Ecole Normale Supérieure **2007-2008**
Cours d'Analyse Fonctionnelle et EDP Stéphane Mischler
Première année de Master FIMFA

Examen du Mardi 10 juin 2008 de 9h30 à 12h30

Exercice 1 (Opérateur elliptique). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, un ouvert borné, $b \in C^1(\bar\Omega; \mathbb{R}^N)$ un champ de vecteur et $c \in L^\infty(\Omega)$ une fonction. On introduit l'opérateur

$$L\,u := -\Delta u + \operatorname{div}(b\,u) + c\,u.$$

a) - Montrer que si on prend $\mu = \mu_0 > 0$ suffisamment grand, alors pour tout $f \in H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))'$, il existe une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ à l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \qquad L\,u + \mu\,u = f \quad \text{dans} \quad \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega,$$

écrite sous forme variationnelle

$$(2) \qquad \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega u\,b \cdot \nabla v + \int_\Omega (c+\mu)\,u\,v = \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

b) - On note $\varphi : H_0^1 \to H^{-1}$ l'application qui à $u \in H_0^1$ associe $\varphi_u \in H^{-1}$ définie par

$$\varphi_u : H_0^1 \to \mathbb{R}, \quad v \in H_0^1 \mapsto \varphi_u(v) = \int_\Omega v\,u.$$

On note $T_{\mu_0} : H_0^1 \to H_0^1$ l'application qui à $u_1 \in H_0^1$ associe la solution $u_2 \in H_0^1$ de (2) avec second membre φ_{u_1}. Montrer que T_{μ_0} est un opérateur compact.

c) - On suppose $\mu = 0$ et $c \geq 0$. Soit $0 \leq f \in H^{-1}$ au sens où $\langle f, v\rangle \geq 0$ pour tout $0 \leq v \in H_0^1$. Le but de cette question est de démontrer que s'il existe une solution $u \in H_0^1$ à l'équation (1) associée à f, alors nécessairement $u \geq 0$, on dit que L satisfait un Principe du Maximum faible.

c1) - Démontrer que L satisfait le Principe du Maximum faible lorsque $c \geq 0$ et $b \equiv 0$ (Ind. Penser à prendre $v = u^-$).

Dans les questions c2), c3) et c4) on fait l'hypothèse que $b \not\equiv 0$ et on considère $u \in H_0^1$ satisfaisant (2). On suppose, par l'absurde, que $\min_\Omega u < 0$ (au sens de l'infimum essentiel).

c2) - Choisissant k tel que $\min_\Omega u < k < 0$, montrer que $v = (u-k)^-$ satisfait

$$\|\nabla v\|_{L^2}^2 \leq \|b\|_{L^\infty}\,\|v\,\mathbf{1}_K\|_{L^2}\,\|\nabla v\|_{L^2}, \qquad K := \operatorname{supp} \nabla v.$$

c3) - En déduire qu'il existe $C = C(\Omega)$ et $\theta = \theta(N) > 0$ tels que

$$C\,\|v\|_{L^{2^*}} \leq \|b\|_{L^\infty}\,\|v\|_{L^{2^*}}\,\operatorname{mes}(K)^\theta.$$

c4) - Démontrer qu'il existe une constante $A > 0$ (indépendante de k) telle que

$$\forall\, k > \min_\Omega u \qquad \operatorname{mes}(\operatorname{supp}\nabla u \cap \{u < k\}) \geq A,$$

et arriver à une contradiction.

d) - On suppose $c \geq 0$. Pour $f \in H^{-1}$, montrer que $u \in H_0^1$ est solution de (1) pour $\mu = 0$ si, et seulement si, u satisfait

$$u - \mu_0 \, T_{\mu_0} \, u = (L + \mu_0)^{-1} \, f.$$

Montrer que $\ker(Id - \mu_0 \, T_{\mu_0}) = 0$. En déduire que pour $f \in H^{-1}$ il existe une unique solution $u \in H_0^1$ à l'équation (1).

Exercice 2. Distance de Monge-Kantorovich. Soit (Q, d) un espace métrique compact et $P(Q)$ l'espace des mesures de probabilités sur Q: $\mu \in P(Q)$ si $\mu \in M^1(Q)$, $\mu \geq 0$ et $\langle \mu, 1 \rangle = 1$. L'objectif de cet exercice est de construire une distance δ sur $P(Q)$, appellée distance de Monge-Kantorovich. On peut montrer, ce que l'on ne démontrera pas ici, que cette distance est topologiquement équivalente à la topologie $*\sigma(M^1(Q), C(Q))$.

a) - Pour $\mu, \nu \in P(Q)$ on définit

$$\Pi_{\mu,\nu} := \{\pi \in P(Q^2); \; \langle \pi, \varphi \otimes 1 \rangle = \langle \mu, \varphi \rangle, \; \langle \pi, 1 \otimes \varphi \rangle = \langle \nu, \varphi \rangle \; \forall \, \varphi \in C(Q)\}.$$

Montrer que $\Pi_{\mu,\nu}$ est non vide, convexe et fermé (au sens de la topologie faible $* \; \sigma(P(Q^2), C(Q^2))$).

b) - On définit l'application $I : \Pi_{\mu,\nu} \to \mathbb{R}_+$ par

$$I[\pi] := \langle \pi, d(.,.) \rangle = \int_{Q^2} d(x, y) \, \pi(dx, dy).$$

Montrer qu'il existe $\bar{\pi} \in \Pi_{\mu,\nu}$ tel que

$$I[\bar{\pi}] = \min_{\pi \in \Pi_{\mu,\nu}} I[\pi] =: \delta(\mu, \nu).$$

c) - Si $\mu = \nu$ on définit $\pi : C(Q) \otimes C(Q) \to \mathbb{R}$ par $\pi(\varphi \otimes \psi) = \langle \mu, \varphi \, \psi \rangle$ pour tout $\varphi, \, \psi \in C(Q)$ (On rappelle que $C(Q) \otimes C(Q)$ désigne l'espace vectoriel des combinaisons linéaires de fonctions de la forme $(\varphi \otimes \psi)(x, y) = \varphi(x) \, \psi(y)$ pour $\varphi, \, \psi \in C(Q)$). Pourquoi $C(Q) \otimes C(Q)$ est-il dense dans $C(Q^2)$? Montrer qu'il existe $\bar{\pi} \in P(Q^2)$ unique tel que $\bar{\pi}|_{C(Q) \otimes C(Q)} = \pi$ et que $\operatorname{supp} \bar{\pi} \subset \Delta := \{(x, y) \in Q^2, \; y = x\}$. Démontrer enfin que $\delta(\mu, \mu) = 0$.

d) - Soient $\mu_i \in P(Q)$, $i = 1, 2, 3$ et $\pi_{12} \in \Pi_{\mu_1,\mu_2}$, $\pi_{23} \in \Pi_{\mu_2,\mu_3}$. On définit

$$G := \{\varphi \in C(Q^3); \; \varphi(x, y, z) = \varphi_{12}(x, y) + \varphi_{23}(y, z), \; \varphi_{ij} \in C(Q^2)\},$$

et $\pi : G \to \mathbb{R}$ par

$$\langle \pi, \varphi_{12} + \varphi_{23} \rangle = \langle \pi_{12}, \varphi_{12} \rangle + \langle \pi_{23}, \varphi_{23} \rangle.$$

Montrer qu'il existe $\bar{\pi} \in P(Q^3)$ tel que $\bar{\pi}|_G = \pi$. On définit π_{13} en posant

$$\langle \pi_{13}, \varphi \rangle := \int_{Q^3} \varphi(x, z) \, \bar{\pi}(dx, dy, dz) \qquad \forall \, \varphi \in C(Q^2).$$

Montrer que $\pi_{13} \in \Pi_{\mu_1,\mu_3}$, que

$$\delta(\mu_1, \mu_3) \leq \int_{Q^3} d(x, z)| \, \bar{\pi}(dx, dy, dz),$$

puis que $\delta(\mu_1, \mu_2) \leq \delta(\mu_1, \mu_2) + \delta(\mu_2, \mu_3)$.

Problème 3. Soit E un evn et soit $\varphi : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction. On définit l'épigraphe $\operatorname{epi}(\varphi)$ de φ par

$$\operatorname{epi}(\varphi) := \{(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R}; \; \lambda \geq \varphi(x)\} \subset E \times \mathbb{R},$$

et le domaine $D(\varphi)$ de φ par

$$D(\varphi) := \{x \in E;\ \varphi(x) < \infty\}.$$

On dit que φ est propre si $\varphi \not\equiv +\infty$ et que φ est semi-continue inférieurement (sci) si $x_n \to x$ dans E implique $\varphi(x) \leq \liminf \varphi(x_n)$ dans $\mathbb{R}$. On remarque que φ est convexe sci et propre si, et seulement si, $epi(\varphi)$ est un convexe fermé non vide de $E \times \mathbb{R}$.
On définit la tranformée de Legendre (ou fonction conjuguée) φ^* de φ en posant pour tout $f \in E'$

$$\varphi^*(f) = \sup_{x \in E} [\langle f, x\rangle - \varphi(x)],$$

et la fonction biconjuguée φ^{**} de φ en posant pour tout $x \in E$

$$\varphi^{**}(x) = \sup_{f \in E'} [\langle f, x\rangle - \varphi^*(f)].$$

Partie 1. Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et sci. Le but de cette partie est de démontrer le **théorème de Fenchel-Moreau:** $\varphi^{**} = \varphi$.

a) - Montrer qu'il existe $f_0 \in E'$, $\ell_0 \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi(x) \geq \langle f_0, x\rangle + \ell_0$ pour tout $x \in E$. [Ind. On pourra appliquer Hahn-Banach dans $E \times \mathbb{R}$ en remarquant que $F \in (E \times \mathbb{R})' \backslash \{0\}$ si, et seulement si, il existe $f \in E'$, $k \in \mathbb{R}$, $(f, k) \neq (0, 0)$ tels que $\langle F, (x, \lambda)\rangle = \langle f, x\rangle + k\,\lambda$ pour tout $(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R}$].

b) - En déduire (en trois lignes) que la fonction $\varphi^* : E' \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est convexe, sci et propre.

c) - Montrer que $\varphi(x) \geq \varphi^{**}(x)$ pour tout $x \in E$.

d) - En supposant $\varphi \not\equiv \varphi^{**}$, montrer qu'il existe $x_0 \in E$, $f_0 \in E'$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall\, x \in E \qquad \langle -f_0, x_0\rangle - \varphi^{**}(x_0) > -\alpha \geq \langle -f_0, x\rangle - \varphi(x),$$

et arriver à une contradiction. Conclure.

Partie 2. Quelques questions "élémentaires". Dans cette partie $E = \mathbb{R}$.

a) - Soit $\psi_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon}\,|x|^2$. Montrer que $\psi_\varepsilon^*(f) = \frac{\varepsilon}{2}|f|^2$ pour tout $f \in \mathbb{R}$.

b) - Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que φ est continue.

c) - Soit $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que si $|j(s)| \leq A\,(1 + |s|)$ alors $D(j^*) \subset [-A, A]$. Montrer que si $j(s) \to +\infty$ lorsque $s \to \pm\infty$ alors $0 \in D(j^*)$.

d) - Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe, satisfaisant $\phi(s) \sim C\,s^2$ lorsque $s \to \pm\infty$. Montrer qu'il existe $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \qquad \phi^*(t) = t\,\xi(t) - \phi(\xi(t)).$$

e) - Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. On définit

$$(\varphi \Box \psi_\varepsilon)(z) = \inf_{x+y=z} [\varphi(x) + \psi_\varepsilon(y)].$$

Montrer que $\varphi \Box \psi_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi \Box \psi_\varepsilon$ est convexe, $\varphi \Box \psi_\varepsilon$ est continue et $(\varphi \Box \psi_\varepsilon)^* = \varphi^* + \psi_\varepsilon^*$. [Indication. Utiliser l'expression exacte de ψ_ε uniquement pour montrer que $(\varphi \Box \psi_\varepsilon)(z) > -\infty$ pour tout $z \in \mathbb{R}$]. Montrer enfin que $(\varphi \Box \psi_\varepsilon)^* \searrow \varphi^*$ et $\varphi \Box \psi_\varepsilon \nearrow \varphi$.

Partie 3. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe continue satisfaisant $|j(s)| \leq C\,(1 + |s|)\ \forall\, s \in \mathbb{R}$, on note j^* sa transformée de Legendre. On définit pour tout $u \in L^1(\Omega)$

$$J(u) := \int_\Omega j(u(x))\,dx.$$

a) - Montrer que $J : L^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ est convexe et continue et, en notant J^* sa transformée de Legendre, que pour tout $v \in L^\infty(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega j^*(v(x))\, dx \geq J^*(v) \quad := \quad \sup_{u \in L^1(\Omega)} [\langle v, u\rangle_{L^\infty, L^1} - J(u)] = \sup_{u \in L^2(\Omega)} [\langle v, u\rangle_{L^2, L^2} - J(u)]$$

b) - Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe, satisfaisant $\phi(s) \sim C\, s^2$ lorsque $s \to \pm\infty$. Montrer que si $v \in L^\infty(\Omega)$ alors

$$\Phi^*(v) = \int_\Omega \phi^*(v(x))\, dx,$$

où Φ^* désigne la transformée de Legendre (dans L^2) de la fonction

$$\Phi : L^2 \to \mathbb{R}, \quad \Phi(u) = \int_\Omega \phi(u(x))\, dx.$$

c) - En introduisant la suite de fonctions $j_\varepsilon := j + \psi_\varepsilon^*$, montrer que pour tout $v \in L^\infty(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega j^*(v(x))\, dx = \sup_{u \in L^2(\Omega)} \int_\Omega [u(x)\, v(x) - j(u(x))]\, dx,$$

et conclure que

$$J^*(v) = \int_\Omega j^*(v(x))\, dx.$$

Partie 4. On fait les mêmes hypothèses que dans la question 3, et on suppose de plus que $j(s) \to +\infty$ lorsque $s \to \pm\infty$.

a) - Montrer que

$$J(u) = \sup_{v \in \mathcal{D}(\Omega)} [\langle u, v\rangle - J^*(v)].$$

b) - En déduire que si (u_n) est une suite de $L^1(\Omega)$ et $u \in L^1(\Omega)$ telles que

$$u_n \rightharpoonup u \qquad \mathcal{D}'(\Omega)$$

alors

$$J(u) \leq \liminf J(u_n).$$

Partie 5. On fait les mêmes hypothèses que dans la question 3, et on suppose de plus que j est strictement convexe, $j \geq 0$ et $j(s) \to +\infty$ lorsque $s \to \pm\infty$. On se propose de montrer que si (u_n) est une suite de $L^1(\Omega)$ et $u \in L^1(\Omega)$ sont tels que

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \ \text{ et } \ J(u_n) \to J(u) \qquad \text{alors} \qquad u_n \to u \ \text{ dans } \ L^1(\Omega) \text{ fort.}$$

a) - Montrer que

$$\int_\Omega \Big[\frac{1}{2}\, j(u_n) + \frac{1}{2}\, j(u) - j\Big(\frac{u_n + u}{2}\Big)\Big] \to 0.$$

b) - Montrer que si (t_n) est une suite de $\mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$ sont tels que

$$\frac{1}{2}\, j(t_n) + \frac{1}{2}\, j(t) - j\Big(\frac{t_n + t}{2}\Big) \to 0$$

alors $t_n \to t$, et en déduire qu'il existe une sous-suite (u_{n_k}) telle que $u_{n_k} \to u$ p.p.

c) - Montrer que $f_k = j(u_{n_k}) - |j(u_{n_k}) - j(u)| \to 0$ dans $L^1(\Omega)$ et conclure.