FIMFA 2009/2010
Mercredi 26 mai 2009

ANALYSE COMPLEXE ET HARMONIQUE

DURÉE 3 HEURES – NOTES DE COURS AUTORISÉES

1. Principe de réflexion pour une fonction harmonique.

Soit $r > 1$ et C la couronne $\{z \in \mathbf{C}, 1 < |z| < r\}$. Le but de cette partie est de démontrer les énoncés suivants :
Une fonction u continue sur $\overline{C}$ et harmonique sur C telle que $u(z) = 0$ pour tout $|z| = 1$ s'étend en une fonction harmonique sur $\{z, 1/r < z < 1\}$.
Une fonction f continue sur $\overline{C}$ et holomorphe sur C telle que $|f(z)| = 1$ pour tout $|z| = 1$ s'étend en une fonction holomorphe sur $\{z, 1/r < z < 1\}$.

La démarque est de prouver des résultats analogues dans le cas plus simple d'un carré, et de s'y ramener par transformation conforme.

1. Soit U le carré $U = \{x+iy, x \in]-1,1[, y \in]-1,1[\}$ et U_+ l'intersection de U avec $\{z, Im(z) > 0\}$. Soit $u : \overline{U_+} \to \mathbf{C}$ un fonction continue qui est harmonique sur U_+ et telle que $u(x) = 0$ pour tout $x \in [-1,1]$. On définit $\widetilde{u} : \overline{U} \to \mathbf{C}$ par

$$\widetilde{u}(z) = \begin{cases} u(z) & \text{si } z \in \overline{U_+} \\ -u(\overline{z}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Montrer que si $x \in]-1,1[$ et $r > 0$ est tel que le disque de centre x de rayon r est contenu dans U, alors $\int_0^{2\pi} \widetilde{u}(x + re^{i\theta})d\theta = 0$.

b) En déduire que $\widetilde{u}$ est harmonique sur U.

c) Montrer que si f est une fonction holomorphe sur U_+ et continue sur $\overline{U_+}$ telle que $Im(f(x)) = 0$ pour tout $x \in [-1,1]$, alors f s'étend en une fonction $\widetilde{f}$ holomorphe sur U. Montrer que $\widetilde{f}(z) = \overline{f(\overline{z})}$ si $Re(z) < 0$.

2. a) Soit u une fonction continue sur $\overline{C}$ et harmonique sur C telle que $u(z) = 0$ pour tout $|z| = 1$. Déduire de la question précédente que la formule $-u(1/\overline{z})$ pour $1/r < z < 1$ définit une extension harmonique de u à $\{z, 1/r < |z| < r\}$.

b) Soit f une fonction continue sur $\overline{C}$ holomorphe sur C telle que $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$. Montrer que la formule $1/\overline{f(1/\overline{z})}$ pour $1/r < z < 1$ définit une extension holomorphe de f à $\{z, 1/r < |z| < r\}$.

2. Représentation conforme d'un ouvert doublement connexe à bord régulier.

Dans le reste du problème, on prouve l'énoncé suivant :
Soit Ω un ouvert connexe Ω de $\mathbf{C}$ dont le complémentaire dans la sph'ere de Riemann a deux composantes connexes, non réduites à un point. Alors Ω est conformément équivalent à une couronne.

On commence par prouver cet énoncé sous une hypothèse de régularité sur le bord, et dans la troisième partie on en déduira le cas général.

On note D le disque unité de $\mathbf{C}$: $D = \{z \in \mathbf{C}, |z| < 1\}$. Dans cette partie on se fixe un ouvert connexe *borné* Ω de $\mathbf{C}$ dont le complémentaire $\mathbf{C} \setminus \Omega$ a deux composantes connexes F_1 (non bornée) et F_2 (bornée), non réduites à un point. L'hypothèse de régularité que l'on suppose est la suivante :

Hypothèse : F_1 et F_2 sont les images respectives de $\mathbf{C} \setminus D$ et $\overline{D}$ par des fonctions f_1 et f_2 holomorphes et injectives au voisinage de $\mathbf{C} \setminus D$ et $\overline{D}$ respectivement.

Si γ_1 et γ_2 sont les images par f_1 et f_2 du cercle unité $\{z, |z| = 1\}$, $\partial\Omega$ est la réunion disjointe de γ_1 et γ_2. On pourra utiliser sans preuve le fait qu'on peut orienter γ_1 et γ_2 de sorte que

– $Ind(z, \gamma_1) = 1$ si $z \in \Omega \cup F_2$ et $Ind(z, \gamma_1) = 0$ si $z \in F_1 \setminus \gamma_1$.
– $Ind(z, \gamma_2) = -1$ si $z \in F_2 \setminus \gamma_2$ et $Ind(z, \gamma_2) = 0$ si $z \in F_1 \cup \Omega$.

En particulier, on remarquera que $Ind(z, \gamma_1) + Ind(z, \gamma_2) = 1$ si $z \in \Omega$ et 0 si $z \notin \overline{\Omega}$.

On admettra que le problème de Dirichlet peut être résolu sur Ω. Il existe donc une fonction continue $u : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}$ et harmonique sur Ω telle que $u(z) = 1$ sur le lacet γ_1 et $u(z) = 0$ sur le lacet γ_2.

1. Montrer que u s'étend en une fonction harmonique sur un voisinage de $\overline{\Omega}$ (on pourra utiliser la première partie).

2. a) Soit g une fonction holomorphe au voisinage de Ω. Montrer que $\int_{\gamma_1} g + \int_{\gamma_2} g = 0$ (on pourra commencer par traiter le cas d'une fraction rationnelle).

b) Soit γ un lacet contenu dans Ω. Montrer qu'il existe un entier relatif n tel que $\int_\gamma g = n \int_{\gamma_1} g$ pour toute fonction g holomorphe au voisinage de $\overline{\Omega}$ (si ω appartient à l'intérieur de F_2, la composante connexe bornée de $\mathbf{C} \setminus \Omega$, on pourra prendre $n = Ind(\omega, \gamma)$).

On pose $g = 2\partial u/\partial z$ et $\alpha = 1/2i\pi \int_{\gamma_1} g$, et on garde ces notations jusqu'á la fin de cette partie.

3. On prouve dans cette question que g n'admet pas de primitive holomorphe sur Ω.

a) Montrer que g est holomorphe au voisinage de Ω.

b) On raisonne par l'absurde. Supposons que g admet une primitive holomorphe G sur Ω. Montrer que $Re(G) - u$ est constante.

c) Montrer que G s'étend en une fonction continue sur $\overline{\Omega}$.

d) Soit $A = G(\Omega)$. Montrer que A est un ouvert borné de $\mathbf{C}$ dont le bord est contenu dans deux droites verticales. Conclure.

5. a) Montrer que $Im(\alpha) = 0$.

b) Montrer que $\alpha \neq 0$ (Indication : on pourra utiliser la question 3 pour montrer que sinon, g admet une primitive holomorphe).

Soit $z_0 \in \Omega$ fixé. Pour tout $z \in \Omega$ soit γ_z un chemin C^1 par morceaux dans Ω qui relie z_0 à z. Posons $F(z) = exp(1/\alpha \int_{\gamma_z} g)$. Dans le reste de cette partie on prouve que F est une bijection holomorphe entre Ω et une couronne.

6. a) Montrer que $F(z)$ ne dépend pas du choix de γ_z, que la fonction F est holomorphe sur Ω et que $F'(z) = F(z)g(z)/\alpha$.

b) Montrer que $|F(z)| = exp((u(z) - u(z_0))/\alpha)$, puis que F s'étend en une fonction holomorphe au voisinage de $\overline{\Omega}$.

Soit $r = exp(-u(z_0)/\alpha)$ et $R = exp((1 - u(z_0))/\alpha)$.

7. a) Si $|\omega| \neq R$, on considère $N_1(\omega) = 1/2i\pi \int_{\gamma_1} \frac{F'(z)}{F(z)-\omega} dz$. Montrer que N_1 est une fonction continue de ω, à valeurs entières. Calculer $N_1(0)$ et $\lim_{|\omega|\to\infty} N_1(\omega)$. En déduire que $N_1(\omega) = 1_{|\omega|<R}$ pour tout $|\omega| \neq R$.

De même, si pour $|\omega| \neq r$, $N_2(\omega) = 1/2i\pi \int_{\gamma_2} \frac{F'(z)}{F(z)-\omega} dz$, montrer que $N_2(\omega) = -1_{|\omega|<r}$.

b) Soit $|\omega| \notin \{r, R\}$. Montrer que $N_1(\omega) + N_2(\omega)$ est égal au nombre de solutions de $F(z) = \omega$ dans Ω (on pourra étudier les pôles de $F'/(F - \omega)$ dans Ω et utiliser la question 2).

c) En déduire que $r < R$, et que F est une bijection holomorphe entre Ω et la couronne $\{z, r < |z| < R\}$.

3. Représentation conforme d'un ouvert doublement connexe général.

Soit Ω_0 un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ dont le complémentaire dans la sphère de Riemann a deux composantes connexes. On suppose aussi que ces composantes ne sont pas réduites à un point.

On pourra utiliser la caractérisation suivante de la simple connexité : un ouvert connexe de la sphère de Riemann est simplement connexe si et seulement si son complémentaire dans la sphère de Riemann est connexe.

1. Montrer que Ω_0 est conformément équivalent à un domaine Ω_1 borné dont le complémentaire a deux composantes connexes, non réduites à un point et tel que la composante connexe non bornée est $\{z, |z| \geq 1\}$ (on pourra utiliser le théorème de représentation de Riemann).

2. Montrer que Ω_1 est conformément équivalent à un domaine Ω_2 qui vérifie les hypothèses de la deuxième partie avec F_2 le disque unité fermé.

3. En déduire que Ω est conformément équivalent à une couronne.