FIMFA 2008/2009
Lundi 25 mai 2009

ANALYSE COMPLEXE ET HARMONIQUE
DURÉE 3 HEURES – DOCUMENTS NON AUTORISÉS

1. Probème de Dirichlet sur les ouverts à bords réguliers

On a vu au chapitre 5 du cours que si D est un disque, quelle que soit la fonction continue $\omega : \partial D \to \mathbf{C}$, le problème de Dirichlet pour ω et D admet une unique solution, donnée par l'intégrale de Poisson $P_D\omega$. Par transformation conforme, on a aussi obtenu l'existence et l'unicité de la solution du problème de Dirichlet, pour tout domaine de Jordan U, et toute fonction continue sur ∂U.
Ce résultat reste en fait valable sous des hypothèses beaucoup moins restrictives.

Pour obtenir une telle généralisation, on commence par introduire la notion de point régulier du bord ∂U.

Définition : Soit U un ouvert borné de $\mathbf{C}$. On dit qu'un point $\zeta \in \partial U$ est **régulier** si la composante connexe par arcs de $\mathbf{C} \setminus U$ contenant ζ n'est pas réduite à un point, autrement dit s'il existe un chemin $\gamma : [0,1] \to \mathbf{C} \setminus U$ tel que

$$\gamma(0) = \zeta \text{ et } \gamma(1) \neq \zeta.$$

Exemples :
- si $U = B(0,1) \setminus [-1,0]$, tous les points de ∂U sont réguliers.
- si $U = B(0,1) \setminus \{0\}$, alors 0 n'est pas régulier.

L'énoncé qu'on se propose de montrer, en utilisant une méthode due à Perron, est le suivant :

Soit U un ouvert borné de $\mathbf{C}$ tel que tous les points de ∂U sont réguliers.
Pour toute fonction continue $\omega : \partial U \to \mathbf{C}$, le problème de Dirichlet pour U et ω admet une unique solution.

1.1. Plus grand minorant sous-harmonique.

Soient $\omega : \partial U \to \mathbf{R}$ une fonction bornée, et $\mathcal{L}_\omega$ la famille de toutes les fonctions u sous-harmoniques de U telles que

$$\forall \zeta \in \partial U, \quad \limsup_{z\to\zeta} u(z) \leq \omega(\zeta).$$

On définit alors la fonction $\mathcal{P}\omega$ par

$$\forall z \in U, \quad \mathcal{P}\omega(z) = \sup\{u(z) \,/\, u \in \mathcal{L}_\omega\}.$$

1) Montrer que $\mathcal{P}\omega$ est bornée. On commencera par prouver que toute fonction u de $\mathcal{L}_\omega$ prolongée sur ∂U par $\sup_{\partial U} \omega$ est une fonction semi-continue supérieurement sur $\bar{U}$.

On s'intéresse alors aux **propriétés de stabilité de** $\mathcal{L}_\omega$.

2) Soient u_1, u_2 deux fonctions de $\mathcal{L}_\omega$, montrer que $\max(u_1, u_2) \in \mathcal{L}_\omega$.

3) Soit $\bar{D}$ un disque fermé inclus dans U. Pour toute fonction $u \in \mathcal{L}_\omega$ telle que $u_{|\partial D}$ est intégrable sur ∂D, on définit $\mathcal{K}u$ par

$$\mathcal{K}u(z) = P_D u_{|\partial D}(z) \text{ si } z \in D, \text{ et } \mathcal{K}u(z) = u(z) \text{ si } z \notin D,$$

où P_D est le noyau de Poisson de D.
Montrer que $Ku \in \mathcal{L}_\omega$ et que $\mathcal{K}u \geq u$.

En utilisant ces deux propriétés, on peut prouver que $\mathcal{P}\omega$ **est harmonique sur** U.

4) Soit $\bar{D} = \bar{D}(z_0, r)$ un disque fermé inclus dans U. Construire une suite croissante (u_n) de fonctions de $\mathcal{L}_\omega$, harmoniques sur D, et telles que

$$\lim_{n\to\infty} u_n(z_0) = \mathcal{P}\omega(z_0).$$

Montrer que la suite (u_n) converge uniformément sur tout compact de D vers une fonction harmonique u^0 telle que $u^0(z_0) = \mathcal{P}\omega(z_0)$.

5) Soit $z_1 \in D$ quelconque. En utilisant le même type de construction que précédemment, montrer qu'il existe une fonction $u^1 \geq u^0$ harmonique sur D et telle que $u^1(z_1) = \mathcal{P}\omega(z_1)$.
Conclure qu'on a nécessairement $u^0 = u^1$ sur D.

6) En déduire que $\mathcal{P}\omega$ est harmonique sur D, puis que $\mathcal{P}\omega$ est harmonique sur U.

1.2. **Points de continuité de $\mathcal{P}\omega$.**

Soient $\omega : \partial U \to \mathbf{R}$ une fonction bornée, et $\zeta_0 \in \partial U$ un point de continuité de ω.
On suppose qu'il existe $r_0 > 0$ tel que, pour tout $r \leq r_0$, on peut trouver une fonction $v_r : U \to \mathbf{R}$ satisfaisant les propriétés suivantes :

(i) $-v_r$ est sous-harmonique;
(ii) $v_r \geq 0$ sur U;
(iii) $v_r(z) \geq 1$ si $|z - \zeta_0| \geq r$;
(iv) $\lim_{z\to\zeta_0} v_r(z) = 0$.

7) Soient $\varepsilon > 0$, et $r \in]0, r_0]$ tel que $\forall \zeta \in \partial U \cap B(\zeta_0, 2r), \quad |\omega(\zeta) - \omega(\zeta_0)| < \varepsilon$. On définit la fonction

$$u : z \mapsto \omega(\zeta_0) - \varepsilon - 2\|\omega\|_\infty v_r(z).$$

Montrer que

$$\forall z \in U, \quad u(z) \leq \mathcal{P}\omega(z).$$

En déduire que

$$\liminf_{z\to\zeta_0} \mathcal{P}\omega(z) \geq \omega(\zeta_0).$$

8) Montrer que $\mathcal{P}\omega \leq -\mathcal{P}(-\omega)$.

9) Conclure que ζ_0 est un point de continuité de $\mathcal{P}\omega$, c'est-à-dire que

$$\lim_{z\to\zeta_0} \mathcal{P}\omega(z) = \omega(\zeta_0).$$

1.3. **Etude des points réguliers.**

Soit ζ_0 un point régulier de ∂U. On va montrer qu'il existe $r_0 > 0$ tel que, pour tout $r \leq r_0$, on peut trouver une fonction $v_r : U \to \mathbf{R}$ satisfaisant les propriétés (i)-(iv).

Par définition, il existe un chemin $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{C} \setminus U$ tel que $\gamma(0) = \zeta_0$ et $\gamma(1) = \zeta_0 + w$ avec $|w| > 0$.

Pour $r \leq |w|$, on note t_r le premier point $t \in [0, 1]$ tel que $|\gamma(t) - \zeta_0| = r$ et $w_r = \gamma(t_r)$.
On définit alors L_r comme la réunion de $\gamma([0, t_r])$ et de la demi-droite $\{w_r + t(w_r - \zeta_0) \,/\, t \geq 0\}$.

10)* Montrer qu'il existe une détermination continue $\psi : z \mapsto \log\left(\frac{z-\zeta_0}{r}\right)$ du logarithme dans $\bar{B}(\zeta_0, r) \setminus L_r$, et que

$$\psi : B(\zeta_0, r) \setminus L_r \to \{z \in \mathbf{C} \,/\, \Re e(z) < 0\}\,, \text{ et } \psi : \partial B(\zeta_0, r) \setminus \{w_r\} \to]ia, i(a + 2\pi)[\,.$$

.

11) On définit alors $\varphi : U \cap \bar{B}(\zeta_0, r) \to]0, 2[$ par

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi} \arg\left(\frac{\psi(z) - i(a + 2\pi)}{\psi(z) - ia}\right),$$

où arg est la détermination principale de l'argument dans $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$. Montrer que φ est continue sur $U \cap \bar{B}(\zeta_0, r)$, harmonique sur $U \cap B(\zeta_0, r)$.

12) En déduire que la fonction v_r qui coïncide avec φ sur $U \cap \bar{B}(\zeta_0, r)$, et vaut identiquement 1 sur $U \setminus \bar{B}(\zeta_0, r)$, vérifie les hypothèses (i)-(iv).

1.4. **Existence et unicité pour le problème de Dirichlet.**

13) Déduire des résultats précédents que, si tous les points de ∂U sont réguliers et si ω est continue sur ∂U, alors $\mathcal{P}\omega$ est une solution du problème de Dirichlet pour U et ω. Montrer que cette solution est unique.

2. Fonctions elliptiques

Soient a_1 et a_2 deux nombres complexes non nuls $\mathbf{R}$-linéairement indépendants. On note Λ le réseau $\mathbf{Z}a_1 \oplus \mathbf{Z}a_2$. On dit qu'une fonction méromorphe f sur $\mathbf{C}$ est elliptique pour le réseau Λ si

$$f(z + a) = f(z), \quad \forall z \in \mathbf{C},\, a \in \Lambda.$$

On appelle parallélogramme fondamental associé Λ tout parallélogramme de sommets $z_0, z_0 + a_1$, $z_0 + a_2$, $z_0 + a_1 + a_2$, avec $z_0 \in \mathbf{C}$.

2.1. **Existence de fonctions elliptiques.**

1) Prouver qu'une fonction entière et elliptique pour le réseau Λ est constante.

2) Montrer que la fonction

$$z \mapsto \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{(z + \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}$$

est bien définie et est une fonction elliptique pour le réseau Λ.

2.2. **Zéros et pôles des fonctions elliptiques.**

Soit f une fonction elliptique pour le réseau Λ, non constante.

3) Montrer qu'il existe un parallélogramme fondamental $\mathcal{P}$ tel que $\partial\mathcal{P}$ ne contient aucun zéro et aucun pôle de f.
Montrer que $\int_{\partial\mathcal{P}} f dz = 0$.

4) Montrer que f possède dans $\mathcal{P}$ autant de zéros que de pôles, comptés avec multiplicité. Montrer que ce nombre est supérieur ou égal 2.

5) On note Z (resp. P) la somme des zéros (resp. pôles) de f dans $\mathcal{P}$ comptés avec multiplicités. Montrer que $Z - P$ appartient au réseau Λ. On pourra intégrer $z\frac{f'}{f}$.

3. Exercice facultatif : Fonctions Γ et ζ de Riemann

3.1. **Fonction Γ.**

Soit Γ la fonction définie sur $U = \{z \in \mathbf{C} \,/\, \Re e(z) > 0\}$ par $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$.

1) Montrer que Γ est holomorphe sur U.

2) Etablir l'identité

$$\forall z \in U, \quad \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)...(z+n-1)} \,.$$

En déduire que Γ se prolonge de façon analytique sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}^-$.

3.2. **Fonction ζ et nombres premiers.**

Soit ζ la fonction holomorphe définie sur $V = \{z \in \mathbf{C} \,/\, \Re e(z) > 1\}$ par

$$\zeta(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z} \,.$$

3) On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Montrer que, pour tout $z \in V$, on a

$$\zeta(z) = \Pi_{p \in \mathcal{P}} (1 - p^{-z})^{-1} \,,$$

avec convergence normale sur les compacts.
En déduire que la fonction ζ'/ζ est holomorphe sur V.

4) Montrer que

$$\forall z \in V, \quad \zeta(z) = \frac{z}{z-1} - z \int_1^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^{z+1}} dt \,.$$

En déduire que ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur U, et que son unique pôle est situé en $z = 1$.

5)* En utilisant la définition de ζ sous forme de produit infini, et les propriétés du logarithme, montrer que

$$\forall (x,y) \in [1, \infty[\times \mathbf{R}, \quad \log|\zeta(x+iy)| = \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{-xk}}{k} \cos(ky \log p) \,,$$

puis que

$$\forall (x,y) \in [1, \infty[\times \mathbf{R}, \quad 3 \log|\zeta(x)| + 4 \log|\zeta(x+iy)| + \log|\zeta(x+2iy)| \geq 0.$$

En déduire que si ζ admet un zéro en $1 + iy$, alors

$$\lim_{x \to 1+} \log|\zeta(x+2iy)| = +\infty.$$

Conclure que ζ n'a pas de zéro dans $\{z \in \mathbf{C} \,/\, \Re e(z) = 1\}$.

6)* Montrer que pour tout $z \in V$

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt \,.$$

En développant l'intégrande en série entière sur $[0,1]$, montrer que ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$.