Examen: Fonctions holomorphes et dynamique complexe à plusieurs variables (Lundi le 20 janvier 2014 de 9h à 12h, ENS de Paris)

Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice 1. Soit $\mathbb{B}$ la boule unité dans $\mathbb{C}^2$.

1. Soit K un compact non-vide de $\mathbb{B}$. Montrer que $\mathbb{B} \setminus K$ n'est pas pseudoconvexe.
2. Soit L une droite complexe dans $\mathbb{C}^2$. Est-ce que $\mathbb{B} \setminus L$ est pseudoconvexe ?
3. Soit $\mathbb{B}'$ est une autre boule de rayon 1 telle que $\mathbb{B} \cap \mathbb{B}' \neq \varnothing$. Montrer que $\overline{\mathbb{B}} \cup \overline{\mathbb{B}}'$ n'est pas holomorphiquement convexe dans $\mathbb{C}^2$.

Exercice 2. Soient a_n une suite de points distincts dans $\mathbb{C}$ qui tend vers l'infini. Soient $\mathbb{D}_n$ des disques de centres a_n et f_n des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}_n^* = \mathbb{D}_n \setminus \{a_n\}$.

1. Montrer qu'il existe une fonction g lisse sur $\mathbb{C}$ privé des points a_n telle que $g - f_n$ s'étend en une fonction holomorphe au voisinage de a_n pour tout n.
2. Montrer qu'il existe une fonction f holomorphe sur $\mathbb{C}$ privé des points a_n telle que $f - f_n$ s'étend en une fonction holomorphe au voisinage de a_n pour tout n.

Exercice 3. On appelle polynôme de Tchebychev de degré d le polynôme T_d vérifiant $\cos(dt) = T_d(\cos t)$. Posons $\sigma(z) = \frac{1}{2}(z + 1/z)$.

1. Montrer que σ semi-conjugue T_d avec le polynôme $f_d(z) = z^d$, i.e. $T_d \circ \sigma = \sigma \circ f_d$.
2. Déterminer l'ensemble de Julia, l'ensemble de Fatou, les points périodiques, la fonction de Green et la mesure d'entropie maximale de T_d.
3. Soit μ une mesure de probabilité à support compact dans $\mathbb{C}$ et à potentiel continu. Montrer que les fonctions sousharmoniques sur $\mathbb{C}$ sont dans $L^1(\mu)$. On peut utiliser une intégration par parties ou la formule de Stokes.
4. Montrer que les intervalles de $\mathbb{R}$ ne sont pas polaires dans $\mathbb{C}$, i.e. ils ne sont pas contenus dans l'ensemble $\{u = -\infty\}$ avec u une fonction sousharmonique sur $\mathbb{C}$.
5. Déterminer les polynômes dont l'ensemble de Julia est le cercle unité.
6. Déterminer les polynômes dont l'ensemble de Julia est l'intervalle $[-2, 2]$ de $\mathbb{R}$.

Exercice 4. (ensemble de Mandelbrot)[1] L'ensemble de Mandelbrot $\mathscr{M}$ est l'ensemble des valeurs $c \in \mathbb{C}$ telles que l'orbite du point critique 0 de $f_c(z) = z^2 + c$ ne tend pas vers l'infini. Notons G_c la fonction de Green de f_c.

[1] On peut trouver ses images avec Google.

1. Montrer que $\mathscr{M}$ est un compact.

2. Montrer que la fonction G définie par $G(c) := G_c(c)$ est nulle sur $\mathscr{M}$ et strictement positive en dehors de $\mathscr{M}$.

3. Montrer que G est continue, sous-harmonique sur $\mathbb{C}$, harmonique en dehors de $\mathscr{M}$ et $G(c) - \log^+ |c|$ est bornée, où $\log^+ = \max(\log, 0)$.

4. Montrer que $\mathscr{M}$ ne contient pas de points isolés.

5. Montrer que G_c et G sont Höldériennes.

Exercice 5. (Théorème de régularisation de Demailly)[2] Soit φ une fonction psh définie sur un domaine borné pseudoconvexe $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Notons dV l'élément de volume de Lebesgue dans $\mathbb{C}^n$. Pour tout nombre réel $m > 0$, on note $H^2(\Omega, e^{-m\varphi})$ l'espace de Hilbert des fonctions f holomorphes sur Ω telles que $\int_\Omega |f|^2 e^{-m\varphi} dV < +\infty$. On définit $\psi_m = \frac{1}{m} \log \sum_{k=1}^{+\infty} |g_{m,k}|^2$ où $(g_{m,k})_{k\geq 1}$ est une base hilbertienne de cet espace. L'objectif de l'exercice est de montrer qu'il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ indépendantes de m et φ telles que les inégalités suivantes soient vérifiées:

$$\varphi(z) - \frac{C_1}{m} \leq \psi_m(z) \leq \sup_{[\zeta - z| < r} \varphi(\zeta) + \frac{1}{m} \log \frac{C_2}{r^{2n}}$$

pour tout $z \in \Omega$ et $r < \mathrm{dist}\,(z, \partial\Omega)$.

1. Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} |g_{m,k}(z)|^2$ est le carrée de la norme de la fonctionnelle $f \mapsto f(z)$. En particulier cette fonction est indépendante du choix de la base $(g_{m,k})_{k\geq 1}$.

2. En appliquant l'inégalité de la moyenne à la fonction $|f|^2$, déduire l'inégalité de droite recherchée.

3. En appliquant le théorème d'Ohsawa-Takegoshi ci-dessous à la sous-variété $\{z\} \subset \Omega$ pour une constante bien choisie, démontrer l'inégalité de gauche.

4. En déduire que ψ_m converge ponctuellement et aussi pour la topologie L^1_{loc} sur Ω quand $m \to +\infty$.

Théorème d'Ohsawa-Takegoshi. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné pseudoconvexe, et L un sous-espace affine de $\mathbb{C}^n$ de codimension ≥ 1 donné par un système orthonormal s d'équations affines linéaires $s_1 = \cdots = s_p = 0$. Alors il existe une constante $C = C(n, \Omega)$ ne dépendant que de n et du diamètre de Ω satisfaisant la propriété suivante. Pour tout fonction φ psh sur Ω et toute fonction holomorphe g sur $\Omega \cap L$ vérifiant $\int_{\Omega\cap L} |g|^2 e^{-\varphi} dV_L < +\infty$, alors il existe une extension holomorphe $\widetilde{g}$ de g à Ω telle que:

$$\int_\Omega |\widetilde{g}|^2 e^{-\varphi} dV \leq C \int_{\Omega\cap L} |g|^2 e^{-\varphi} dV_L$$

où dV_L est l'élément de volume de Lebesgue dans L.

[2]Une version de ce résultat est valable en toute dimension sur des variétés plus générales mais avec une perte contrôlable de plurisousharmonicité. En utilisant la convolution pour régulariser φ, on doit réduire le domaine de définition Ω.