Analyse fonctionnelle et EDP,
Examen, juin 2011
ENS, FIMFA, première année,
Durée : 3 heures, aucun document.

Aucun document, ni calculatrice ni téléphone.

Exercice 1 *Soit* K *un compact de* $\mathbb{R}^d$ *et* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$*, montrer qu'il existe* $\alpha \in \mathbb{N}^d$ *et* $f \in C(\mathbb{R}^d)$ *tels que*

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f \partial^\alpha \varphi$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ *tel que* $\mathrm{supp}(\varphi) \subset K$.

Exercice 2 *Soit* Ω *un ouvert borné régulier de* $\mathbb{R}^3$*, on se propose de montrer l'existence d'une solution non triviale de l'équation:*

$$\begin{cases} -\Delta u = u^3 \text{ dans } \Omega \\ u = 0, \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

1. *Montrer l'existence d'une solution au problème*

$$\inf \left\{ \int_\Omega |\nabla v|^2 \ : \ v \in H^1_0(\Omega), \ \int_\Omega v^4 = 1 \right\} \tag{1}$$

2. *Montrer que si* v *résout (1) il existe* $\lambda > 0$ *tel que* $-\Delta v = \lambda v^3$ *dans* Ω.

3. *Conclure.*

Exercice 3 *Soit* Ω *un ouvert borné régulier de* $\mathbb{R}^d$*, on pose* $H^1_0(\Omega, \mathbb{R}^d) := \{u := (u_1, ..., u_d), \ u_i \in H^1_0(\Omega), \ i = 1, .., d\}$ *pour* $u \in H^1_0(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *on définit* $\varepsilon(u) := \frac{1}{2}(Du + Du^T) \in L^2(\Omega)^{d\times d}$ *i.e.* $\varepsilon(u)_{ij} := \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$.

1. *Montrer qu'il existe* $C > 0$ *telle que* $\|u\|_{H^1} \leq C\|\varepsilon(u)\|_{L^2}$ *pour tout* $u \in H^1_0(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *(inégalité de Korn).*

2. *Soit* $g_1, ..., g_d$ *dans* $H^{-1}(\Omega)$ *montrer que le système*

$$-\Delta u_j - \mathrm{div}(\partial_j u) = g_j, \ u_j|_{\partial\Omega} = 0, \ j = 1, ..., d,$$

   possède une unique solution faible.

Exercice 4 *1. Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$ et λ_1, la première valeur propre (la plus petite) de $-\Delta$ avec condition de Dirichlet homogène sur $\partial\Omega$, montrer que*

$$\lambda_1 = \inf\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2 \ : \ u \in H_0^1(\Omega), \ \int_\Omega u^2 = 1\right\}$$

et caractériser les fonctions propres associées à λ_1 en termes du problème ci-dessus.

2. *Montrer que si u est une fonction propre associée à λ_1 et $u_+ \neq 0$ alors u_+ est aussi une fonction propre associée à λ_1.*

3. *Soit $T > 0$, $u \in C([0,T], L^2(\Omega)) \cap C(]0,T], H_0^1(\Omega)) \cap C^1(]0,T], L^2(\Omega))$ solution de l'équation de la chaleur*

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \text{ dans } (0,T) \times \Omega$$

Montrer que $\|u(t,.)\|_{L^2} \leq e^{-\lambda_1 t}\|u(0,.)\|_{L^2}$. En déduire un résultat d'unicité puis justifier que ce qui précède s'étend au cas où $\Omega :=]0,1[^2$ (qui n'est pas régulier).

4. *Pour $\Omega :=]0,1[^2$, trouver une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ formée de fonctions propres $-\Delta$ avec condition de Dirichlet homogène sur $\partial\Omega$ (ainsi que les valeurs propres associées).*

5. *Toujours pour $\Omega :=]0,1[^2$, résoudre explicitement l'équation de la chaleur avec les conditions aux limites suivantes*

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x) \text{ dans }]0,T[\times\Omega \\ u = 0, \text{ sur } \partial\Omega \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

où $T > 0$ et l'on a supposé $u_0 \in L^2$ et $f \in C(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))$.

Exercice 5 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ de mesure finie (pour simplifier) et T un endomorphisme continu de $L^2(\Omega)$* local *c'est à dire tel que* $\mathrm{supp}(Tu) \subset \mathrm{supp}(u)$ *pour tout $u \in L^2(\Omega)$. Montrer qu'il existe $v \in L^\infty(\Omega)$ tel que $T(u) = uv$ pour $u \in L^2(\Omega)$ (on pourra commencer par montrer que $T(\chi_A u) = \chi_A T(u)$ puis que $T(\chi_\Omega) \in L^\infty$).*