**Analyse complexe et théorie spectrale**

**Examen du 6 juin 2008**

Durée: 3h

Aucun document n'est autorisé

**Exercice 1.**

1. Soit $a > 0$. On pose $F(z) = \frac{z-a}{z+a}$.
i) Montrer que $F$ envoie le demi-espace $\{Re(z) > 0\}$ dans le disque unité et que si $|F(z)| < \frac{1}{3}$ alors $Re(z) > \frac{1}{2}a$.

ii) Soit $f$ une fonction holomorphe dans le disque de centre $z_0$ et rayon $\delta > 0$, avec $|f(z)| > 1 \quad \forall z \in D(z_0, \delta)$. Montrer qu'il existe une détermination holomorphe $log(f)$ du logarithme de $f$ et que la fonction $\phi(z) = \frac{log(f(z))-a}{log(f(z))+a}$ est bien définie, holomorphe et que $\forall z \in D(z_0, \delta), |\phi(z)| < 1$.

iii) On suppose que $log f(z_0) = a$. Montrer que $\forall z \in D(z_0, \delta/3), |\phi(z)| < 1/3$ et que $log|f(z)| > a/2$..

2. Soit $U$ un ouvert connexe de $\mathbf{C}$. Si $f$ est une fonction holomorphe dans $U$, on définit une fonction $\rho(f)$ par: $\rho(f) = \frac{2|f'|}{1+|f|^2}$.

Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions holomorphes dans $U$. On dit que cette famille est normale si pour toute suite $(f_n)$ de fonctions de $\mathcal{F}$, on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact soit vers une fonction, soit vers $\infty$.

a) Montrer que si $F$ est une famille normale, alors:
pour tout compact $K \subset U$, il existe une constante $M > 0$ telle que: $\forall f \in \mathcal{F}, \forall z \in K \quad |f'(z)| \leq M(1 + |f(z)|^2)$.
(On pourra utiliser la fonction $\rho(f)$ et observer que $\rho(f) = \rho(1/f)$).

b) On se propose d'établir la réciproque, à savoir que si une famille $\mathcal{F}$ de fonctions holomorphes satisfait à la condition ci-dessus, alors elle est normale.
Soit $z_0 \in U$ et $(f_n)$ une suite de fonctions holomorphes dans $U$.

i) Montrer que si la suite $|f_n(z_0)|$ est bornée, alors les fonctions $f_n$ sont uniformément bornées dans un voisinage de $z_0$.
(Supposant que $\forall n, \quad |f_n(z_0)| < A$, on pourra montrer que si $\delta < \frac{A}{M(1+4A^2)}$, on a: $\forall z \in D(z_0, \delta) \quad |f(z)| < 2A$).

ii) Montrer que si $|f_n(z_0)| \to \infty$, alors les fonctions $f_n$ tendent uniformément vers $\infty$ dans un voisinage de $z_0$.
(On pourra supposer $|f_n(z_0)| > 2$ et montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $|f_n(z)| > 1$ pour $z \in D(z_0, \delta)$; puis se ramener au cas où $f_n(z_0) > 0$, et utiliser la question 1.)

iii) Conclure.

**Exercice 2.**

Soit $A$ une algèbre de Banach unifère et $x \in A$. On suppose que 0 est dans la composante connexe non bornée du complémentaire du spectre $\sigma(x)$ de $x$. Montrer que $x$ est inversible et que $\forall \epsilon > 0$ il existe un polynôme $P$ tel que $||x^{-1} - P(x)|| < \epsilon$.

**Exercice 3.**

Soit $A$ une algèbre de Banach unifère. On désigne par $G(A)$ le groupe des éléments inversibles de $A$ et par $exp(A)$ l'ensemble des produits d'exponentielles $e^{x_1} \cdots e^{x_n}$ où $x_1, \cdots x_n \in A$.

a) Montrer que $exp(A)$ est contenu dans la composante connexe de $G(A)$ qui contient 1. On désignera par $G_1(A)$ cette composante connexe.

b) Soit $a \in exp(A)$ et $x \in A$ tels que $||x - a|| < \frac{1}{||a^{-1}||}$. Montrer que le spectre $\sigma(a^{-1}x)$ de $a^{-1}x$ est contenu dans le disque de centre 1 et rayon 1 et qu'il existe $y \in A$ tel que $e^y = a^{-1}x$.

c) Montrer que $exp(A)$ est fermé dans $G(A)$.

d) Montrer que $exp(A) = G_1(A)$.

**Exercice 4.**

Soit $X$ un espace de Banach et $B(X)$ l'algèbre de Banach des applications linéaires continues de $X$ vers $X$.

Si $T \in B(X)$, on appelle spectre ponctuel de $T$, et on le note $\sigma_p(T)$, l'ensemble des valeurs propres de $T$.

Soit $\Omega$ un ouvert contenant le spectre $\sigma(T)$ de $T$ et $f$ une fonction holomorphe sur $\Omega$.

a) Montrer que $f(\sigma_p(T)) \subset \sigma_p(f(T))$.

b) Montrer que si $\alpha \in \sigma_p(f(T))$ et si $f - \alpha$ n'est identiquement nulle sur aucune composante connexe de $\Omega$, alors $\alpha \in f(\sigma_p(T))$.

En déduire que si $f$ n'est constante sur aucune composante connexe de $\Omega$ alors $f(\sigma_p(T)) = \sigma_p(f(T))$.

**Exercice 5.**

Soit $H$ un espace de Hilbert. On rappelle qu'un opérateur $A \in B(H)$ est dit normal s'il commute avec son adjoint: $AA^* = A^*A$, et qu'un opérateur $U \in B(H)$ est dit unitaire si $UU^* = U^*U = Id$; on notera qu'alors: $\forall x \in H, ||U(x)|| = ||x||$.

On considère des opérateurs $M, N, T \in B(H)$ avec $M$ et $N$ normaux et $MT = TN$. On se propose de montrer que: $M^*T = TN^*$.

1. Soit $S \in B(H)$. Montrer que $exp(S - S^*)$ est unitaire.

2. Montrer que: $exp(M)T = Texp(N)$, puis que $||exp(M^*)Texp(-N^*)|| \leq ||T||$.

3. Soit, pour $\lambda \in \mathbf{C}, f(\lambda) = exp(\lambda M^*)Texp(-\lambda N^*)$. Montrer que $f$ est constante et conclure.