FIMFA 2010/2011
Mercredi 25 mai 2011

ANALYSE COMPLEXE ET HARMONIQUE
DURÉE 3 HEURES – DOCUMENTS NON AUTORISÉS

1. Problème de Dirichlet sur un domaine extérieur

On veut étudier l'écoulement irrotationel d'un fluide parfait incompressible autour d'un obstacle constitué par un cylindre de longueur infinie et de rayon r. On suppose que l'axe du cylindre est dirigé par e_3, le troisième vecteur de la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbf{R}^3$. On suppose en outre que quand $x_1^2+x_2^2 \to \infty$, le champ de vitesses $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbf{R}^3$ devient unidirectionnel. Précisément, on suppose qu'il existe $v_0 \in \mathbf{R}$ tel que $v(x) \to v_0 e_1$ quand $x_1^2 + x_2^2 \to \infty$. Par invariance par translation selon e_3, il vient $v_3 = 0$. On est donc ramené à l'étude d'un écoulement plan.

On cherche donc à déterminer deux fonctions v_1, v_2 à valeurs réelles et définies sur la fermeture du domaine $\Omega = \{x_1^2 + x_2^2 > r^2\}$. Afin que les contraintes liées à la physique aient un sens, on suppose que v_1 et v_2 sont différentiables sur Ω et continues sur $\overline{\Omega}$. Les contraintes d'incompressibilité et d'irrotationalité du fluide s'écrivent alors

$$\text{(E)} \qquad \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 = 0 \quad \text{et} \quad \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega\,.$$

On rappelle que $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. La condition de non pénétration au niveau de l'obstacle s'écrit alors comme la condition au bord suivante

$$\text{(CB)} \qquad x_1 v_1 + x_2 v_2 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\,.$$

(1) On veut éliminer la contribution de l'écoulement à l'infini *i.e.* se ramener au cas où $v_0 = 0$. Montrer que c'est possible quitte à modifier la condition au bord. On note (CB') la nouvelle condition au bord et w la solution du nouveau problème (E)-(CB').

(2) On suppose qu'il existe une fonction φ sur Ω telle que

$$w = (\partial_1\varphi, \partial_2\varphi).$$

 (a) Montrer qu'on a nécessairement $\Delta\varphi = 0$.
 (b) Ecrire la condition de bord et la condition à l'infini sur φ.

(3) On suppose aussi qu'il existe une fonction holomorphe f sur Ω telle que $\varphi = \Re e(f)$.
 (a) Est-on assuré qu'une telle fonction f existe ?
 (b) Montrer que la condition de bord sur $\partial\Omega$ et la condition à l'infini peuvent s'écrire respectivement $\Im m\, f = -v_0 \Im m\, z$ et $f'(z) \to 0$ quand $z \to \infty$.

(4) Soit $h : z \mapsto r^2/z$ la transformation homographique qui envoie $\Omega \cup \{\infty\}$ sur le disque $B(0, r)$.
 (a) Montrer que $g = f \circ h$ est une fonction holomorphe sur $B(0, r)$, continue sur $\bar{B}(0, r)$, telle que $\Im m\, g = v_0 \Im m\, z$ sur $\partial B(0, r)$.
 (b) En déduire une formule explicite pour g.

(5) Conclure.

Pour $x \in \mathbf{R}_*^+$, on note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x.

Le but de ce problème est de montrer que

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \text{ quand } x \to \infty$$

par des techniques d'analyse complexe.

2.1. Quelques propriétés de la fonction ζ de Riemann.

On définit sur $V = \{z \in \mathbf{C} \,/\, \Re e(z) > 1\}$ les fonctions ζ et Φ par

$$\zeta(z) = \sum_{n \geq 1} n^{-z}, \qquad \text{et } \Phi(z) = \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{\ln p}{p^z}\,.$$

où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.

(1) (a) Montrer que, pour tout $z \in V$, le produit infini suivant

$$\Pi(z) = \Pi_{p \in \mathcal{P}}(1 - p^{-z})^{-1}\,,$$

est bien défini, avec convergence normale sur les compacts de V.

(b) Montrer que $\zeta(z)$ coïncide avec $\Pi(z)$; en particulier, remarquer que ζ ne s'annule pas sur V. *Indication :* on pourra utiliser $\sum_{n \geq 0} y^n = (1-y)^{-1}$.

(c) En déduire que la fonction ζ'/ζ est holomorphe sur V.

(2) (a) Montrer que

$$\forall z \in V, \quad \zeta(z) = \frac{z}{z-1} - z \int_1^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^{z+1}} dt\,.$$

(b) En déduire que ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur $U = \{z \in \mathbf{C} \,/\, \Re e(z) > 0\}$, et que son unique pôle est situé en $z = 1$.

(3) (a) En utilisant la définition de ζ sous forme de produit infini, et les propriétés du logarithme, montrer que

$$\forall (x,y) \in]1, \infty[\times \mathbf{R}, \quad \log |\zeta(x+iy)| = \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{-xk}}{k} \cos(ky \log p)\,.$$

(b) En déduire que

$$\forall (x,y) \in]1, \infty[\times \mathbf{R}, \quad 3 \log |\zeta(x)| + 4 \log |\zeta(x+iy)| + \log |\zeta(x+2iy)| \geq 0.$$

(c) Trouver des équivalents de $\log |\zeta(x)|$ et $\log |\zeta(x+iy)|$ quand $x \to 1+$. On pourra pour cela utiliser la question (2).

(d) En déduire que si ζ admet un zéro en $1 + iy$, alors

$$\lim_{x \to 1+} \log |\zeta(x+2iy)| = +\infty.$$

(e) Conclure que ζ n'a pas de zéro dans $\{z \in \mathbf{C} \,/\, \Re e(z) = 1\}$.

(4) (a) Montrer que

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \Phi(z) + \sum_{p \in \mathcal{P}} h_p(z)$$

pour une série de fonctions $\sum_{p \in \mathcal{P}} h_p$ qui converge normalement sur $\{z \in \mathbf{C} \,/\, \Re e(z) > \frac{1}{2} + \delta\}$ pour tout $\delta > 0$.

(b) En déduire que Φ est méromorphe sur $\{z \in \mathbf{C} \,/\, \Re e(z) > \frac{1}{2}\}$, et que la fonction

$$h(z) = \Phi(z) - \frac{1}{z-1}$$

(également méromorphe sur $\{z \in \mathbf{C} \,/\, \Re e(z) > \frac{1}{2}\}$) n'a pas de pôle sur $\{z \in \mathbf{C} \,/\, \Re e(z) \geq 1\}$.

2.2. **Un lemme sur la transformée de Laplace.**

Soit f une fonction bornée et continue par morceaux sur $\mathbf{R}^+$. On suppose que la fonction

$$g(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}dt$$

définie sur le demi-plan U se prolonge en une fonction méromorphe sur un voisinage de $\bar{U}$, encore notée g. On suppose en outre que g n'a pas de pôle sur $\bar{U}$.

On définit la fonction entière

$$g_T(z) = \int_0^T f(t)e^{-zt}dt\,.$$

Le but de cette partie est de montrer que la limite $\int_0^T f(t)dt$ quand $T \to \infty$ existe et que

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T f(t)dt = g(0).$$

(1) Soit Γ le chemin composé de l'arc du cercle $|z| = R$ contenu dans le demi-plan $\{z \in \mathbf{C} \,/\, \Re e(z) \geq -\delta\}$, et de la corde $\Re e(z) = -\delta$ de ce cercle, le tout parcouru dans le sens trigonométrique. En outre, on choisit δ de sorte que Γ soit tracé dans un ouvert sur lequel g est analytique. Montrer que

$$g(0) - g_T(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma (g(z) - g_T(z))e^{Tz} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z}\,.$$

(2) On note Γ^+ le demi-cercle $|z| = R$ situé dans le demi-plan $\bar{U}$, et Γ^- l'autre partie du chemin Γ.

(a) Montrer que si $|z| = R$, alors

$$\left| e^{Tz} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z} \right| = e^{T\,\Re e(z)} 2\,\Re e(z).$$

(b) Obtenir une estimation de $|g(z) - g_T(z)|$ en fonction de $\|f\|_\infty$. La combiner au résultat de la question précédente pour obtenir

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma^+} (g(z) - g_T(z))e^{Tz} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z} \right| \leq \frac{\|f\|_\infty}{R}\,.$$

(c) En utilisant notamment la formule de Cauchy, montrer que

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma^-} g_T(z)e^{Tz} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z} \right| \leq \frac{\|f\|_\infty}{R}\,.$$

(3) (a) Montrer que

$$\lim_{T\to+\infty} \int_{\Gamma^-} g(z)e^{Tz} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z} = 0\,.$$

(b) Conclure.

2.3. **La preuve de Newman.**

(1) Soit φ la fonction définie sur $\mathbf{R}^+$ par

$$\varphi(x) = \sum_{\substack{p\leq x\\ p\in\mathcal{P}}} \ln p.$$

(a) Montrer

$$\prod_{\substack{n<p\leq 2n\\ p\in\mathcal{P}}} p \leq C_{2n}^n\,,$$

et en déduire que la fonction φ satisfait

$$\varphi(2x) - \varphi(x) \leq 2Cx\,.$$

(b) En déduire que la fonction $x \mapsto \frac{\varphi(x)}{x}$ est bornée sur $\mathbf{R}^+$.

(2) On pose
$$f(t) = \varphi(e^t)e^{-t} - 1.$$

(a) Montrer que la transformée de Laplace g de f est analytique sur le demi-plan U, et que pour tout $z \in U$,
$$g(z)= \int_1^{+\infty} \frac{\varphi(x) - x}{x^{z+2}} dx\,.$$

(b) En décomposant $\mathbf{R}^+$ en intervalles sur lesquels φ est constante, montrer que pour tout $z \in V$
$$\int_1^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^{z+1}} dx = \frac{\Phi(z)}{z}\,.$$

(c) En utilisant les résultats montrés dans les deux premières parties du problème, conclure que
$$\lim_{T\to\infty} \int_1^T \frac{\varphi(x) - x}{x^2} dx$$
existe.

(3) (a) Montrer que pour tout $\lambda > 1$ et tout $\mu < 1$, les ensembles
$$\{x \,/\, \varphi(x) \geq \lambda x\} \quad \text{et} \quad \{x \,/\, \varphi(x) \leq \mu x\}$$
sont bornés. *Indication :* on pourra étudier les intégrales
$$\int_x^{\lambda x} \frac{\varphi(t) - t}{t^2} dt \text{ et } \int_{\mu x}^{x} \frac{\varphi(t) - t}{t^2} dt.$$

(b) En déduire que
$$\varphi(x) \sim x \quad \text{quand } x \to +\infty\,.$$

(4) (a) Montrer que
$$\varphi(x) \leq \pi(x) \ln x$$
puis que pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\varphi(x) \geq (1 - \varepsilon) \ln x \left(\pi(x) - \pi(x^{1-\varepsilon})\right)\,.$$

(b) En utilisant les questions précédentes, montrer que le rapport
$$\frac{\pi(x^{1-\varepsilon})}{\pi(x)}$$
tend vers 0 quand $x \to \infty$.

(c) Conclure qu'on a l'équivalence voulue sur $\pi(x)$.