Partiel Algèbre 2

Il n'est pas nécessaire de tout faire pour avoir la note maximale.

Exercice 1. Pour un groupe abélien X et $b \in \mathbf{Z}$ on note $X[b] = \{x \in X \mid bx = 0\}$.
a) Soient $a, b \geq 1$ des entiers. Déterminer l'ordre du groupe $(\mathbf{Z}/a\mathbf{Z})[b]$.
b) Déterminer le nombre des solutions de la congruence $x^4 \equiv 1 \pmod{n}$, pour tout $n \geq 1$. [*On pourra considérer d'abord le cas d'une puissance d'un nombre premier* $n = p^r$.]
c) L'application $\{\text{solutions de } x^4 \equiv 1 \pmod{p^{r+1}}\} \longrightarrow \{\text{solutions de } x^4 \equiv 1 \pmod{p^r}\}$ est-elle surjective ? Est-elle injective ? [p est un nombre premier, $r \geq 1$.]

Exercice 2. Soit A un groupe abélien, soit $B \subset A$ un sous-groupe d'indice $(A : B) = m_1 m_2$, où $\mathrm{pgcd}(m_1, m_2) = 1$.
a) Montrer : le quotient A/B est isomorphe à $C_1 \oplus C_2$, où $|C_i| = m_i$.
b) Montrer que $X_i = \mathrm{Ker}(A \longrightarrow A/B = C_1 \oplus C_2 \xrightarrow{\mathrm{pr}_i} C_i)$ est un sous-groupe de A d'indice $(A : X_i) = m_i$ et que $X_1 \cap X_2 = B$.
c) Que se passe-t-il si l'on remplace des groupes abéliens par des modules sur un anneau pas trop méchant ?

Exercice 3. a) L'anneau $\mathbf{Z}[\frac{1+i\sqrt{7}}{2}]$ (resp. $\mathbf{Z}[i\sqrt{7}]$) est-il factoriel ? Pourquoi ?
b) Déterminer $\mathbf{Z}[\frac{1+i\sqrt{7}}{2}]^*$ et $\mathbf{Z}[i\sqrt{7}]^*$.
c) Trouver toutes les solutions $x, y \in \mathbf{Z}$ de léquation $y^2 + y + 2 = x^5$.

Exercice 4. a) Déterminer $[\mathbf{Q}(T) : \mathbf{Q}(T^{2015})]$, où T est une variable.
b) Pour tout $n \in \{1, 2, 3, \ldots\} \cup \{\infty\}$ donner un exemple d'un corps K_n et d'un morphisme de corps $f_n : K_n \longrightarrow K_n$ tels que $[K_n : f_n(K_n)] = n$.
c) Idem avec $K_n = K$ indépendent de n.

Si vous citez un résultat du cours ou des TD, vous devrez donner un énoncé précis.