}\partial_\xi a^{(1)}\cdot\partial_x A^{(1)}=0,\qquad a^{(0)}+A^{(0)}=\gamma.$$

4. En combinant les résultats des questions précédentes, on obtient la proposition suivante : Il existe deux symboles $a=a(x,\xi)$, $A=A(x,\xi)$ appartenant à $\dot{S}^1(\mathbb{R}^n)$, tels que

$$\partial_z^2+\alpha\Delta+\beta\cdot\nabla\partial_z-\gamma\partial_z=(\partial_z-\dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(a))(\partial_z-\dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(A))+R_0+R_1\partial_z,\tag{2}$$

où R_0 est un opérateur d'ordre 0 et R_1 est régularisant.

Etant donné $k\in\mathbb{N}$, expliquer comment obtenir une factorisation similaire avec un reste R_0 d'ordre $-k$.

Exercice 2 : Régularité parabolique

5. Le but de ce problème est d'étudier une équation d'évolution **parabolique**, dont l'exemple le plus simple est l'EDP

$$\partial_t w + |D_x|\, w = 0,$$

avec $t \in [0,+\infty[$, $x \in \mathbf{R}^n$. Calculer la solution à l'aide de la transformée de Fourier puis montrer que

$$\forall t \in [0,+\infty[, \quad \|w(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \big\| \, |D_x|^{\frac{1}{2}}\, w(s)\big\|_{L^2}^2 \, ds \le K \, \|w(0)\|_{L^2}^2 \, . \tag{3}$$

Le but des questions suivantes est de montrer un effet régularisant pour une équation parabolique pseudo-différentielle. On souhaite démontrer la proposition suivante.

Proposition. *Fixons $T > 0$ et considérons un symbole $a \in S^1(\mathbb{R}^n)$ à valeurs réelles vérifiant*

$$\exists c > 0 / \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad a(x,\xi) \ge c\langle \xi \rangle = c(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Supposons que $w \in C^1([0,T]; L^2(\mathbb{R}^n))$ est solution du problème de Cauchy

$$\partial_t w + \mathrm{Op}(a) w = f, \quad w(0) = 0,$$

où $f \in C^0([0,T]; L^2(\mathbb{R}^n))$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $w(T) = w|_{t=T}$ vérifie

$$w(T) \in H^{1-\varepsilon}(\mathbb{R}^n).$$

6. Pour $t \in [0,T]$, introduisons le symbole

$$e_t(x,\xi) := \exp\left((t-T) a(x,\xi) \right),$$

de sorte que $e_T = 1$ et $\partial_t(e_t) = e_t a$. Considérons $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $\beta \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| + |\beta| \le 1$ (pour simplifier). Montrer que, pour tout $m \geqslant 0$, il existe des constantes $C_{m\alpha\beta}$ telles que

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta e_t(x,\xi) \right| \le \frac{C_{m\alpha\beta}}{(T-t)^m} (1+|\xi|)^{-m-|\beta|},$$

pour tout $t \in [0,T]$, tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n$.

7. On admet que le résultat précédent est vrai pour tout multi-indices α, β. En déduire que, pour tout $\varepsilon \in [0,1]$, il existe une constante K_ε telle que, pour tout $t \in [0,T]$ et tout $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ on a les inégalités

$$\|\mathrm{Op}(e_t) u\|_{H^{1-\varepsilon}} \le \frac{K_\varepsilon}{(T-t)^{1-\varepsilon}} \|u\|_{L^2} \, ,$$

$$\big\| \big(\mathrm{Op}(\partial_t e_t) - \mathrm{Op}(e_t) \, \mathrm{Op}(a) \big) u \big\|_{H^{1-\varepsilon}} \le \frac{K_\varepsilon}{(T-t)^{1-\varepsilon}} \|u\|_{L^2} \, .$$

8. Vérifier que

$$w(T) = \int_0^T \big(\mathrm{Op}(\partial_t e_t) - \mathrm{Op}(e_t) \, \mathrm{Op}(a) \big) w(t) \, dt + \int_0^T \mathrm{Op}(e_t) f(t) \, dt.$$

En déduire que $w(T) \in H^{1-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$, ce qui conclura la démonstration.

Problème 2 : étude d'une équation non linéaire

Considérons une équation elliptique **non linéaire** de la forme

$$\Delta u + \Gamma\big(\,|\nabla u|^2\,\big) = 0 \qquad \text{dans} \quad B,$$

où $B \subset \mathbb{R}^n$ est la boule de centre 0 et de rayon 1 et $\Gamma\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ vérifiant

$$\exists A > 0/\ \forall s \geqslant 0, \quad 0 \le \Gamma(s) \le As.$$

On suppose que $u \in H^1(B)$ est <u>bornée et continue</u> et qu'elle vérifie l'équation au sens faible :

$$(4) \qquad \int_B \Big(\nabla u \cdot \nabla \varphi - \Gamma(|\nabla u|^2)\varphi\Big)\, dx = 0 \qquad \text{pour tout} \quad \forall \varphi \in H_0^1(B) \cap L^\infty(B).$$

Exercice 3 : Inégalité de Caccioppoli (soigner la rédaction)

1. Soit $R \in]0,1[$ et $B_R := B(0,R) \subset B$. Notons u_R la moyenne de u sur la boule B_R et considérons une fonction $\eta \in C_0^\infty(B_R)$. En utilisant (4) avec $\varphi = (u-u_R)\eta^2$, montrer que

$$\frac{3}{4}\int_{B_R} |\nabla u|^2\, \eta^2\, dx \le 4\int_{B_R} (u-u_R)^2\, |\nabla \eta|^2\ dx + A \sup_{B_R} |u-u_R| \int_{B_R} |\nabla u|^2\, \eta^2\, dx.$$

(On pourra montrer cette inégalité avec d'autres constantes que 3/4 et 4.)

2. En déduire qu'il existe une constante $R_0 \in]0,1[$ dépendant du module de continuité de u telle que, si $0 < r < R \le R_0$, alors

$$\int_{B_r} |\nabla u|^2\ dx \le \frac{32}{(R-r)^2}\int_{B_R\setminus B_r} |u-u_R|^2\ dx.$$

Indication : on choisira bien la fonction η, comme dans le cours.

Exercice 4 : Inégalité d'Harnack

On suppose de plus que $u \in H^2(B)$ et que $u \geqslant 0$. On note $M = \sup_B u$ qui existe par hypothèse.

3. Introduisons la fonction v définie par $v(x) = \frac{1}{A}(e^{Au(x)} - 1)$. Justifier que $v \in H^1(B)$ puis calculer ∇v et Δv. En déduire que v est une sous-solution faible positive de $-\Delta v \le 0$.

4. Considérons une sous-solution faible positive $w \in H^1(B)$ de $-\Delta w \le 0$. Citer un résultat important du cours qui implique que $\|w\|_{L^\infty(B_{1/2})} \le C\,\|w\|_{L^2(B)}$.

En utilisant un argument de dilatation (un changement de variable homothétique en x), en déduire qu'il existe une constante C_1 telle que, pour tout $r \in]0,1]$, on a

$$\sup_{B_{r/2}} v \le C_1\left(\frac{1}{r^n}\int_{B_r} |v(x)|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

5. En déduire qu'il existe une constante C_2, ne dépendant que C_1, A et M, telle que

$$\sup_{B_{r/2}} u \leq C_2 \left(\frac{1}{r^n} \int_{B_r} |u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

6. Admettons l'inégalité d'Harnack suivante pour les fonctions sous-harmoniques : si $v \in H^1(B)$ vérifie $v \geqslant 0$ et

$$\forall \varphi \in H_0^1(B) \cap L^\infty(B),\ \varphi \geqslant 0, \quad \int_B \nabla v \cdot \nabla \varphi \, dx \geqslant 0,$$

alors il existe $c > 0$ telle que

$$\forall r \in]0,1[, \quad \inf_{B_{r/2}} v \geqslant c \left(\frac{1}{r^n} \int_{B_r} |v(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En étudiant la fonction $w = 1 - e^{-u}$, montrer qu'il existe une constante C_3, dépendant de M, telle que

$$\left(\frac{1}{r^n} \int_{B_r} |u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_3 \inf_{B_{r/2}} u.$$

On a donc montré une inégalité d'Harnack : il existe une constante $K = K(M) > 0$ telle que,

$$\forall r \in]0,1[, \quad \sup_{B_{r/2}} u \leq K \inf_{B_{r/2}} u.$$

Problème court : relation entre L^∞ et C^0_*

1. Montrer qu'il existe une constante C telle que, pour tout $\varepsilon \in]0,1[$ et toute fonction f appartenant à l'espace de Hölder $C^{0,\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$, on ait

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\varepsilon} \|f\|_{C^0_*} \log \left(e + \frac{\|f\|_{C^{0,\varepsilon}}}{\|f\|_{C^0_*}} \right).$$

Indication : utiliser la décomposition de Littlewood-Paley et, pour $N \in \mathbb{N}$ à choisir, écrire que

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \sum_{q \leq N-1} \|\Delta_q f\|_{L^\infty} + \sum_{q \geqslant N} \|\Delta_q f\|_{L^\infty}.$$

2. Considérons la distribution

$$u = \sum_{q=0}^{\infty} e^{i 2^q x}.$$

Montrer que $u \in C^0_* \setminus L^\infty$.