Ecole Normale Supérieure

2016

Temps de mélange

Examen

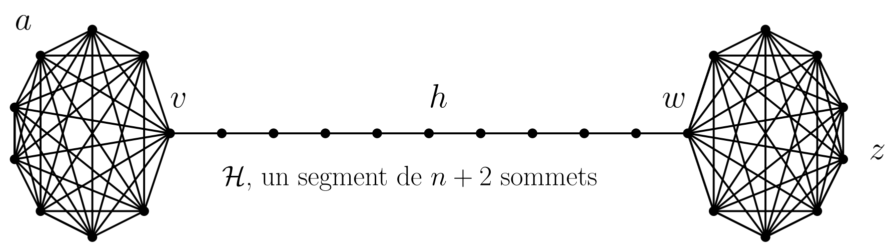
Documents manuscrits autorisés. Le temps ne permet pas d'aborder les trois exercices, le barême en tient compte.

Exercice 1 Un peu de musculation : le graphe de l'haltère

Soit n un entier *impair*, supérieur ou égal à 3.

On considère le graphe $\mathcal{G}$ à $3n$ sommets obtenu en reliant deux copies du graphe complet à n sommets par un segment de longueur $n+2$.

Plus précisément, on notera $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ les deux copies du graphe complet à n sommets, et $\mathcal{H}$ le graphe à $n+2$ sommets correspondant au segment de longueur $n+1$. Le noeud de $\mathcal{G}_1$ identifié à l'une des extremités de $\mathcal{H}$ est noté v, celui de $\mathcal{G}_2$ identifié à l'autre extremité de $\mathcal{H}$ est noté w. Enfin on note a un noeud de $\mathcal{G}_1$ distinct de v et z un noeud de $\mathcal{G}_2$ distinct de w, et enfin h le noeud central du segment $\mathcal{H}$ reliant $\mathcal{G}_1$ à $\mathcal{G}_2$.



$\mathcal{G}_1$, graphe complet, n sommets. $\mathcal{G}_2$, graphe complet, n sommets

Une représentation de $\mathcal{G}$, avec ici $n = 9$.

On considère $(X_n, n \geq 0)$ la marche simple sur le graphe $\mathcal{G}$, on va s'intéresser d'abord aux propriétés générales de cette chaîne, puis au temps d'atteinte maximal t_{hit} de X, et enfin au temps de mélange t_{mix} de la version paresseuse de la marche.

1. La chaîne X est-elle irréductible ? apériodique ? réversible ? Déterminer l'ensemble de ses distributions invariantes.
2. Calculer $\mathbb{P}_a(\tau_z < \tau_a^+)$, puis [1] établir que
$$\mathbb{E}_a[\tau_z] = \frac{2(n^2+n+4)(n^2+1)}{n}.$$
En déduire un équivalent de t_{hit}. En déduire et une borne sur t_{mix} pour la version paresseuse de la marche.
3. Dans la suite de l'exercice on considère la version paresseuse de la marche. On pose $A = \{x \in \mathcal{G} : d(x, \mathcal{G}_1) < d(x, \mathcal{G}_2)\}$, $B = \mathcal{G}_1 \setminus \{v\}$ et v' le voisin de v dans $\mathcal{H}$. Montrer que $\mathbb{P}_{v'}(\tau_h < \tau_B) = \frac{4n}{2n^2+n+1}$. En déduire que sous $\mathbb{P}_a$, $\tau_h \leq G$, où $G \sim \text{Geom}\left(\frac{1}{(n-1)(2n^2+n+1)}\right)$. Quelle est la limite en loi de $G/(2n^3)$ lorsque $n \to \infty$?
4. Déterminer finalement que pour des constantes $c_1, c_2 > 0$, et pour n suffisamment grand on a pour la version paresseuse de la marche $c_1 n^3 \leq t_{\text{mix}} \leq c_2 n^3$

1. on pourra par exemple utiliser le modèle de conductances et commencer par remarquer que les points de $\mathcal{G}_1$ autres que a et z ont, par symétrie, même potentiel.

Exercice 2 Sphères dures
Soit un graphe fini $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ — on utilise comme d'habitude la notation $a \sim b$ pour dire que les noeuds a, b sont voisins dans $\mathcal{G}$. On note Δ le degré maximal du graphe.
On note par ailleurs $\Omega_0 = \{0,1\}^{\mathcal{V}}$ et

$$\Omega = \{x \in \Omega_0 : \forall \{v,w\} \in \mathcal{E} : x(v)x(w) = 0\}.$$

On dit que $x \in \Omega$ est une configuration de sphères dures (et la contrainte est que deux sphères dures ne peuvent occuper des sites voisins).
On considère la chaîne $(X_t, t \geq 0)$ sur $\{0,1\}^{\mathcal{V}}$ définie par la dynamique suivante. Au temps $t+1$, on tire, indépendamment et indépendamment des étapes précédentes,
$v_{t+1} \sim \mathrm{Unif}(\mathcal{V}), B_{t+1} \sim \mathrm{Ber}\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)$. Si $\sum_{w \sim v_{t+1}} X_t(w) \geq 1$ on ne fait rien, i.e. $X_{t+1} = X_t$. Sinon on pose $X_{t+1}(v_{t+1}) = B_{t+1}$ et on laisse $X_{t+1}(w) = X_t(w)$ pour tout $w \neq v$.
Quitte à faire les mêmes choix de $((v_t, B_t), t \geq 0)$ on peut définir conjointement $(X_t^x, t \geq 0, x \in \Omega)$, où, pour $x \in \Omega$, $(X_t^x)_{t \geq 0}$ désigne le chaîne dont on vient de décrire la dynamique, issue de x.

1. Pour $x, y \in \{0,1\}^{\mathcal{V}}$ on note
$$\rho(x,y) = \sum_{v \in \mathcal{V}} \mathbb{1}_{\{x(v) \neq y(v)\}}.$$
Montrer que si $\rho(x,y) = 1$ et si $\#(\mathcal{V}) = n$, on a
$$\mathbb{E}[\rho(X_1^x, X_1^y)] \leq 1 - \frac{1}{n} + \frac{\Delta}{n} \frac{\lambda}{1+\lambda}.$$
2. Montrer que si $x, y \in \Omega$ tels que $\rho(x,y) = r$ on peut trouver $x_0 = x, x_1, ..., x_r = y$ dans Ω tels que
$$\rho(x_k, x_{k+1}) = 1 \quad \forall\, k \in \{0, ..., r-1\}.$$
3. En déduire que pour tous $x, y \in \Omega$,
$$\mathbb{E}[\rho(X_1^x, X_1^y)] \leq \rho(x,y) \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{\Delta}{n} \frac{\lambda}{1+\lambda}\right).$$
4. En déduire finalement que lorsque $\lambda < \frac{1}{\Delta - 1}$, on peut trouver une constante $C(\lambda, \Delta)$ telle que
$$t_{\mathrm{mix}} \leq C(\lambda, \Delta) n \log(n).$$

Exercice 3 On considère $\mathcal{G} = \left(\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}\right)^d$, et X la marche simple paresseuse sur $\mathcal{G}$. On note P_d son noyau.

1. Dans cette question uniquement $d = 1$. Montrer que les valeurs propres de P_1 sont $0, 1/2$ (avec multiplicité 2) et 1.
2. En utilisant que pour tous k_1, k_2, k_3 on a $1 - \frac{k_1}{d} - \frac{k_2+k_3}{2d} \leq \exp\left(-\frac{k_1}{d}\right) \exp\left(-\frac{k_2}{2d}\right) \exp\left(-\frac{k_3}{2d}\right)$, vérifier que
$$d(t)^2 \leq \frac{1}{4}\left(1 + 2\exp\left(-\frac{t}{d}\right) + \exp\left(-\frac{2t}{d}\right)\right)^d - \frac{1}{4}.$$
En déduire que pour des constantes $\kappa, C(\varepsilon)$ qu'on déterminera,
$$t_{\mathrm{mix}}(\varepsilon) \leq \kappa d \log(d) + C(\varepsilon) d.$$