Ecole Normale Supérieure **2006-2007**
Cours d'Analyse Fonctionnelle et EDP Stéphane Mischler
Première année de Master FIMFA

Examen du Lundi 4 juin 2007 de 15h à 18h

Les notes de cours et de travaux dirigés peuvent être consultées

Exercice 1. Calculer $\mathcal{F}(\delta_0)$ et en déduire $\mathcal{F}(1)$. Montrer que $\mathcal{F}(\mathrm{Vp}(1/x))$ est impaire. Montrer que $x\,\mathrm{Vp}(1/x) = 1$ et en déduire $\mathcal{F}(\mathrm{Vp}(1/x))$.

Exercice 2. Soit E un espace de Banach. On dit que $S = (S_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe d'opérateurs linéaires continus de E si

i) $S_t : E \to E$ est un opérateur linéaire continu $\forall\, t \geq 0$;

ii) $S_0 = Id_E$, $S_{s+t} = S_s \circ S_t$;

iii) $\forall x \in E$, $\lim\limits_{t\to 0^+} S_t\, x = x$.

1) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ et $M > 0$ tels que $\|S_t\| \leq M, \ \forall t \in [0, \delta]$.

2) En déduire qu'il existe $\omega \in \mathbb{R}$, tel que $\|S_t\| \leq M\, e^{\omega\, t}, \ \forall t \geq 0$.

Problème 3. (Théorème de Tykhonov et applications)

On rappelle le théorème (de Brouwer) suivant. Soit C un convexe fermé borné non vide de $\mathbb{R}^N$ et soit $\psi : C \to C$ une fonction continue. Alors ψ admet un point fixe: il existe $\bar x \in C$ tel que $\psi(\bar x) = \bar x$.

1) - Soit E un espace de Banach réflexif séparable, soit C un convexe fermé borné non vide de E et soit $\varphi : C \to C$ une fonction continue au sens de la convergence faible de E. On souhaite montrer (théorème de Tykhonov) que φ possède un point fixe.

a) Montrer qu'il existe (f_n) une suite dense de $B_{E'}$. On définit

$$d : C \times C \to \mathbb{R}_+, \quad d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |\langle f_n, y - x\rangle|.$$

Pourquoi est-ce une distance? Quelle est la topologie induite par d? On désigne par $B(x,r)$ la boule de centre x et de rayon r associée à d. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille finie $(e_i)_{i\in I}$ telle que $C \subset \cup_{i\in I} B(e_i, \varepsilon/2)$.

b) - Soit C_ε l'enveloppe convexe des $(e_i)_{i\in I}$ et soit φ_ε la fonction définie par

$$\varphi_\varepsilon(x) := \sum_{i\in I} \theta_i(x)\, e_i \quad \text{où} \quad \theta_i(x) := \frac{q_i(x)}{\sum_{j\in I} q_j(x)}, \quad q_i(x) := \max(\varepsilon - d(\varphi(x), e_i), 0).$$

Montrer qu'il existe $\bar x_\varepsilon \in C_\varepsilon$ tel que $\varphi_\varepsilon(\bar x_\varepsilon) = \bar x_\varepsilon$.

c) - En remarquant que $d(\varphi(x), e_i) \leq \varepsilon$ lorsque $\theta_i \neq 0$, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in E$ on a $|\langle f_k, \varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)\rangle| \leq 2^k\, \varepsilon$. En déduire qu'il existe $\bar x \in C$ tel que $\varphi(\bar x) = \bar x$.

2) - Dans cette question Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $|f(s)| \le C\,(1 + |s|^{p/q})\ \forall s \in \mathbb{R}$, avec $C, p, q \in [1, \infty)$. Montrer que $u \mapsto f(u)$ est continue de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.

b) Soit $C := \{v \in H^1_0(\Omega),\ \|v\|_{H^1} \le M\}$ pour $M > 0$ à fixé. On suppose de plus que $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. Soit φ la fonction définie par $u = \varphi(v)$ est la solution de

$$-\Delta u = f(v) \quad \Omega, \qquad u = 0 \quad \partial\Omega.$$

b1) - Montrer que $\varphi : H^1_0(\Omega) \to H^1_0(\Omega)$ (et on précisera le sens de la solution définie ci-dessus) et que φ est continue au sens de la convergence faible de $H^1_0(\Omega)$.

b2) - Montrer qu'il existe M tel que $\varphi : C \to C$.

b3) - En déduire qu'il existe $u \in H^1_0(\Omega)$ solution de l'équation non-linéaire $-\Delta u = f(u)$ dans Ω.

b4) - On suppose que f est décroissante. Montrer l'unicité de la solution obtenue ci-dessus.

3) Dans cette question on suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ avec $N \ge 3$.

a) Soit f une fonction continue telle que $|f(s)| \le C\,(1 + |s|^k)\ \forall s \in \mathbb{R}$, avec $k \in [0, (N+2)/(N-2)]$. Montrer que la fonctionnelle $E : H^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$E(v) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx - \int_\Omega F(v)\,dx, \quad F(t) = \int_0^t f(s)\,ds,$$

est bien définie. Montrer que E est G-dérivable et calculer $\langle E'(u), v\rangle$ pour tout $u, v \in H^1_0(\Omega)$.

b) On suppose de plus ici que $k \le 1$. Montrer que E possède un minimum. Retrouver le résultat de la question 2b3).

c) On suppose de plus maintenant que f est décroissante. Montrer que E est convexe, que E possède un minimum, et que celui-ci est unique. Retrouver le résultat de la question 2b4).

d) Que dire dans le cas $f = f_1 + f_2$ avec f_1 continue décroissante telle que $k_1 \le (N+2)/(N-2)$ et f_2 continue telle que $k_2 < (N+2)/(N-2)$?

Problème 4 (Compacité par compensation). Dans tout cet exercice, Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$.

1) Soit $u^\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}^p$ la suite définie par

$$u^\varepsilon(x) = \chi(x_1/\varepsilon)\,\lambda + (1 - \chi(x_1/\varepsilon))\,\mu$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^p$, x_1 est la première coordonnées de x et où $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction périodique de période 1 telle que

$$\chi(t) = 1 \quad \text{si} \quad 0 < t < \theta, \qquad \chi(t) = 0 \quad \text{si} \quad \theta < t < 1, \qquad 0 < \theta < 1.$$

Quelle est la limite de u^ε dans $(L^2(\Omega))^p$ faible? Si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $|f(\mu)| \le C\,(1 + |\mu|)$, quelle est la limite de $f(u^\varepsilon)$ dans $L^2(\Omega)$ faible?

2) Pour f fixée comme ci-dessus, en déduire que si l'application $u \mapsto f(u)$ est séquentiellement continue de $(L^2(\Omega))^p$ faible dans $L^2(\Omega)$ faible alors f est affine. De même, en déduire que si l'application

$$u \mapsto \int_\Omega f(u)\,dx$$

est séquentiellement s.c.i. de $(L^2(\Omega))^p$ faible dans $\mathbb{R}$ alors f est convexe.

3) On désigne par $\cdot$ le produit scalaire de $\mathbb{R}^2$. Soient (v_ε) et (w_ε) deux suites de $(L^2(\Omega))^2$ telles que

$$v_\varepsilon \rightharpoonup v \quad (L^2(\Omega))^2 \text{ faible}, \qquad w_\varepsilon \rightharpoonup v \quad (L^2(\Omega))^2 \text{ faible}.$$

a) - On suppose de plus que (v_ε) et (w_ε) sont bornées dans $(L^\infty(\Omega))^2$. Montrer que l'on n'a pas en général $v_\varepsilon \cdot w_\varepsilon \rightharpoonup v \cdot w$ au sens $\sigma(L^1, L^\infty)$.

b) - On suppose de plus que (v_ε) est bornée dans $(H^1(\Omega))^2$. Montrer que l'on a alors $v_\varepsilon \cdot w_\varepsilon \rightharpoonup v \cdot w$ au sens $\sigma(L^1, L^\infty)$.

c) - On suppose maintenant que de plus

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} v_\varepsilon = \partial_1 v_{\varepsilon,1} + \partial_2 v_{\varepsilon,2} \rightharpoonup \operatorname{div} v \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \text{ faible}, \\ &w_\varepsilon = \nabla z_\varepsilon, \quad \text{avec} \quad z_\varepsilon \to z \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Montrer que $(v_\varepsilon \cdot w_\varepsilon)$ est bornée dans $L^1(\Omega)$ et $v_\varepsilon \cdot w_\varepsilon \rightharpoonup v \cdot w$ au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$. (Ind. On pensera à effectuer une intégration par parties).

4) Pour $a \in H^1(\Omega)$ on définit

$$\det Da := \frac{\partial a_1}{\partial x_1}\frac{\partial a_2}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial a_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial a_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Soit (y^ε) une suite de $(H^1(\Omega))^2$ telle que $y^\varepsilon \rightharpoonup y$ dans $H^1(\Omega)^2$. Déduire de la question 3) que

$$\det Dy^\varepsilon \rightharpoonup \det Dy \qquad \mathcal{D}'(\Omega).$$

5) Montrer que si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe, régulière (disons de classe C^2) et telle que $|h(t)| \leq C(1 + |t|)$ on a pour toute suite (y_ε) de $(W^{1,4}(\Omega))^2$ telle que $y_\varepsilon \rightharpoonup y$ dans $(W^{1,4}(\Omega))^2$ faible

$$\int_\Omega h(\det Dy)\, dx \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega h(\det Dy_\varepsilon)\, dx.$$

6) - (Questions subsidiaires*) En quoi le résultat 3c) est-il surprenant en comparaison avec le premier résultat énoncé dans la question 2)? Pour h convexe et λ matrice 2×2, la fonction $\lambda \mapsto \det \lambda$ est-elle affine? la fonction $\lambda \mapsto f(\lambda) := h(\det \lambda)$ est-elle convexe? Comparer les résultats de la question 2) avec ceux des questions 4) et 5).