ENS 2ème année - 2012-2013
Topologie Algébrique

Examen - Topologie algébrique

Durée 3h - Documents et calculatrices interdites.

Les questions marquées d'un symbole (†) sont plus difficiles.

Notations

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note D^{n+1} le disque unité et S^n la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ pour la norme euclidienne. On munit S^n du point de base $b = (1, 0, 0, \dots)$. Tous les bouquets de sphères sont pris relativement à ces points de base.

Si (X, x), (Y, y) et (Z, z) sont des espaces topologiques pointés et $f : X \to Z$, $g : Y \to Z$ des applications préservant les points de base, on note $f \vee g : X \vee Y \to Z$ l'application dont la restriction à X, resp. Y, est égale à f, resp. g.

Exercice 1 : Invariance du bord.

Si $n \geq 1$, on note $\mathcal{H}_n = [0, +\infty[\times \mathbb{R}^{n-1}$ et $\partial\mathcal{H}_n = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathcal{H}_n$.

1. Soit $x \in \mathcal{H}_n$. Montrez que $x \in \partial\mathcal{H}_n$ si et seulement si $H_n(\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_n \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) = 0$.
2. Soit $\phi : \mathcal{H}_n \xrightarrow{\approx} \mathcal{H}_n$ un homéomorphisme. Montrez que la restriction de ϕ à $\partial\mathcal{H}_n$ induit un homéomorphisme $\partial\mathcal{H}_n \xrightarrow{\approx} \partial\mathcal{H}_n$.

Solution. 1. Si $x \in \partial\mathcal{H}_n$ alors $\mathcal{H}_n \setminus \{x\}$ est un convexe étoilé (par rapport à n'importe quel point $y \in H_n \setminus \partial H_n$). Il est donc contractile. On a donc $\widetilde{H}_n(\mathcal{H}_n \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) = 0$. En utilisant la suite exacte longue de la paire $(\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_n \setminus \{x\})$, on en déduit $H_n(\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_n \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) = 0$.

Si $x \in \mathcal{H}_n \setminus \partial\mathcal{H}_n$, alors on peut trouver un petit disque ouvert D centré en x. Comme $\mathcal{H}_n \setminus D$ est un fermé de l'ouvert $\mathcal{H}_n \setminus \{x\}$, on peut utiliser le théorème d'excision : l'injection $(D, D \setminus \{x\}) \hookrightarrow (\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_n \setminus \{x\})$ induit un isomorphisme en homologie. De plus, il existe un homéomorphisme $\psi : D \to \mathbb{R}^n$ envoyant x sur 0. L'homologie de la paire $(D, D \setminus \{x\})$ est donc isomorphe à l'homologie de la paire $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. En conclusion, pour $x \in \mathcal{H}_n \setminus \partial\mathcal{H}_n$, on a $H_n(\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_n \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$. D'où l'équivalence.

2. Si $x \in \mathcal{H}_n$, l'homéomorphisme ϕ envoie $\mathcal{H}_n \setminus \{x\}$ sur $\mathcal{H}_n \setminus \{\phi(x)\}$. Il induit donc un isomorphisme

$$H_n(\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_n \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) \simeq H_n(\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_n \setminus \{\phi(x)\}; \mathbb{Z})$$

En particulier, $\phi(\partial\mathcal{H}_n) = \partial\mathcal{H}_n$. D'où le résultat. $\square$

Exercice 2 : Tore versus Bouquet de sphères

On considère les espaces topologiques $T = S^1 \times S^1$ et $X = S^1 \vee S^1 \vee S^2$.

1. En utilisant le groupe fondamental, montrez que T et X n'ont pas le même type d'homotopie.
2. Calculez l'homologie singulière à coefficients entiers de T et de X.
3. Calculer la cohomologie singulière à coefficients entiers de T et de X.
4. Soit $f : X \to T$ une application continue. Montrez que $H_2(f; \mathbb{Z})$ ne peut pas être un isomorphisme.
5. (†) Soit $g : T \to X$ une application continue. Montrez que $H_1(g; \mathbb{Z})$ ne peut pas être un isomorphisme.

Solution. 1. Le groupe fondamental d'un produit d'espace est isomorphe au produit des groupes fondamentaux de ces espaces. On a donc $\pi_1(T) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. D'après le théorème de Van Kampen, le groupe fondamental d'un bouquet de deux espaces correctement pointés est égal au produit libre des groupes fondamentaux. L'espace S^1 est correctement pointé donc $\pi_1(S^1 \vee S^1) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. On itère : les espces $S^1 \vee S^1$ et S^2 sont correctement pointés, et $\pi_1(S^2) = \{1\}$ donc $\pi_1(X) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Deux espaces avec des groupes fondamentaux non isomorphes ($\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est abélien, $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ ne l'est pas) ne peuvent pas avoir même type d'homotopie.

2. L'homologie réduite d'un bouquet de deux espaces correctement pointés est la somme directe des homologies réduites des espaces. Comme S^1, $S^1 \vee S^1$ et S^2 sont correctement pointés, on a (en appliquant deux fois la formule du bouquet) $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$, $H_1(X) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $H_2(X) \simeq \mathbb{Z}$, et $H_i(X) = 0$ pour $i \geq 3$. Pour calculer l'homologie de T, on peut voir que la connexité par arcs de T implique que $H_0(T) \simeq \mathbb{Z}$, $H_1(T) \simeq \mathbb{Z}$ car c'est l'abélianisé de $\pi_1(T)$ par théorème de Hurewicz. Pour calculer l'homologie de T en degrés supérieurs, on visualise T comme un tore de révolution dans $\mathbb{R}^3$, qu'on découpe en deux cylindres ouverts $C_1 \approx S^1 \times]0,1[$, $C_2 \approx S^1 \times]0,1[$, et $C_1 \cap C_2 \approx S^1 \times]-\epsilon, \epsilon[\sqcup S^1 \times]-\epsilon, \epsilon[$. On écrit la suite de Mayer Vietoris qui se décompose en :

$$0 \to H_n(T) \to 0 \text{ pour } n \geq 3,$$

$$0 \to H_2(T) \to H_1(C_1 \cap C_2) \xrightarrow{(H_1(j_1), H_1(j_2))} H_1(C_1) \oplus H_1(C_2) \to \dots .$$

On a donc $H_n(T) = 0$ pour $n \geq 3$, et $H_2(T)$ est isomorphe au noyau de $(H_1(j_1), H_1(j_2))$. On calcule que chacune des deux applications $H_1(j_k)$ s'identifie à l'application $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto x + y$. On a donc $H_2(T) \simeq \mathbb{Z}$.

3. On peut calculer la cohomologie d'un espace Y à partir de son homologie en utilisant le théorème des coefficients universels. On a un isomorphisme de groupes abéliens : $H^i(Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_i(Y), \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{i-1}(Y), \mathbb{Z})$. Comme X et T on même homologie ils ont même cohomologie, faisons le calcul pour X.

Comme $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ sont libres, on a $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$. On a donc $H^0(X) \simeq \mathbb{Z}$, $H^1(X) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $H^2(X) \simeq \mathbb{Z}$ et $H^i(X) = 0$ pour $i > 2$.

4. Notons $\iota : S^2 \to X$ l'inclusion canonique S^2 dans X et $\pi : X \to S^2$ la surjection canonique. Alors $\pi \circ \iota = \mathrm{Id}$, d'où on déduit en utilisant $H_2(\pi \circ \iota) = H_2(\pi) \circ H_2(\iota)$ que $H_2(\iota)$ est un isomorphisme. Si $f : X \to T$ induit un isomorphisme en H_2, alors $f \circ \iota$ également, et en particulier $f \circ \iota$ n'est pas homotopiquement triviale. Or, une application $k : S^2 \to T$ peut troujours se relever en une application $\widetilde{k} S^2 \to \mathbb{R}^2$, à travers le revêtement universel $p : \mathbb{R}^2 \to T$ du tore. Comme $\mathbb{R}^2$ est contractile (car convexe), $\widetilde{k}$ est homotope à une application constante, si bien que $k = p \circ \widetilde{k}$ l'est également. Absurde.

5. Supposons que g induise un isomorphisme en H_1. Alors on a un diagramme commutatif où les morphismes verticaux sont donnés par le théorème de Hurewicz :

$$\begin{tikzcd} \pi_1(T) \arrow[r, "\pi_1(g)"] \arrow[d, "\simeq"] & \pi_1(X) \arrow[d] \\ H_1(T) \arrow[r, "H_1(g)", "\simeq"'] & H_1(X) \end{tikzcd} .$$

Le morphisme de groupes $\pi_1(g)$ est donc injectif. Ceci est impossible car tout sous-groupe d'un groupe libre est libre (en particulier non commutatif) par le théorème de Nielsen-Schreier. $\square$

Exercice 3 : Espaces d'Eilenberg Mac Lane

Soit G un groupe. On dit qu'un espace topologique X est un espace de type $K(G,1)$ s'il vérifie les trois conditions suivantes :

(1) X est connexe par arcs,

(2) pour tout $x \in X$, le groupe fondamental $\pi_1(X, x)$ est isomorphe à G,

(3) X admet un revêtement universel $\widetilde{X} \to X$, tel que $\widetilde{X}$ est contractile.

(Les espaces de type $K(G,1)$ sont appelés espaces d'Eilenberg Mac Lane)

I. Construction d'espaces de type $K(G,1)$.

Soit $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes $(u_i)_{i\geq 0}$ à support fini, muni de la norme $||(u_i)|| = \left(\sum_{i\geq 0} |u_i|^2\right)^{1/2}$. On note S^∞ le sous-espace topologique des suites de norme 1.

1. Si $u = (u_i)_{i\geq 0}$ est une suite à support fini, on note $\delta(u)$ la suite décalée, définie par $\delta(u)_0 = 0$, et $\delta(u)_i = u_{i-1}$ pour $i > 0$.

   (a) Montrez que le décalage définit une application continue $\delta : S^\infty \to S^\infty$, qui est homotope à l'application identité, et aussi homotope à l'application constante de valeur la suite $(1, 0, 0, 0, \dots)$.

   (b) Montrez que S^∞ est un espace contractile.

2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Construisez une action libre du groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur S^∞, et montrez que l'espace quotient $S^\infty/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est un espace de type $K(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, 1)$.
3. Soit G un groupe abélien de type fini. Construisez un espace de type $K(G, 1)$.

Solution. 1.(a) Le décalage préserve la norme, donc il est continu. On définit une homotopie entre Id et δ par

$$H(x,t) = tx + (1-t)\delta(x)/||tx + (1-t)\delta(x)|| \ .$$

Pour vérifier que H est bien définie, il faut voir que $tx+(1-t)\delta(x)$ ne s'annule jamais si $x \in S^\infty$. Soit i_m l'indice i maximal pour lequel la coordonnée x_i de x est non nulle. Alors la i_m+1-ème coordonnée de $tx+(1-t)\delta(x)$ vaut $(1-t)x_{i_m}$ qui est non nulle si $t \neq 1$. Si $t = 1$, $x \in S^\infty$ n'est pas nul. Donc H est bien définie. L'application H est de plus continue, $H(x, 0) = x$ et $H(x, 1) = \delta(x)$. De même, on définit une homotopie entre l'application δ et l'application constante de valeur u par la formule :

$$K(x,t) = tu + (1-t)\delta(x)/||tu + (1-t)\delta(x)|| \ .$$

(b) La relation d'homotopie est une relation d'équivalence sur les morphismes $S^\infty \to S^\infty$, donc Id est homotope à une application constante. C'est équivalent à dire que S^∞ est contractile.

2. On fait agir $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ continuement sur S^∞ par multiplication par la racine n-ème de l'unité $e^{i2\pi/n}$. C'est une action libre car $e^{ik2\pi/n}x = x$ implique $k = n$. Comme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est fini, le groupe agit de façon totalement discontinue : pour tout $x \in S^\infty$, il existe $\mathcal{U}$ voisinage ouvert de x tel que $g.\mathcal{U} \cap \mathcal{U} \neq 0$ implique g est l'élément neutre. (On peut produire explicitement $\mathcal{U}$ en prenant une boule ouverte autour de x, de rayon inférieur à $\frac{1}{3}\min_{g\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}\{||gx - x||\}$.) En conséquence, l'application quotient $q : S^\infty \twoheadrightarrow S^\infty/\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un revêtement. S^∞ est contractile, donc connexe par arcs, donc $S^\infty/\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est connexe par arcs (condition (1)). Le groupe des automorphismes du revêtement q est égal à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et agit transitivement sur les fibres par définition (revêtement galoisien), donc $\pi_1(S^\infty/\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Aut}(q) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (condition (2)). Enfin, S^∞ est contractile, donc simplement connexe, donc q est en fait un revêtement universel et la condition (3) est vérifiée.

3. Si G est un groupe abélien de type fini, on peut le décomposer comme un produit fini de groupes cycliques : $G \simeq \mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_m\mathbb{Z}$. Prenons l'espace produit $Y = (S^1)^{\times r} \times S^\infty/\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times S^\infty/\mathbb{Z}/n_m\mathbb{Z}$. Il est connexe par arcs comme produit d'espaces connexes par arcs (condition (1)). Son groupe fondamental est égal au produit des groupes fondamentaux des facteurs du produit, donc est isomorphe à G (condition (2)). Enfin, son revêtement universel est le produit des revêtements universels de ses facteurs (car le produit est fini). L'espace total de son revêtement universel est donc $\mathbb{R}^r \times (S^\infty)^m$ qui est contractile (condition (3)). $\square$

II. Homologie d'un espace de type $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1)$.

1. Soit $p : E \to B$ un revêtement à deux feuillets.
   (a) Montrez que tout simplexe $\sigma : \Delta^n \to B$, admet exactement deux relèvements $\widetilde{\sigma}_1, \widetilde{\sigma}_2 : \Delta^n \to E$ distincts.
   (b) Soit $T_n : C_n(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to C_n(E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ l'application $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-linéaire qui envoie un simplexe σ sur la somme $T_n(\sigma) = \widetilde{\sigma}_1 + \widetilde{\sigma}_2$. Montrez que $T_* : C_*(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to C_*(E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est un morphisme de complexes de chaines.
   (c) Montrez qu'il existe une suite exacte longue :

$$\cdots \to H_{i+1}(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} H_i(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{H_i(T)} H_i(E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{H_i(p)} H_i(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} \dots$$

2. Soit X un espace de type $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1)$. Calculez $H_*(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Solution. 1. (a) Soit x_0 un point de Δ_n, $b_0 = \sigma(x_0)$, et $\{e_1, e_2\} = p^{-1}(b_0)$. Si $\widetilde{\sigma}$ est un relèvement de σ, alors $\widetilde{\sigma}(x_0) = e_1$ ou e_2. Comme Δ_n est connexe, deux relèvements conincidant en un point son égaux. Il y a donc au plus deux relèvements de σ. Comme Δ^n est un espace connexe par arcs, localement connexe par arcs et simplement connexe, l'existence de deux relèvements (le premier envoyant x_0 sur e_1, le deuxième envoyant x_0 sur e_2) est assurée par le théorème de relèvements des applications.

(b) On verifie que pour tout $\sigma : \Delta^n \to B$, on a $T_{n-1}(d\sigma) = dT_n(\sigma)$.

$$\begin{aligned} T_{n-1}d\sigma &= \sum_i T_{n-1}(\sigma \circ d^i) \text{ (pas de signes car on travaille dans } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ &= \sum_i (\widetilde{\sigma \circ d^i}_1 + \widetilde{\sigma \circ d^i}_2) \end{aligned}$$

Or la paire $\{\widetilde{\sigma \circ d^i}_1, \widetilde{\sigma \circ d^i}_2\}$ est l'ensemble des revêtements de $\sigma \circ d_i$, tout comme la paire $\{\widetilde{\sigma}_1 \circ d_i, \widetilde{\sigma}_2 \circ d_i\}$. On a donc

$$T_{n-1}d\sigma = \sum_i (\widetilde{\sigma}_1 \circ d^i + \widetilde{\sigma}_2 \circ d^i) = dT_n(\sigma) \ .$$

(c) On va montrer qu'il y a une suite exacte courte de complexes

$$C_*(B) \xrightarrow{T_*} C_*(E) \xrightarrow{p_*} C_*(B) \ ,$$

La suite exacte longue associée répond alors à la question. Le morphisme p_* est surjectif, car tout simplexe σ admet un relèvement. Le morphisme T_* est injectif, car si $\sum_\sigma \sigma$ est une chaine de simplexes de B avec les σ deux à deux distincts, alors $T_n(\sum \sigma) = \sum_\sigma (\widetilde{\sigma}_1 + \widetilde{\sigma_2})$ est une somme de simplexes deux à deux distincts, en particulier c'est un élément non nul. On a $p_* \circ T_* = 0$ car si $\sum_\sigma \sigma$ est une chaine de B, on a

$$p_*T_*(\sum_\sigma \sigma) = p_*(\sum_\sigma (\widetilde{\sigma}_1 + \widetilde{\sigma_2})) = \sum_\sigma (p \circ \widetilde{\sigma}_1 + p \circ \widetilde{\sigma_2}) = 0$$

car $p \circ \widetilde{\sigma_1} = \sigma = p \circ \widetilde{\sigma_2}$ et car on travaille à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Montrons enfin que $\mathrm{Ker} p_* \subset \mathrm{Im} T_*$. Soit $\sum_\sigma \sigma$ une chaine de E. Si $p_*(\sum_\sigma \sigma) = 0$ alors cela signifie que l'on peut regrouper les simplexes en paires $\{\sigma_1, \sigma_2\}$, telles que les images par p_* de deux éléments dans une paire se compensent. Une telle paire est donc constituée des deux relèvements d'un simplexe de B, et la somme $\sigma_1 + \sigma_2$ est donc dans l'image de T_*. Donc $\sum_\sigma \sigma$ est dans l'image de T_*.

2. Soit X de type $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1)$. Alors son revêtement universel $q\widetilde{X} \to X$ est à deux feuillets et on peut appliquer la question 1(c). Comme $H_i(\widetilde{X}) = 0$ pour $i > 0$, la suite exacte longue s'écrit :

$$0 \to H_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial} H_n(X) \to 0 \text{ pour } n \geq 1,$$
$$0 \to H_1(X) \xrightarrow{\partial} H_0(X) \xrightarrow{H_0(T)} H_0(\widetilde{X}) \xrightarrow{H_0(p)} H_0(X) \to 0 .$$

Comme X et $\widetilde{X}$ sont connexes par arcs, $H_0(p)$ est un isomorphisme. Son noyau, nul, est égal à l'image de $H_0(T)$, qui est donc l'application nulle. Donc on a un isomorphisme $H_1(X) \simeq H_0(X)$. Par ailleurs, en degrés supérieurs on a $H_{n+1}(X) \simeq H_n(X)$. On obtient donc $H_i(X) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour tout $i \geq 0$. $\square$

III. Variétés topologiques de type $K(G, 1)$

Soit G un groupe contenant un élément d'ordre 2. Soit X un espace de type $K(G, 1)$. Montrez que X ne peut pas être une variété topologique de dimension finie. (On rappelle (et on admet) que pour une variété topologique de dimension n, $H_i(X, \mathbb{Z}) = 0$ pour $i > n$)

Solution. Supponsons que X est une variété de dimension n. Alors son revêtement universel $\widetilde{X}$ est également une variété topologique de dimension n. Le groupe des automorphismes de $\widetilde{X} \to X$ est isomorphe à G (revêtement galoisien car universel), et on a donc une action (de façon totalement discontinue) de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $\widetilde{X}$ et un diagramme commutatif de revêtements

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & \widetilde{X}/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} . \arrow[dl, "r"] \\ X & \end{tikzcd}$$

l'espace $\widetilde{X}/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est alors une variété topologique de dimension n, en particulier $H_{n+1}(\widetilde{X}/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$. Elle est connexe par arcs, car $\widetilde{X}$ l'est, son groupe fondamental est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et son revêtement universel est q, d'espace total contractile. Donc $\widetilde{X}/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est également un espace de type $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1)$ et en particulier $H_{n+1}(\widetilde{X}/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Absurde. $\square$

IV. Cohomologie d'un espace de type $K(G,1)$.(†)

Soit G un groupe fini, $\mathbb{K}$ un corps, et $\mathbb{K}[G]$ l'algèbre de groupe de G [1]. On note $\mathbb{K}^{\mathrm{triv}}$ le $\mathbb{K}[G]$-module trivial, c'est à dire le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension un, muni de l'action triviale $\rho : G \to GL_1(\mathbb{K})$, $g \mapsto \mathrm{Id}_{\mathbb{K}}$.

On se fixe un espace topologique X de type $K(G,1)$.

1. Montrez que les espaces vectoriels $C_i(\widetilde{X};\mathbb{K})$ sont munis d'une structure de $\mathbb{K}[G]$-module, puis que le complexe de chaines singulières $C_*(\widetilde{X};\mathbb{K})$ est une résolution libre du $\mathbb{K}[G]$-module $\mathbb{K}^{\mathrm{triv}}$.
2. Montrez que pour tout $i \geq 0$, la cohomologie singulière $H^i(X;\mathbb{K})$ est isomorphe au $\mathbb{K}$-espace vectoriel d'extensions $\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{K}[G]}(\mathbb{K}^{\mathrm{triv}},\mathbb{K}^{\mathrm{triv}})$.

Solution. 1. Le groupe G est isomorphe a groupe des automorphismes du revêtement $q : \widetilde{X} \to X$. On a donc une action de G sur $\widetilde{X}$. On fait agir chaque $g \in G$ sur $C_i(\widetilde{X})$ par l'application $\mathbb{K}$-linéaire $C_i(g)$. Par fonctorialité du complexe des chaines singulières, on a $C_i(g.h) = C_i(g) \circ C_i(h)$ et $C_i(\mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$, donc cela définit bien une action $\mathbb{K}$-linéaire de G sur $C_i(\widetilde{X})$.

Comme le revêtement $q : \widetilde{X} \to X$ est galoisien, G agit librement et transitivement sur les fibres. En particulier, à l'aide du théorème de relèvement des applications, on montre que si $\sigma : \Delta_i \to \widetilde{X}$ est un simplexe, alors l'ensemble $\{g \cdot \sigma \mid g \in G\}$ s'identifie à l'ensemble des relèvements du simplexe $q \circ \sigma$. En particulier, le sous $\mathbb{K}[G]$-module engendré par σ est libre de rang 1. Choisissons pour chaque simplexe τ de X un relèvement $\widetilde{\tau} : \Delta_i \to \widetilde{X}$. On a alors un isomorphisme de $\mathbb{K}[G]$-modules :

$$C_i(\widetilde{X}) = \bigoplus_{\tau} \mathbb{K}[G] \cdot \widetilde{\tau} \simeq \bigoplus_{\tau} \mathbb{K}[G] \;. \quad (*)$$

Les $\mathbb{K}[G]$-modules $C_i(\widetilde{X})$ sont donc libres. Les différentielles du complexe $C_*(\widetilde{X})$ sont $\mathbb{K}[G]$-équivariantes car $g \in G$ agit comme $C_i(g)$. Comme $\widetilde{X}$ est contractile on a de plus $H_i(C_*(\widetilde{X})) = 0$ si $i > 0$. Enfin, si on munit $C_*(X)$ d'une action triviale de G, alors $C_*(q)$ est un morphisme $\mathbb{K}[G]$-linéaire. L'application $H_0(q)$ induit donc un isomorphisme de $\mathbb{K}[G]$-modules de $H_0(C_*(\widetilde{X}))$ sur $H_0(C_*(X)) = \mathbb{K}^{\mathrm{triv}}$.

2. D'après la question 1, $\mathrm{Ext}^*_{\mathbb{K}[G]}(\mathbb{K}^{\mathrm{triv}},\mathbb{K}^{\mathrm{triv}})$ est égal à l'homologie du complexe $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}[G]}(C_*(\widetilde{X}),\mathbb{K}^{\mathrm{triv}})$. L'application $C_*(q)$ induit un morphisme de complexes :

$$Q : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C_*(X),\mathbb{K}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}[G]}(C_*(X),\mathbb{K}^{\mathrm{triv}}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}[G]}(C_*(\widetilde{X}),\mathbb{K}^{\mathrm{triv}}) \;.$$

Nous allons maintenant montrer que ce morphisme est un isomorphisme en chaque degré i. Si ϵ est l'augmentation de l'algèbre de groupe, l'isomorphisme

1. On rappelle qu'un $\mathbb{K}[G]$-module M est équivalent à la donnée d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel M et d'un morphisme de groupes $\rho_V : G \to GL_{\mathbb{K}}(M)$, et qu'une application $\mathbb{K}[G]$-linéaire $f : M \to N$ est une application $\mathbb{K}$-linéaire $f : M \to N$ tel que pour tout $g \in G$, $\rho_N(g) \circ \cdot f = f \circ \rho_M(g)$.

$(*)$ s'insère dans diagramme commutatif de $\mathbb{K}[G]$-modules (où les deux modules du bas sont munis d'une action triviale)

$$\begin{tikzcd} C_i(\widetilde{X}) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "C_i(q)"] & \bigoplus_\tau \mathbb{K}[G] \arrow[d, "\bigoplus \epsilon"] \\ C_i(X) \arrow[r, "\simeq"] & \bigoplus_\tau \mathbb{K} \end{tikzcd} \quad . \qquad (**)$$

L'application Q s'identifie donc en degré i à l'isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\bigoplus_\tau \mathbb{K}, \mathbb{K}) \simeq \prod_\tau \mathbb{K} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}[G]}(\bigoplus_\tau \mathbb{K}[G], \mathbb{K}^{\mathrm{triv}}) \ .$$

Donc Q est un isomorphisme, et en prenant la cohomologie de ces complexes, il induit donc un isomorphisme entre $H^*(X, \mathbb{K})$ et $\mathrm{Ext}^*_{\mathbb{K}[G]}(\mathbb{K}^{\mathrm{triv}}, \mathbb{K}^{\mathrm{triv}})$. □

Exercice 4 : Espaces de Moore

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On rappelle que pour toute application continue $f : S^n \to S^n$, le degré de f est le nombre $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $x \in H_n(S^n, \mathbb{Z})$, $H_n(f)(x) = \deg(f)x$.

1. Soit $\widetilde{b} : S^n \to S^n$ l'application constante de valeur le point de base $b \in S^n$.
   (a) Construisez une application $p : S^n \to S^n \vee S^n$ telle que les composées $(\mathrm{Id}_{S^n} \vee \widetilde{b}) \circ p$ et $(\widetilde{b} \vee \mathrm{Id}_{S^n}) \circ p$ sont de degré 1.
   (b) Montrez que pour tout $d \geq 0$, il existe une application $f : S^n \to S^n$ de degré d.
2. Calculez le groupe fondamental et l'homologie à coefficients entiers de l'espace $S^n \cup_f D^{n+1}$ obtenu en recollant une cellule de dimension $n+1$ sur la sphère S^n au moyen d'un application $f : S^n \to S^n$ de degré $d \geq 1$.
3. Soit G un groupe abélien de type fini. Montrez qu'il existe un espace topologique connexe par arcs X tel que $H_i(X, \mathbb{Z})$ est isomorphe à G si $i = n$ et nul si $i > 0$ et $i \neq n$. (un tel espace est appelé espace de Moore de type $M(G, n)$)

Solution. La solution est essentiellement contenue dans le corrigé de l'exercice 5 de l'examen de l'année 2010/2011. □

Exercice 5 : Exemples d'entrelacs.

Un entrelacs d'un espace X est un sous-ensemble de X homéomorphe à une réunion disjointe d'un nombre fini de copies de S^1.

I. Complémentaire d'entrelacs de S^3.

1. On considère les deux parties A et B de S^3 définies par :

$$A = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 \geq \frac{1}{2} \right\} ,$$
$$B = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{1}{2} \right\} .$$

   Montrez que l'application $\phi : A \to S^1 \times D^2$ définie par

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{(x_1, x_2)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, (\sqrt{2}x_3, \sqrt{2}x_4) \right)$$

   est un homéomorphisme. Construisez de même un homéomorphisme $\psi : B \to S^1 \times D^2$, et montrez que $A \cap B$ est homéomorphe à $S^1 \times S^1$.

2. On note $C \subset S^3$ l'ensemble $\phi^{-1}(S^1 \times \{0\})$, et $C' \subset S^3$ l'ensemble $\psi^{-1}(S^1 \times \{0\})$. Calculez le groupe fondamental de $S^3 \setminus C$ et de $S^3 \setminus (C \cup C')$.

Solution. 1. L'homéomorphisme inverse est donné par

$$\phi^{-1}(y_1, y_2, y_3, y_4) = \left(\sqrt{1 - \frac{y_3^2 + y_4^2}{2}} y_1, \sqrt{1 - \frac{y_3^2 + y_4^2}{2}} y_2, \frac{1}{\sqrt{2}} y_3, \frac{1}{\sqrt{2}} y_4 \right) .$$

Le point (x_1, x_2, x_3, x_4) est dans $A \cap B$ si et seulement si $x_3^2 + x_4^2 = 1/2$, c'est à dire si et seulement si $\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^1 \times S^1$. La restriction de ϕ à $A \cap B$ induit un homéomorphisme de $A \cap B$ sur $S^1 \times S^1$. La construction de ψ est similaire.

2. On peut trouver une rétraction par déformation forte de $S^1 \times D^2 \setminus \{0\}$ sur $S^1 \times S^1$. D'après la question 1, on peut donc trouver une rétraction par déformation forte de $A \setminus C$ sur $A \cap B$. En prolongeant cette application par l'identité hors de A, on obtient une rétraction par déformation forte de $S^3 \setminus C$ sur B. Donc $\pi_1(S^3 \setminus C) \simeq \pi_1(B) \simeq \mathbb{Z}$. De même on a une rétraction par déformation forte de $B \setminus C'$ sur $A \cap B$. En recollant avec celle de $A \setminus C$ sur $A \cap B$ le long de $A \cap B$ on obtient une rétraction par déformation forte de $S^3 \setminus (C \cup C')$ sur $A \cap B$. Donc $\pi_1(S^3 \setminus (C \cup C')) \simeq \pi_1(A \cap B) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. □

II. Complémentaire d'entrelacs de $\mathbb{R}^3$.

On se fixe un point $s \in A \cap B \subset S^3$, un homéomorphisme $h : \mathbb{R}^3 \to S^3 \setminus \{s\}$, et on note $\iota : \mathbb{R}^3 \to S^3$ l'application qui envoie $x \in \mathbb{R}^3$ sur $h(x) \in S^3$.

On définit des sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$, $K := \iota^{-1}(C)$ et $K' := \iota^{-1}(C')$. On note $z_{\min} = \min\{z \mid (x, y, z) \in K\}$, $z_{\max} = \max\{z \mid (x, y, z) \in K\}$, et on note K'' le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ obtenu par translation de K par le vecteur $(0, 0, z_{\max} - z_{\min} + 1)$.

1. Soit A une partie compacte de $\mathbb{R}^3$. Montrez que $\iota : \mathbb{R}^3 \setminus A \to S^3 \setminus \iota(A)$ induit un isomorphisme au niveau des groupes fondamentaux.
2. (a) Calculez le groupe fondamental de $\mathbb{R}^3 \setminus (K \cup K')$.
   (b) Calculez le groupe fondamental de $\mathbb{R}^3 \setminus (K \cup K'')$.
   (c) Peut-on trouver un homéomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui envoie l'entrelacs $K \cup K'$ sur l'entrelacs $K \cup K''$?

Solution. 1. Comme A est compacte, elle est contenue dans une boule ouverte $B(0,r)$ de $\mathbb{R}^3$. On note $U = \iota(B(0,r+\epsilon))$ et $V = S^3 \setminus \iota(\overline{B(0,r)})$. Alors on peut décomposer $S^3 \setminus \iota(A) = (U \setminus A) \cup (V)$, et $U \cap V$ est homéomorphe à $B(0,r+\epsilon) \setminus \overline{B(0,r)}$, donc à $S^2 \times]0,\epsilon[$, qui est simplement connexe. D'après van Kampen, on a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U \setminus \iota(A)) * \pi_1(V) \arrow[r, "\simeq"] & \pi_1(S^3 \setminus \iota(A)) \\ \pi_1(B(0,r+\epsilon) \setminus A) * \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B(0,r)}) \arrow[u, "\pi_1(\iota)*\pi_1(\iota)"] \arrow[r, "\simeq"] & \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus A) \arrow[u, "\pi_1(\iota)"'] \end{tikzcd}.$$

Pour démontrer que le morphisme vertical de droite est un isomorphisme, il suffit donc de montrer que celui de gauche l'est. Comme $\iota : B(0,r+\epsilon) \to U$ est un homéomorphisme, il suffit de démontrer que $\pi_1(\iota) : \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B(0,r)}) \to \pi_1(V)$ est un isomorphisme, ce qui est vrai car le groupe fondamental de chacun de ces deux espaces est trivial (le permier a le type d'homotopie de S^2, le deuxième de D^3).

2. (a) $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus (K \cup K')) \simeq \pi_1(S^3 \setminus (C \cup C'))$ d'après la question 1, donc est isomorphe à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ d'après la partie I.

(b) On découpe $\mathbb{R}^3$ en deux ouverts $U = \{z < z_{\max} + 2/3\}$ et $V = \{z > z_max + 1/3\}$. L'ouvert U contient K, l'ouvert V contient K'', et on peut décomposer $\mathbb{R}^3 \setminus (K \cup K'') = (U \setminus K) \cup (V \setminus K'')$. De plus $(U \setminus K) \cap (V \setminus K'') = U \cap V = \mathbb{R}^2 \times]z_{\max}+1/3, z_{\max}+2/3[$ est contractile. Donc d'après le théorème de van Kampen, on a un isomorphisme $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus (K \cup K'')) \simeq \pi_1(U \setminus K) * \pi_1(V \setminus K'')$. Comme $\mathbb{R}^3 \setminus K$ est homotopiquement équivalent à $U \setminus K$, $\pi_1(U \setminus K) \simeq \mathbb{Z}$ d'après la question 1 et la partie I. De même, $\pi_1(V \setminus K'') \simeq \mathbb{Z}$. Donc $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus (K \cup K'')) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

(c) Si on avait un tel homéomorphisme, alors on aurait un homéomorphisme entre $\mathbb{R}^3 \setminus (K \cup K'')$ et $\mathbb{R}^3 \setminus (K \cup K')$, donc un isomorphisme entre leurs groupes fondamentaux. Absurde. $\square$