Examen du cours d'intégration-probabilités

Le 20 Janvier 2014

Durée: 3 heures. Aucun document n'est autorisé.

Question de cours: citer le théorème de J-P. Portemanteau.
Preuve de cours: énoncer et prouver le lemme de Borel (aussi connu sous le nom de lemme de Borel–Cantelli deuxième forme).

Exercice I. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, un espace de probabilité. Soient $X_n : \Omega \to \mathbb{N}$, $n \geq 1$, une suite de v.a. $\mathscr{F}$-mesurables supposées indépendantes. On suppose que $q_n := \mathbf{P}(X_n = n) = 1 - \mathbf{P}(X_n = 0)$, pour tout $n \geq 1$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $(q_n)_{n \geq 1}$ pour que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers une v.a. réelle que l'on précisera. Même question pour une convergence en norme L^1. Même question pour une convergence presque sûre.

Exercice II. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, un espace de probabilité. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}_+$, une v.a. $\mathscr{F}$-mesurable. On note μ sa loi. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, une fonction croissante C^1 telle que $f(0) = 0$.
1) Calculer $\int_0^\infty f'(x)\mu(]x, \infty[)dx$.
2) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. réelles positives v.a. $\mathscr{F}$-mesurables qui converge en loi vers X. Montrer que $\mathbf{E}[f(X)] \leq \liminf_n \mathbf{E}[f(X_n)]$.

Exercice III. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, un espace de probabilité. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. réelles $\mathscr{F}$-mesurables convergeant en loi vers une v.a. uniforme sur $[0, 1]$. Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. réelles $\mathscr{F}$-mesurables convergeant en probabilité vers 0. Montrer que $\lim_n \mathbf{P}(X_n < Y_n) = 0$.

Exercice IV. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, un espace de probabilité. Soit X, une v.a. réelle $\mathscr{F}$-mesurable telle que $\mathbf{E}[X] = 0$ et de variance 1. Soit Y, v.a. réelle $\mathscr{F}$-mesurable indépendante de X et de même loi. On suppose que $\frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y)$ a même loi que X. Trouver explicitement la loi de X (*Indication: se donner $X_1, \ldots, X_{2^n}$, v.a. indépendantes et de même loi que X, et penser au théorème central-limite*).

Exercice V. Les v.a. de l'exercice sont définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$.
1) Soit $(E, \mathscr{E})$, un espace mesurable tel que la diagonale $\Delta = \{(x, x); x \in E\}$ appartienne à $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$. Soient X et $Y : \Omega \to E$, deux v.a. $(\mathscr{F}, \mathscr{E})$-mesurables de lois respectives μ et ν.
1–a) Montrer que $\{X = Y\} \in \mathscr{F}$.
1–b) On suppose X et Y indépendantes et μ diffuse. Montrer que $\mathbf{P}(X = Y) = 0$.
2) Soit $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; on note $x_1^{(n)} \leq \ldots \leq x_n^{(n)}$ le réarrangement croissant des réels $x_1, \ldots, x_n$ et on pose $\Lambda_{n,k}(\mathbf{x}) = x_k^{(n)}$. On fixe $y \in \mathbb{R}$ et on pose $f(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq k \leq n} \mathbf{1}_{]-\infty, y]}(x_k)$. Montrer que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est mesurable. Exprimer $\{\Lambda_{n,k} \leq y\}$ à l'aide de f. En déduire que $\Lambda_{n,k} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est mesurable.

3) Soit $(U_n)_{n\geq 1}$, une suite de v.a. réelles $\mathscr{F}$-mesurables indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$. Pour tous $1 \leq k \leq n$, on pose $U_k^{(n)} = \Lambda_{n,k}((U_1,\ldots,U_n))$. Pour tout $y \in]0,1[$, on pose $N_n(y) = \sum_{1\leq k\leq n} \mathbf{1}_{[0,y]}(U_k)$.
3–a) Justifier que $U_k^{(n)}$ est une v.a. $\mathscr{F}$-mesurable ainsi que la v.a. $N_n(y)$. Quelle est la loi de $N_n(y)$. Calculer $\mathbf{E}[N_n(y)]$ et $\mathbf{var}(N_n(y))$ en fonction de n et y. Justifier que la suite $(\frac{1}{n}N_n(y))_{n\geq 1}$ converge p.s. vers une v.a. limite que l'on précisera.
3–b) Soit $x \in]0,1[$ et soit $(k_n)_{n\geq 1}$, une suite d'entiers tels $\lim_n k_n/n = x$. Montrer que p.s. $\lim_n U_{k_n}^{(n)} = x$. (*Indication penser à exprimer un événement du type* $\{U_k^{(n)} \leq y\}$ *à l'aide de* $N_n(y)$.)
4) On fixe $n \geq 1$. On note $\mathbb{S}_n$ le groupe des permutations de $\{1,\ldots,n\}$. Pour tout $\gamma \in \mathbb{S}_n$, on pose $O_\gamma = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{\gamma(1)} < \ldots < x_{\gamma(n)}\}$; on pose aussi $O = \bigcup_{\gamma\in\mathbb{S}_n} O_\gamma$.
4–a) Montrer que p.s. $(U_1,\ldots,U_n) \in O$ et calculer $\mathbf{P}((U_1,\ldots U_n) \in O_\gamma)$, pour tout $\gamma \in \mathbb{S}_n$.
4–b) Montrer qu'il existe une permutation aléatoire $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \to \mathbb{S}_n$ $\mathscr{F}$-mesurable telle que p.s. $U_{\boldsymbol{\sigma}(k)} = U_k^{(n)}$, pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$. Montrer que pour tout $\gamma \in \mathbb{S}_n$, $\mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma} = \gamma) = 1/n!$ et que $\boldsymbol{\sigma}$ est indépendante de $(U_k^{(n)})_{1\leq k\leq n}$. Montrer de plus que pour toute fonction mesurable $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$

$$\mathbf{E}\big[h\big(U_1^{(n)},\ldots,U_n^{(n)}\big)\big] = n! \int_{\{0\leq x_1<\ldots<x_n\leq 1\}} h(x_1,\ldots,x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \, .$$

5) Montrer que que $U_k^{(n)}$ admet une densité notée $g_{n,k}$ que l'on calculera explicitement.
6) On pose $X_n = \sqrt{n}\big(U_{n+1}^{(2n+1)} - \frac{1}{2}\big)$. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une limite que l'on précisera. (*Rappel de la formule de Stirling:* $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$)

Exercice VI. Soit $\varphi : [0,1[\to [0,1[$, donnée par $\varphi(x) = 2x$ modulo 1. On note ℓ la mesure de Lebesgue restreinte à $[0,1[$.
1) Montrer que ℓ est φ-invariante.
2) Soit $A \in \mathscr{B}([0,1[)$ tel que $A = \varphi^{-1}(A)$. On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, l'unique fonction 1-périodique telle que $f = \mathbf{1}_A$ sur $[0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $c_n(f)$ son coefficient de Fourier. Montrer que $c_{2n}(f) = c_n(f)$. En déduire que $\ell(A) = 0$ ou 1. (*Indication: on pourra utiliser l'injectivité des coefficients de Fourier sur* $\mathrm{L}^1([0,1[,\mathscr{B}([0,1[),\ell)$.)
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\varphi^{\circ n}$ la n-ième itérée de φ. On note E l'ensemble des $x \in [0,1[$ tel que la suite n'est $(\varphi^{\circ n}(x))_{n\geq 1}$ n'est pas dense dans $[0,1]$. Montrer que $\ell(E) = 0$ mais que l'adhérence de E est $[0,1]$.

Exercice VII. Soit $p \in]1,\infty[$. Pour simplifier, on note L^p l'espace vectoriel réel $\mathrm{L}^p(]0,\infty[,\mathscr{B}(]0,\infty[),\ell)$ qui est muni de la norme usuelle $\|\cdot\|_p$.
1) Soit $f \in \mathrm{L}^p$. Pour tout $x \in]0,\infty[$, on pose $Tf(x) = \frac{1}{x}\int_{[0,x]} f(y)\ell(dy)$. Montrer que $Tf(x)$ est bien définie. Montrer que $x \mapsto Tf(x)$ est mesurable.
2) Soit $f \in \mathrm{L}^p$. On note q l'exposant conjugué de p. Soit $0 < \alpha < 1/q$. En remarquant que $xTf(x) = \int_{[0,x]} f(y)y^\alpha y^{-\alpha}\,\ell(dy)$, montrer que $\|Tf\|_p^p \leq \frac{1}{(1-\alpha q)^{p-1}\alpha p}\|f\|_p^p$. Montrer que T est un endomorphisme continu de L^p dont on calculera la norme.